

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**Ігнатишин М. І.**

**МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНЕ  
МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ  
МОСТОВИХ КОНСТРУКЦІЙ  
(опора, балка, плита)**

*Монографія*

**Мукачєво – 2017**

УДК 624.2/8  
ББК 38.5  
І 26

**Рецензенти:**

**Жигуц Ю. Ю.**, доктор технічних наук,  
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»;

**Козубовський В. Р.**, доктор технічних наук,  
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»;

**Олександренко В. П.** доктор технічних наук,  
Хмельницький національний університет.

*Рекомендовано до друку Вченою радою Мукачівського державного університету, протокол №17 від 23 березня 2017 р.*

**Ігнатишин М.І.**

**І 26 Механіко-математичне моделювання елементів мостових конструкцій (опора, балка, плита):** монографія / М.І. Ігнатишин. – Мукачево: РВВ МДУ, 2017. – 172 с.

ISBN 978-617-7495-05-4

У монографії досліджено та проаналізовано стан мостів тривалої експлуатації, розглянуто аналітичні та чисельні методи розв'язку диференціальних рівнянь, що описують деформації елементів мостових конструкцій, опори, балки, плити. Розроблено методику розрахунку інтегральних характеристик мостової плити, циліндричної жорсткості та ефективної товщини. За результатами статичних випробувань моста розраховано циліндричну жорсткість та ефективну товщину мостової плити.

Розраховано на науковців, викладачів вищих навчальних закладів, студентів, аспірантів.

**УДК 624.2/8**  
**ББК 38.5**

ISBN 978-617-7495-05-4

© Ігнатишин М.І., 2017  
© МДУ, 2017

# ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	<b>5</b>
<b>РОЗДІЛ 1. ПРОБЛЕМИ ДІАГНОСТИКИ, МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКУ ТА ОЦІНКИ МЕХАНІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ МОСТОВИХ КОНСТРУКЦІЙ</b> .....	<b>10</b>
1.1. Стан мостів України, проблеми діагностики та їх аналіз.....	10
1.2. Коефіцієнт інтенсивності напружень та власні частоти коливань елементів мостових конструкцій .....	13
1.3. Аналіз з'єднання високоміцної арматури у залізобетонних мостових конструкціях.....	16
1.4. Аналіз чисельних математичних методів розрахунку мостових конструкцій .....	19
1.5. Висновки до розділу 1 та задачі досліджень .....	29
<b>РОЗДІЛ 2. ВИЗНАЧЕННЯ ТА ПОКРАЩЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ МОСТІВ</b> .....	<b>32</b>
2.1. Удосконалення методу визначення коефіцієнта інтенсивності напружень у балкових мостових конструкціях .....	32
2.2. Дослідження власних коливань залізобетонної плити, вільно опертої з чотирьох боків у відносних координатах .....	38
2.3. Дослідження власних коливань залізобетонної мостової плити, вільно опертої з двох протилежних боків та вільної з двох інших у відносних координатах.....	42
2.4. Покращення з'єднання арматури періодичного профілю у залізобетонних конструкціях мостів.....	44
2.5. Висновки до розділу 2.....	47
<b>РОЗДІЛ 3. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЙ МОСТІВ АНАЛІТИЧНИМИ ТА ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ</b> .....	<b>49</b>
3.1. Визначення напружено-деформованого стану трьохелементної мостової опори методом скінченних елементів .....	49
3.2. Визначення напружено-деформованого стану мостової опори зі змінним перерізом методом скінченного елемента.....	55
3.3. Визначення напружено-деформованого стану мостової опори зі змінним перерізом методом $N$ скінченних елементів .....	58
3.4. Визначення напружено-деформованого стану мостової опори аналітичним та числовими методами за різних базисних та пробних функцій..	61

3.5. Визначення напружено-деформованого стану балкових елементів мостів аналітичним та числовими методами за різних базисних та пробних функцій .....	68
3.6. Методика розрахунку напружено-деформованого стану залізобетонної мостової балки таврового профілю з тріщиною .....	79
3.7. Висновки до розділу 3 .....	84
<b>РОЗДІЛ 4. РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРОЇЗНОЇ ЧАСТИНИ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ ПРОГОНОВОЇ БУДОВИ МОСТА .....</b>	<b>86</b>
4.1. Розрахунок напружено-деформованого стану сталезалізобетонного моста методом скінченних елементів.....	86
4.2. Застосування комплексного ряду Фур'є при розрахунку напружено-деформованого стану вільно опертих мостових плит .....	102
4.3. Визначення напружено-деформованого стану вільно опертої мостової плити під дією рівномірно розподіленого навантаження .....	115
4.4. Визначення напружено-деформованого стану вільно опертої мостової плити під дією навантаження, розподіленого на площадку прямокутної форми.....	125
4.5. Визначення напружено-деформованого стану вільно опертої мостової плити під дією навантаження, розподіленого на систему площадок прямокутної форми.....	132
4.6. Висновки до розділу 4 .....	143
<b>РОЗДІЛ 5. ЕКОНОМІЧНА ЕФЕКТИВНІСТЬ З'ЄДНАННЯ АРМАТУРНИХ СТЕРЖНІВ ТА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СТАТИЧНОГО ВИПРОБУВАННЯ МОСТА.....</b>	<b>145</b>
5.1. Розрахунок економічної ефективності з'єднання арматурних стержнів для балок .....	145
5.2. Розрахунок економічної ефективності комп'ютерного моделювання екстремального статичного навантаження моста.....	147
5.2. Висновки до розділу 5 .....	148
<b>ВИСНОВКИ.....</b>	<b>149</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>151</b>
<b>ДОДАТКИ .....</b>	<b>151</b>

## ВСТУП

Автодорожні мости – це одна з найважливіших складових інфраструктури, яка потребує бюджетних асигнувань і постійної уваги з боку державних органів. Обсяги перевезення вантажів територією України, будівництво нових доріг, зростаючі транспортні потоки вимагають відповідної технічної експертизи та періодичної оцінки стану об'єктів транспортних магістралей, що піддаються тривалій експлуатації. Особливо важлива така оцінка для вже зведених мостів, якими користуються упродовж тривалого часу. Адже в цьому випадку визначення працездатності конструкції споруди полягає саме у виявленні змін локальних та інтегральних характеристик її конструктивних елементів, розрахунку внутрішніх силових факторів, спричинених цими змінами, та врахуванні отриманої інформації при проектуванні нових мостів, реконструкції старих та прогнозуванні ресурсу споруди.

Водночас стан автодорожніх мостових споруд погіршується, за ними не ведеться належного догляду. Особливо це стосується мостів на дорогах, підпорядкованих органам місцевого самоврядування. Сьогодні припинення транспортного руху через міст внаслідок його аварії, зумовленої стихійним лихом, або незадовільним технічним станом призводить до значних соціальних та економічних втрат. Зокрема, збитки, які завдають стихійні лиха народному господарству в різних регіонах України, обчислюються десятками, а то й сотнями мільйонів гривень щорічно.

На поточне утримання мостових споруд Україна витрачає у 5-6 разів менше коштів, ніж Німеччина або Франція, а на капітальний їх ремонт – у 60 разів менше, ніж у США.

Нині на шляхах сполучення України використовуються 28397 мостів і шляхопроводів загальною довжиною 818,2 км. Експлуатують їх у нашій державі три відомства:

- на автомагістралях загального користування – Українська Державна корпорація з ремонту та утримання автомобільних доріг «Укравтодор»;
- на дорогах населених пунктів (комунальні мости) – органи самоврядування міст і населених пунктів, що підпорядковані Державному комітету України з питань будівництва, архітектури та житлової політики;
- залізничні – Державна адміністрація залізничного транспорту України «Укрзалізниця».

Корпорація «Укравтодор» на державних і місцевих дорогах експлуатує 16059 автодорожніх мостів загальною довжиною 361,7 км.

Дієвих комунальних мостів нараховується 4272 загальною довжиною 199,7 км

Переважна більшість мостових споруд України побудована з використанням типових збірних залізобетонних конструкцій (89,3 %). Крім того, на автомобільних дорогах експлуатуються мости з металевими й сталезалізобетонними прогоновими будовами (5,9 %) та дерев'яні (майже 1 %).

На дорогах державного значення використовуються близько 1500 мостів, що мають габарит проїзної частини менш ніж 8 м, тобто на них відсутні смуги безпеки.

На автошляхах місцевої мережі стан мостів дещо кращий. Це пояснюється тим, що вона формувалася значно пізніше, ніж магістральна, тобто габарити й вантажопідйомність цих мостових споруд більше відповідають сучасним вимогам. Крім того, такі дороги, як правило, не зазнавали бурхливого зростання інтенсивності руху автомобільного транспорту і не підлягали частим реконструкціям внаслідок підвищення категорій. Однак слід зауважити, що служба експлуатації на дорогах місцевого значення доволі часто налагоджена гірше, ніж на магістралях, тому характерні дефекти конструкцій мостів, а саме: стан мостового полотна, сполучення з підходами, організація водовідводу та інші – обгрунтовано занепокоюють спеціалістів.

Сучасні тенденції вітчизняного і закордонного мостобудування пов'язані з широким упровадженням нових високоміцних матеріалів, удосконаленням конструктивних форм і методів розрахунків.

Дослідженню експериментальних і теоретичних проблем діагностики, методам розрахунку та оцінки надійності й довговічності мостів, визначенню параметрів характеристик конструктивних матеріалів, конструкцій мостових споруд, визначенню параметрів та вивченню напружено-деформованого стану конструкцій аналітичними та числовими методами, розрахунку напруженого стану проїзної частини залізобетонної прогонової будови моста, покращенню експлуатаційних параметрів конструкцій та проектуванню мостів присвятили свої праці вітчизняні й зарубіжні вчені.

У створення теорії залізобетону, як важливого матеріалу в мостобудуванні, зробили великий внесок вітчизняні та зарубіжні вчені, такі як І. Н. Ахвердов, Є. М. Бабиц, В. Н. Байков, А. М. Бамбура, А. А. Гвоздєв, О. Б. Голишев, Й. Й. Лучко, Н. М. Мулин, А. А. Оатул, Б. Б. Ужполявичюс, М. М. Холмянський та ін. Однак завершеної теорії залізобетону на даний час немає.

Становлення сучасної механіки деформівного тіла та механіки руйнування відбувається під впливом вітчизняних наукових шкіл О. М. Гузя, В. В. Панасюка, В. Т. Трощенко, П. В. Яснія та ін.

Дослідженнями стану мостів, проектуванням, реконструкцією, діагностикою та оцінкою ресурсу займаються Н. Г. Бондарь, Б. Г. Гнідець, В. Г. Кваша, П. М. Коваль, В. П. Кожушко, А. І. Лантух-Лященко, Й. Й. Лучко, О. С. Распопов та ін. В Україні мостобудування передовсім пов'язане з іменем Є. О. Патона.

Дослідження конструктивних матеріалів і залізобетонних конструкцій методами механіки деформівного тіла та механіки руйнування розвито в працях І. Ю. Бабица, С. Ю. Бабица, В. С. Дорофєєва, Й. Й. Лучка, Є. М. Перпесипкіна, В. П. Силованюка, Г. Т. Сулима, Л. П. Трапезнікова, М. Г. Чаусова, П. В. Яснія та ін.

Математичним моделюванням та прикладним застосуванням математичного апарату для дослідження напружено-деформованого стану матеріалів та елементів конструкцій займаються А. Е. Андрейків, В. А. Кривень, В. В. Маринець, М. С. Михайлишин, О. Ф. Обшта, В. Ф. Чекурін та інші.

Проте сьогодні залишаються недостатньо дослідженими метод К-тарування балкових елементів, аналітичні методи розрахунку тріщиностійкості армованих балок таврового перерізу, способи оцінки точності числових методів визначення напружено-деформованого стану. У переважній більшості дослідження мостових конструкцій проводяться числовим методом, які не завжди дають зручні результати для інженерної практики і є принципово наближеними. У цьому зв'язку актуальним завданням є розв'язання чисельних та аналітичних методів визначення інтегральних механічних параметрів залізобетонної плити проїзної частини моста та побудова відповідних інженерних формул. Потребують вивчення та вдосконалення способи з'єднання арматури, які суттєво впливають на зміну напружено-деформованого стану залізобетонних конструкцій мостів, що зазнають циклічні навантаження.

Отже, задачі і методи розрахунку напружено-деформованого стану та визначення механічних параметрів залізобетонних конструкцій мостів є актуальними та містять науковий і практичний інтерес.

**Мета дослідження** - розробити методику розрахунку напружено-деформованого стану елементів конструкції моста, зокрема мостової залізобетонної плити, її інтегральних механічних характеристик та вдосконалити спосіб армування елементів мостових конструкцій з метою оптимізації їх напружено-деформованого стану, підвищення несучої здатності та ресурсу.

Відповідно до мети визначено такі **науково-технічні завдання**:

- удосконалити методику розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень, дослідити динамічну поведінку залізобетонної плити проїзної частини моста;
- дослідити конструкцію й технологію з'єднання та армування стеержневої арматури, удосконалити армування елементів мостових конструкцій;
- удосконалити розрахунок напружено-деформованого стану елементів мостових конструкцій числовими методами;
- дослідити напружено-деформований стан мостової балки із тріщиною;
- розрахувати напружено-деформований стан сталевих-залізобетонного моста методом скінчених елементів;
- дослідити моделі напружено-деформованого стану вільно опертої мостової плити аналітичним методом за різних видів навантаження, розробити програми та рекомендації з розрахунку характеристик напружено-деформованого стану конструкцій мостів, зокрема, інтегральної циліндричної жорсткості, ефективної товщини і густини, модуля пружності залізобетонної плити проїзної частини моста за результатами натурних випробувань.

**Об'єкт дослідження:** конструктивні елементи моста, зокрема проїзна частина сталевих-залізобетонних плит прогонової будови моста.

**Предмет дослідження:** моделі механіки деформівного тіла, що описують напружено-деформований стан моста під час статичних і динамічних випробувань та у процесі його експлуатації.

**Методи дослідження.** У теоретичних дослідженнях застосовані проєкційні та аналітичні методи механіки деформівного твердого тіла. В експериментальних – статичне і динамічне випробування мостів тривалої експлуатації, дослідження зразків матеріалів.

**Достовірність** теоретичних й експериментальних результатів підтверджено даними експериментальних досліджень на лабораторних зразках та натурних конструкціях, статичних і динамічних випробуваннях мостів, а також порівнянням їх у ряді випадків із науковими літературними даними.

**Інформаційною базою** дослідження слугували наукові видання вітчизняних та зарубіжних учених, результати статичного й динамічного випробування мостів, математичні моделі механіки деформівного твер-



дого тіла, а також державні нормативи і стандарти з питань мостобудування та їхнього випробування.

### **Отримано наступні результати:**

- розроблено методику розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень для довільного кута розміщення тріщини до поверхні залізобетонної конструкції;

- удосконалено армування залізобетонних мостових конструкцій за допомогою арматури, кінці якої з'єднані втулками, обтиснутими спеціальними профільними пуансонами;

- отримало подальший розвиток дослідження балки із тріщиною, одержано залежності, що визначають напружено-деформований стан балки таврового профілю;

- розвинуто метод скінченних елементів стосовно розрахунку вертикальних переміщень та силових факторів у сталевих залізобетонному мості, представленому пластиною у вигляді паралелограма, підкріпленою сталевими балками та ребрами жорсткості;

- отримано у явному вигляді аналітичний розв'язок диференціального рівняння поперечного згину залізобетонної плити проїзної частини моста під дією локальних навантажень, досліджено динаміку поведінки вільно опертої плити, отримано співвідношення, що пов'язують результати статичних та динамічних випробувань із фізичними параметрами залізобетонної плити проїзної частини моста.

Монографія складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку літературних джерел і додатків.

# РОЗДІЛ 1

## ПРОБЛЕМИ ДІАГНОСТИКИ, МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКУ ТА ОЦІНКИ МЕХАНІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ МОСТОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

### 1.1. Стан мостів України, проблеми діагностики та їх аналіз

У зв'язку з прогнозованим будівництвом транспортних коридорів через Україну виникає необхідність проектування, зведення, реконструкції значної кількості мостів. Тому вже сьогодні необхідно критично переглянути принципи розрахунку, проектування, випробовування та експлуатації конструкцій мостів і, врахувавши багаторічний досвід роботи цих систем, внести корективи, а, можливо, й принципові зміни в діючі норми, щоб забезпечити належну довговічність і надійність мостових споруд.

Багаторазова зміна норм проектування та несвоєчасна реконструкція призвели до того, що на сьогодні транспортні мости суттєво різняться за вантажопідйомністю. Серед капітальних мостових споруд існують такі, що розраховані на рух колон автомобілів за схемами Н-8, Н-10, Н-13, Н-18, Н-30 та А-11. Спецнавантаження для мостів приймали за схемами НГ-60 і НК-80: 46,4 % споруд, що мають обмежений габарит, розраховані на навантаження за схемами Н-10 (Н-13) і НГ-60, тобто не задовольняють умови руху сучасних транспортних засобів.

Дослідженнями стану мостів, проектуванням, реконструкцією, діагностикою та оцінкою ресурсу займаються Н. Г. Бондарь, Б. Г. Гнідець, В. Г. Кваша, П. М. Коваль, В. П. Кожушко, Й.Й. Лучко, Б. Є. Патон, О. С. Распопов, В. П. Силованок та інші. В Україні ж мостобудування нерозривно пов'язане з іменем Є. О. Патона

Значна кількість мостів побудована за технічними нормами, що діяли до 1962 року. На сьогодні вони не відповідають умовам руху автотранспорту як за вантажопідйомністю, так і за габаритами проїзної частини. Наприклад, навіть мостові споруди з габаритом 9 м у більшості випадків відхилені від діючих норм і, відповідно, потребують розширення. А це, у свою чергу, вимагає проведення досліджень, лабораторних і натурних випробовувань до і після реконструкції.

Виходячи із вищесказаного, науковці проводять дослідження з метою вдосконалення правил і технології проектування нових мостів та

реконструкції старих, що стосуються багатьох аспектів будівництва та експлуатації мостової споруди: математичного моделювання й оцінки ресурсу на стадії проектних робіт, покращення фізичних та експлуатаційних характеристик основного матеріалу – бетону, оцінки стану в процесі експлуатації, реконструкції і т. п. Далі розглянемо згадані вище аспекти більш детально.

У монографії [16] розглядається застосування домішок у технології виробництва залізобетону для мостових конструкцій. Домішки будівельної хімії надають можливість знизити споживання води, прискорити затвердіння, підвищити стійкість до агресивного середовища, довговічність, забезпечити технічно й економічно вигідне виробництво залізобетону. Проте у згаданих вище роботах не розглянуто зміну фізичних властивостей у процесі затвердіння та висихання бетону. Дослідження впливу процесу сушки на фізичні властивості бетону й залізобетону висвітлено в праці [22]. Проведені дослідження показали позитивний збіг теоретичних та експериментальних даних. Однак, не враховано основних техніко-експлуатаційних чинників, здатних прискорювати процеси виникнення й ріст каверн, виразок і тріщин у будівельних бетонних та залізобетонних конструкціях. У праці [104] наголошується на тому, що найважливіші властивості бетону, міцність, жорсткість, тріщиностійкість залежать від взаємодії арматури й бетону. У створення теорії залізобетону, як важливого матеріалу в мостобудуванні, зробили великий вклад вітчизняні та закордонні вчені, такі як І. Н. Ахвердов [6], В. Н. Байков [7-10], А. М. Бамбура, А. А. Гвоздєв [24-27], Б. Г. Гнідець, О. Б. Голишев [29], Й. Й. Лучко [60, 66], Н. М. Мулин [91, 92], А. А. Оатул [94-96], Б. Б. Уж-полявичюс [117], М. М. Холмянський [123, 124] та ін. Однак, як зауважив А. А. Гвоздєв [24-27], завершеної теорії роботи арматури з бетоном не створено.

На механічні властивості, експлуатаційні характеристики та надійність елементів мостових конструкцій мають значний вплив методи зрошування арматури, які вивчали Й. Й. Лучко, В. В. Левчич, Я. Л. Іваницький, М. М. Гвоздюк [60, 71, 73], В. В. Дегтярев, С. А. Мадатян, Б. Н. Фридлянов [83], Є. А. Балючик, А. В. Лютиков, Н. Г. Матков, В. Н. Тубин [93], проте проблема так і не була вирішена.

На сьогодні з питання розрахунку залізобетонних конструкцій [17] стосовно їх економічності й міцності у процесі проектування серед фахівців відсутня єдина позиція. Це, насамперед, стосується опису процесу утворення й розкриття тріщин. Для провідних вітчизняних учених (а також колишнього СРСР) і закордонних завжди було актуальним дослідження зародження й розвитку тріщин, а також деформування залізобетонних конструкцій [7, 8, 12] та [52]. Але, як відзначають самі автори за-

пропонованих методик, унаслідок недостатнього вивчення ряду принципів питань окремі положення теорії мають, в основному, емпіричний характер і тому потребують постійного уточнення і вдосконалення. Деякі аспекти таких уточнень і вдосконалень містяться у працях [14, 39].

Велика увага під час технічної діагностики мостів надається розвитку неруйнівних методів випробувань конструкцій, тому що актуальним стає той шлях, який дозволяє зберегти експлуатаційну придатність пропонованого об'єкта без порушення несучої здатності і виявити його дійсний стан. Відповідні дослідження – у праці [32, 66].

Орієнтовну схему класифікації методів випробувань на фізичній основі розглянуто в праці [72] і показано в таблиці 1.1.

Як бачимо, вони групуються на принципах, викладених у різних розділах фізики. Для класифікації неруйнівних методів необхідно врахувати ту фізичну основу, на базі якої розроблений метод випробування.

Оцінюючи можливості руйнівних і неруйнівних методів випробування споруд, слід врахувати, що перші можна використати переважно при здійсненні модельних випробувань і вивченні дослідних зразків нових конструкцій, а також вибіркового контролю виробів на заводах.

На основі огляду літературних джерел, що стосуються стану мостів України, проблем діагностики і їх аналізу, можна зробити висновок, що згадані споруди потребують значного покращення в різних аспектах.

Спосіб з'єднання арматури за допомогою різьбової втулки також має досить суттєві недоліки, що розглянуті в праці [46].

*Таблиця 1.1.*

### **Схема класифікації неруйнівних методів**

Неруйнівний метод досліджень	Механічні методи визначення поверхневої твердості	Метод відскоку
		Метод відбитків
		Метод забивання та виривання стержня
	Звукові та ультразвукові	Резонансний метод
		Метод акустичної емісії
		Методи ультразвукові
		Ударний метод
	Оптичні	Голографічна інтерферометрія
		Метод голографії
	Радіаційні	Нейтронні методи
		Методи з використанням гальмівного випромінювання та гамма-променів
	Електромагнітні	Метод поглинання НВЧ-хвиль
Метод електромагнітної індукції		

У наступних параграфах ми запропонуємо досконалішу конструкцію і технологію з'єднання арматури.

Суттєвим недоліком неруйнівного методу є неможливість безпосереднього визначення важливих фізичних та механічних характеристик конструктивного елемента моста, зокрема густини, модуля пружності матеріалу та ін., що можуть змінюватися в процесі експлуатації. Далі ми застосуємо механіко-математичні моделі теорії пружності, отримаємо необхідні співвідношення, що пов'язують результати статичних і динамічних випробувань із важливими фізичними й механічними властивостями моста, й розрахуємо їх.

На противагу наближеним емпіричним методам нами запропоновано аналітичну методику розрахунку тріщиностійкості залізобетонних мостових балок таврового перерізу, удосконалено метод визначення напружень у конструкції балкового типу.

## **1.2. Коефіцієнт інтенсивності напружень та власні частоти коливань елементів мостових конструкцій**

Сучасні тенденції вітчизняного й закордонного мостобудування пов'язані із широким упровадженням нових високоміцних матеріалів, удосконаленням матеріалів, конструктивних форм і методів розрахунків [15, 106, 113] та [101]. Викликане цим полегшення конструкцій призвело до зменшення жорсткості, підвищення їхньої чутливості до динамічних навантажень (впливів). У зв'язку з цим, а також із ростом навантаження різко зросла потреба в динамічних розрахунках, дослідженнях динамічної поведінки мостових конструкцій нових конструктивних форм.

Створення механіки деформівного твердого тіла та механіки руйнування пов'язано з іменами видатних українських вчених О. М. Гузь, В. В. Панасюк, С. П. Тимошенко та ін. Зокрема, дослідження конструктивних матеріалів і залізобетонних конструкцій на Україні пов'язане з іменами А. Б. Андрейків, І. Ю. Бабич, С. Ю. Бабич, В. С. Дорофеев, В. І. Кир'ян, Й.Й. Лучко, М. Г. Стащук, Г. Т. Сулим, М. Г. Чаусов, П. В. Ясній та іншими.

Під час експлуатації мости піддаються статичним та динамічним навантаженням, які виникають внаслідок коливальних процесів елементів конструкцій споруди. Регулярним фактором збудження коливань є рухоме навантаження (потяги, автомобілі, поїзди метро, трамваї, пішоходи).

Для менш жорстких систем (підвісних і деяких видів вантових мостів) визначальним типом динамічного впливу є взаємодія конструкції з потоком повітря за сильного вітру.

Динамічні процеси, які викликані рухомим навантаженням, розглядають в двох аспектах: досліджують поведінку споруди під заданим навантаженням і в виді комплексної системи «прогонова будова – рухоме навантаження», тобто вивчають взаємодію прогонової будови з рухомим навантаженням.

Перший аспект застосовують тоді, коли швидкості руху невеликі й ресори не працюють як пружні елементи. За сучасних умов високошвидкісних технологій актуальним є другий аспект. Це обґрунтовано тим, що під час високих швидкостей руху коливання рухомого навантаження на мості можуть бути більш несприятливими, ніж на підходах до нього, і за певних умов це може загрожувати безпеці руху потягів і автомобілів.

Дослідження на ударне навантаження балок із розрізом, які зазвичай використовують для визначення опору матеріалу руйнуванню, базуються на енергетичних принципах. Проте пізніше ці випробування були модифіковані для оцінки фундаментальної властивості матеріалу – динамічного коефіцієнта інтенсивності напружень (ДКІН). Спочатку ДКІН обчислювали в припущенні, що ініціювання росту тріщини відбувається за максимального ударного навантаження, і при цьому можуть бути використані співвідношення статичної механіки руйнування. Проте пізніше автори праць [126, 140, 148] критично проаналізували недоліки різноманітних аспектів ударного випробовування зразків. Дослідження показали, що обчислення ДКІН, яке базується на статичних співвідношеннях і піковому значенні ударного навантаження, може привести до неправильних результатів. Звідси випливає, що для точної оцінки ДКІН потрібно виконати повний динамічний аналіз з урахуванням впливу інерційних факторів.

Визначати ДКІН можна різними способами. Один із них є суто експериментальний. У цьому випадку ДКІН визначають за величиною сигналу наклеєного біля вершини тріщини тензодатчика, що описано в праці [136], або використовуючи методи фотопружності, що описано в праці [152], або каустик, що описано в праці [129], у поєднанні з високошвидкісною кінозйомкою. Але згадані методи мають певні недоліки: необхідність наклеювання датчиків на кожний зразок з їх подальшим таруванням і реєструючої апаратури, складна процедура дешифровки одержаних кінокадрів. Використання цих методів є виправданим тільки при проведенні еталонних експериментів. У працях [128] та [162] йдеться про те, що інколи ДКІН визначають теоретичними методами, які відрізняються складністю закладених у них математичних моделей, і навіть найбільш складні з них вимагають введення в розрахунок додаткових залежностей, які можна отримати за допомогою експерименту [128, 160]. Тому на даний час найбільшого поширення набули змішані числово-експериментальні методи.

У праці [3] запропоновано підхід для К-тарування балкових зразків, ослаблених тріщиною, що перпендикулярна до поверхні балки (таке розміщення тріщини малоімовірне) за безопорного ударного згину. При цьому був розвинений підхід, запропонований у працях [34, 102, 145] та [108], і наведено формули для К-тарування балкових зразків за триточкового ударного згину. Розвиток даних та інших підходів запропоновано в працях [135, 146, 149], Т. Lorriot, P. Marur [148, 155], А. Krasovsky, І. Огунуак, І. Rokach [158]. Поведінку циліндричного зразка за динамічного кручення розглянуто в праці [13].

Через те, що швидкість поширення пружних хвиль є скінченною, взаємодія зразка з опорами на початковій стадії навантаження не впливає на напружено-деформований стан біля вершини тріщини. Тому для випадку крихких матеріалів даний проміжок часу може бути достатнім для досягнення ДКІН критичного значення і старту тріщини.

Визначення частот власних коливань конструкцій є першочерговим за всіх типів динамічних розрахунків [58]. Це завдання не викликає труднощів, якщо воно розглядається в лінійній постановці.

Натомість визначення власних частот коливань, наприклад, моста підвісної системи, з урахуванням геометричної нелінійності роботи його елементів на сучасній стадії розвитку програмних комплексів МСЕ викликає великі труднощі.

Знати величини власних частот і форми коливань дуже важливо. Коливання конструкцій та їх види описані в праці [58].

Вираз для кругової частоти для балки із зосередженою масою  $m$  всередині прольоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}. \quad (1.1)$$

Для балкових розрізних мостів власна частота поперечних коливань балки може бути визначена за формулою:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{a_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (1.2)$$

Коефіцієнт  $a_i$  залежить від обпирання кінців і форм коливань,  $l$  – довжина балки,  $E$  – модуль пружності,  $I$  – момент інерції перерізу,  $m$  – маса вантажу.

Частоти гнучких елементів варто визначати за спеціальними програмами і, якщо є така можливість, врахувати їхню геометричну нелінійність.

Власні коливання елементів мостових конструкцій, зокрема тонких плит, аналітично розв'язані для багатьох випадків у працях І. М. Баба-

кова, В. О. Івовича, Б. Г. Корнєєва, С. П. Тимошенко, А. П. Філіпова та інших. Однак вибирати розрахункові схеми, а також методи розрахунку конструкцій мостів необхідно з урахуванням ефективного використання сучасного програмного забезпечення, яке передбачає зведення відомих диференціальних рівнянь та алгоритмів їх розв'язку до певного виду.

Отже, на основі аналізу наукової літератури з питань визначення коефіцієнта інтенсивності напружень та власних частот коливань елементів мостових конструкцій можна констатувати, що математична модель коефіцієнта інтенсивності напружень потребує узагальнення на випадок довільного кута орієнтації тріщини до поверхні бетону.

Оскільки у реальних конструкціях перпендикулярне розміщення тріщини до поверхні зразка малоімовірне, то розглянемо загальний випадок – коли тріщина знаходиться під кутом до поверхні.

Щодо власних частот коливання елементів мостових конструкцій, то недостатньо досліджено зв'язок математичної моделі власних частот коливання залізобетонної плити проїзної частини моста з моделлю її статичного та динамічного навантаження. Цей зв'язок важливо дослідити, оскільки він пов'язує між собою вимірювання під час натурних статичних та динамічних випробувань величини з важливими механічними величинами, такими як циліндрична жорсткість, модуль пружності і т. п.

Дослідимо зв'язок вимірюваних у процесі статичних та динамічних випробувань величин із важливими механічними і фізичними характеристиками залізобетонної плити проїзної частини моста, використовуючи відомі диференціальні рівняння та алгоритми їх розв'язку в безрозмірних координатах.

### **1.3. Аналіз з'єднання високоміцної арматури у залізобетонних мостових конструкціях**

На даному етапі розвитку будівельної індустрії широко використовують збірні та монолітні залізобетонні попередньо напружені конструкції каркасів будівель та споруд (плити перекриття, балки, ферми, опори тощо), армовані високоміцною стержневою арматурою різних класів міцності. Для армування бетону в основному застосовують стержні термомеханічно зміцненої арматури стандартної довжини 12 м класу А 400 С, А 600 С, А 800 С із періодичним профілем. Потреба в такій арматурі по країні становить сотні тисяч тонн. Крім того, на будівельних підприємствах України складається значна кількість (до 20 % від виробництва арматури) стержневої арматури вказаних класів неста-



нестандартної довжини, і це за одночасно існуючого гострого дефіциту такої сталі.

У вітчизняному будівництві, починаючи з п'ятдесятих років минулого століття, для маломірної арматури періодичного профілю використовували трудомісткі й енергоємні зварні стикові або напускні з'єднання. Однак термомеханічно зміцнена сталь арматури класу А 600 С, А 800 С ( $\sigma_s = 1100 \text{ МПа}$ ) має суттєвий для виробництва недолік – погано зварюється, тобто зварні з'єднання з неї не задовольняють експлуатаційних вимог для арматури цього класу. Тому з'єднані так стержні нестандартної довжини можна використовувати як арматуру класу А 400 із заниженою розрахунковою міцністю  $\sigma_s = 600 \text{ МПа}$ .

Останнім часом для зрощування арматури широко застосовують обтискання на гідравлічному пресі з'єднувальної втулки пуансонами з гладкою напівциліндричною робочою поверхнею [71, 87, 143]. Такі з'єднання використовують для термомеханічно зміцненої профільної арматури (рис. 1.1.).

Встановивши кінці арматури 1 у з'єднувальну втулку 2, її обтискають по всій довжині. Сила обтиску ( $P = 750 \text{ кН}$ ) передається від гідравлічного пресу через спеціальні пуанسونи 3 із гладкою робочою поверхнею. Матеріал втулки під час пластичного деформування заповнює міжреберний простір арматурних стержнів, створюючи досить надійне з'єднання. Втулка виготовлена зі сталі 20 (ГОСТ 1050 – 78). Довжина втулки дорівнювала восьми діаметрам арматури, а товщина стінки – 5-7 мм.

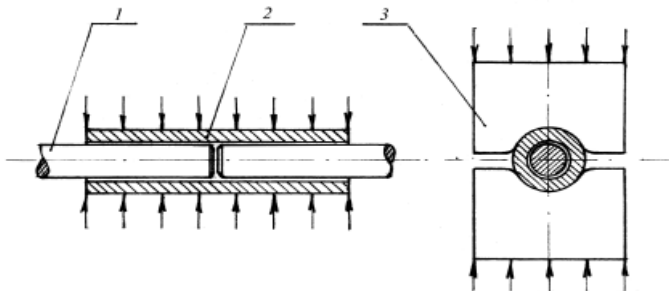


Рис. 1.1. Принципова схема втулкового з'єднання:  
1 – арматура, 2 – втулка, 3 – пуансон

У праці [93] наведені основні результати нових теоретико-експериментальних досліджень на міцність і деформативність незварних трубчастих з'єднань арматури. Конструкція стику досить проста і виглядає як з'єднувальна муфта зі вставленими в неї двома кінцями арматурних стержнів періодичного профілю. Зібрану систему «муфта –

стержні» обтискали на переносних установках фірм «Спрут» (модель СН-1) та «Внинметмаш» (модель ВН-1), а також «Бар Сплайс» (моделі ВГ – 750 м по довжині втулки). Напрямок затисків – від центру втулки до її країв. Максимальні зусилля досягали 800...850 кН, залежно від діаметра стержнів арматури. З'єднувальні муфти виготовляли у вигляді відрізків розрахункової довжини з безшовних холоднотягнутих труб. Матеріал труб – сталь марок 10, 15, 20 з відповідними механічними властивостями за ГОСТ 1050; 380. Для термомеханічно зміцненої арматури класу А 600 С, А 800 С муфти виточували із пруткової сталі за ГОСТ 2590-71.

У 1988-89 рр. Інститут чорної металургії (ІЧМ) НАН України та Фізико-механічний інститут (ФМІ) НАН України запропонували і розробили технологію з'єднань коротких арматурних стержнів із термомеханічно зміцненої сталі за допомогою опресування гільз безпосередньо на металургійних заводах. Запропоновано матеріал гільз та обладнання для опресування. Гільзи виготовляли зі сталі 20 (ГОСТ 1050-84) методом проточування із суцільного прутка або зі стандартного прокату труб відповідного діаметра. Опресовували на гідравлічному пресі марки П-250 із зусиллям 1500 і 2000 кН, залежно від діаметра стержнів арматури (відповідно 10, 14 і 16 мм). Робочі поверхні штампів (пуансонів) для обтискання з'єднувальної втулки були двох типів: гладкі напівкруглі та шестикутного профілю. Для напівкруглої форми робочої поверхні пуансона забезпечується більш рівномірна радіальна деформація втулки за її периметром.

На одному типорозмірі тонких пуансонів можна опресовувати з'єднувальні втулки широкого розмірного сортаменту по зовнішньому діаметру. Проведено механічні випробування на міцність під час статичного розтягу зразків арматури, з'єднаної обтиснутими втулками.

У ФМІ НАН України досліджували фізико-механічні характеристики втулкових з'єднань арматури, а також проводились натурні випробування попередньо напружених плит перекриття [79] та балкових конструкцій, армованих такою арматурою [66, 71].

На основі техніко-економічного аналізу літературних та експериментальних даних, досліджувались дефекти, які утворюються під час опресування з'єднувальних втулок.

З урахуванням цього розроблено методику експериментальних досліджень міцнісних характеристик втулкових з'єднань арматурних стержнів і втулок під короткочасними та втомними навантаженнями, а також методику математичного моделювання утворення дефектів під час опресування таких з'єднань, що надає можливість вибрати технологію пресування, яка суттєво знизить імовірність появи дефектів.

У працях [71, 73, 79] визначено умови розвитку мікро- та макродефектів, класифікацію їх за формою і розмірами, що надає можливість розрахувати міцнісні характеристики такого з'єднання. Встановлено вплив пружних властивостей матеріалу втулки та стержнів на розвиток тріщин у з'єднаннях [79, 83].

Незважаючи на відносну простоту виконання та надійність даного способу з'єднання арматури, він має досить суттєві недоліки.

Під час обтискання втулки зі встановленими кінцями арматури найбільші контактні напруження виникають на ребрах періодичного профілю і нерівномірно роз-поділяються по поверхні арматурного стержня, що, у свою чергу, спричиняє утворення безпосередньо в зонах контакту мікротріщин і відколів, які негативно впливають на надійність з'єднання.

До найпоширеніших методів відносяться з'єднання арматури за допомогою різьбової втулки. Суть цього способу в наступному. Кінці стержнів обточують і нарізають різьбу відповідного діаметра. Потім на арматуру накручують втулку зі внутрішньою різьбою завдовжки приблизно 100 мм (довжина змінюється залежно від діаметра арматури), з'єднуючи так стержні між собою. Цей спосіб має досить суттєві недоліки: складність обробки кінців арматурних стержнів (обточування, виготовлення втулки із внутрішньою різьбою), а також створення додаткових концентраторів напружень внаслідок нарізання різьби.

Отже, аналізуючи вищезгадані методи зрощення арматури при армуванні залізобетону, враховуючи недоліки наведених способів, робимо висновок про необхідність розробки досконалішої технології для покращення процесу виготовлення, механічних параметрів та ресурсу елементів мостових конструкцій.

#### **1.4. Аналіз чисельних математичних методів розрахунку мостових конструкцій**

Деформації елементів мостової конструкції (опори, балки, плити і т. д.) описуються сукупністю диференціальних рівнянь, що і є їхніми математичними моделями механіки деформівного тіла.

В окремих випадках вдається одержати аналітичний розв'язок рівнянь моделі у вигляді формул [54, 112]. Проте у більшості прикладних задач аналітичний розв'язок отримати не вдається через те, що він громіздкий, і тільки за допомогою яких-небудь обчислювальних процедур його можна одержати у вигляді таблиці.

Такого роду моделі мають спеціальну назву – чисельні. Вони дозволяють дійти до принципово наближеного розв'язку, що зв'язано з

дискретністю обчислювальних пристроїв, обмеженим обсягом пам'яті, кінцевою швидкістю і т. п.

Розробкою та прикладним застосуванням математичного апарату для дослідження напружено-деформованого стану матеріалів та конструкцій займаються А. Б. Андрейків, В.А. Кривень, В. В. Маринець, М.С. Михайлинин, О. Ф. Обшта, В. Ф. Чекурін, Б. Г. Шелестовський та інші.

Моделі, що описують деформацію основних елементів мостових конструкцій: опора, балка, плита. Їх можна записати в так званій операторній формі:

$$\hat{A}u = q, \quad (1.3)$$

де  $\hat{A} = E \frac{d}{dx}$  – оператор, що описує деформацію опори,  $\hat{A} = EJ \frac{d^4}{dx^4}$  – оператор, що описує деформацію балки,  $\hat{A} = D \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$  – оператор, що описує деформацію ізотропної плити,  $\hat{A} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  – оператор, що описує деформацію ортотропної плити.

Права частина операторного рівняння (1.3)  $q$  – це функція залежності навантаження від координат. Константи  $E, J, D, D_{ij}$  (модуль пружності, момент інерції площі перерізу, циліндричні жорсткості) – це величини, які характеризують механічні властивості відповідної мостової конструкції. Невідома функція  $u = u(x), = u(x, y)$ , що залежить від координат точки, – це переміщення відповідного елемента конструкції. Ця функція на краях може дорівнювати нулю або задовольняти крайові умови в операторній формі:

$$\hat{K}_i u = h_i. \quad (1.4)$$

Вигляд операторів  $\hat{K}_i$  визначається способом закріплення та навантаження відповідного елемента конструкції моста.

Співвідношення (1.3) та (1.4) утворюють крайову задачу.

Методи розв'язання крайових задач можна умовно поділити на дві групи: чисельні й аналітичні. До аналітичних належить метод послідовних наближень. Він полягає у побудові послідовності операторів  $\hat{A}_n^{-1}$ , що точніше наближають оператор  $\hat{A}^{-1}$ . Власне кажучи, оператор  $\hat{A}^{-1}$  інтерпретується як межа деякої послідовності операторів, і ця послідовність будується в ході розв'язання задачі. Наближені рішення можна знайти за допомогою двох-трьох ітерацій. Розв'язок виглядає як аналітичний вираз, за яким можна розрахувати чисельні значення. Методи побудови розв'язку досить громіздкі й описані в працях [54, 54, 107] та [122]. Результат, однак, отримують у вигляді формули.

Проекційні методи розглядаються в працях [21, 41, 42]. Метод зв'язаних нев'язок – операторне рівняння (1.3).  $\hat{A}$  – лінійний оператор у  $H$ ,  $H$  – гільбертів простір,  $u$  і  $q$  – необхідне число раз диференційовні функції. Припустимо, що розв'язок задачі існує і він єдиний. Потрібно знайти наближений розв'язок  $\tilde{u}$ , такий, котрий можна було б визначити кінцевим набором чисел. Виберемо в  $H$  базис  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ . Тоді  $u$  можна записати у вигляді ряду Фур'є:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u^i e_i. \quad (1.5)$$

Визначимо наближений розв'язок  $\tilde{u}$  як відрізок ряду Фур'є:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n \tilde{u}^i e_i. \quad (1.6)$$

При заданому базисі набір чисел  $\{\tilde{u}^i\}$  однозначно визначає  $\tilde{u}$ . Розглянемо детальніше зв'язок між  $u$  і  $\tilde{u}$ . Оскільки за визначенням базису кожен елемент із  $H$  може бути записаний у вигляді ряду по базисних векторах, то і, навпаки, задання базису породжує векторний простір.

Нехай  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  – ортонормований базис простору  $H$ . У цьому базисі вектор  $u$  може бути представлений рядом Фур'є (1.5).

Якщо  $u$  – розв'язок рівняння (1.5), то нев'язка  $r$  дорівнює нулю:

$$r = \hat{A}u - q = 0. \quad (1.7)$$

Задаємо певний скінченно мірний підпростір  $H^n \subset H$  (вибираючи з нескінченної послідовності базисних векторів  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  кінцеве число елементів  $\{e_i\}_{i=1}^n$ ) і наближеним розв'язком  $\tilde{u}$  називаємо проекцію розв'язку  $u$  на підпростір  $H^n$ . Нев'язка  $r$  в цьому випадку уже відмінна від нуля і дорівнює:

$$r = \hat{A}u - q = \sum_{i=1}^n \tilde{u}^i \hat{A}e_i - \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^i \hat{A}e_i. \quad (1.8)$$

Послідовність  $\{\hat{A}e_i\}_{i=1}^{\infty}$  також утворює базис у  $H$ . З цієї причини останню рівність можна розглядати як розклад  $r$  в ряд Фур'є по базису  $\{\hat{A}e_i\}_{i=1}^{\infty}$ . Якби був відомий точний розв'язок  $u$ , то наближений можна було б шукати з умови мінімуму нев'язки, вибираючи той чи інший підпростір  $H^n$ . Однак  $u$  не відомо, і, вибравши навмання  $H^n$ , необхідно так підібрати коефіцієнти Фур'є  $\tilde{u}^i$ , щоб нев'язка була в якомусь змісті мінімальною. Найбільш розповсюджений прийом полягає в тім, щоб намагатися анулювати проекцію нев'язки на який-небудь  $n$  – мірний підп-

ростір  $G^n \subset H$ . Якщо  $P_n$  – оператор проектування на  $G^n$ , то коефіцієнти Фур’є наближеного розв’язку  $\tilde{u}^i$  можна знайти з умови:

$$P_n r = P_n (\hat{\lambda} \tilde{u} - q) = 0. \quad (1.9)$$

Нехай  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$  – якийсь інший базис у  $H$ , такий, що  $G^n$  є лінійною оболонкою системи  $n$  векторів  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ . Тоді в цьому новому базисі нев’язка може бути представлена своїм рядом Фур’є  $r = \sum_{j=1}^{\infty} r^j \varphi_j$ , і оскільки

$$(r \cdot \varphi_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.10)$$

то з умови (1.11) випливає, що  $r^j = 0$  для всіх  $j = 1, \dots, n$ . Нев’язка виявляється ортогональною підпростору  $G^n$ .

Наближення розв’язку  $u$  залежить від вибору підпросторів  $H^n$  і  $G^n$ , який є довільним, і часто диктується зручністю, простотою обчислень, наочністю і т. п.

Таким чином, для знаходження наближеного розв’язку  $\tilde{u}$  одержимо кінцеву ( $n$ -мірну) систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\hat{M} \bar{u} = \bar{q}, \quad (1.11)$$

де  $\bar{u} = \bar{u}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ , елементи матриці  $\hat{M}$ :

$$m_{ji} = \int_{\Omega} \varphi_j \hat{\lambda} e_i d\Omega, \quad (1.12)$$

а вектор  $\bar{q}$  складається з елементів:

$$q_j = \int_{\Omega} \varphi_j q d\Omega. \quad (1.13)$$

Координатні функції  $e_i$  і  $\varphi_j$  називають відповідно базисними і пробними функціями.

Залежно від вибору системи пробних функцій  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ , розрізняють ряд методів, об’єднаних загальною назвою проєкційні.

Якщо обидва підпростори  $H^n$  і  $G^n$  збігаються, то метод називається методом Гальоркіна.

Якщо другий підпростір вибрати за умови, що базисом у ньому будуть вектори  $\varphi_j = \hat{\lambda} e_j$ , то одержимо метод найменших квадратів, що називається ще спектральним.

І, нарешті, якщо пробними функціями вважати  $\delta$ -функції, що дозволяють точно задовольнити рівняння у скінченному наборі точок (вузлах), то матимемо метод колокацій, або ж псевдоспектральний.

Пробні функції можна інтерпретувати як ваги різних компонентів вектора не-в'язки. Відповідно проєкційні методи іноді називають методами зважених нев'язок.

Розглянемо більш загальну постановку задачі, а саме: запишемо крайові умови у вигляді

$$\hat{K} u = h, \quad \text{на границі } \Omega, \quad (1.14)$$

де  $h$  – функція, визначена на  $\partial\Omega$ , а  $K$  – лінійний оператор.

Розглянемо варіанти розв'язку:

Варіант 1. Задамо в  $H(\Omega)$  базис виду  $\psi, e_1, e_2, \dots$ . Функцію  $\psi$  вибираємо такою, щоб вона задовольняла граничну умову. Функції  $e_i$  приймають на границі нульові значення. Апроксимація розв'язку будується у вигляді:

$$\tilde{u} = \psi + \sum_{i=1}^n u^i e_i. \quad (1.15)$$

Підставляючи її у вихідне рівняння й анулюючи проєкцію нев'язки, одержимо систему лінійних рівнянь  $\hat{M} \cdot \tilde{u} = \bar{b}$ , де  $\hat{M}$  і  $u$  такі ж, як у попередньому випадку, а компоненти вектора  $b$  мають вигляд:

$$b_j = \int_{\Omega} \varphi_j (q - \hat{A} \phi) d\Omega. \quad (1.16)$$

Варіант 2. Полягає в тому, щоб не вводити додаткову функцію  $\psi$ , а, вибравши довільний базис  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ , шукати  $\tilde{u}_i$  такі, щоб наближення  $\tilde{u}$  апроксимувало розв'язок крайової задачі і крайові умови одночасно. Представимо розв'язок, як зазвичай, відрізком ряду по базисних функціях:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n u^i e_i, \quad (1.17)$$

а під нев'язкою будемо розуміти суму  $r = r_{\Omega} + r_{\partial\Omega}$

$$\begin{aligned} r_{\Omega} &= \hat{A} \tilde{u} - q && \text{на } \Omega \\ r_{\partial\Omega} &= \hat{K} \tilde{u} - h && \text{на } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.18)$$

Вибираючи в  $H$  систему пробних функцій  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ , коефіцієнти  $\tilde{u}_i$  шукаємо, намагаючись анулювати проєкцію нев'язки на підпростір  $G^n = \{\{\varphi_j\}_{j=1}^n\}$ , тобто для кожної функції  $\varphi_j$  шукаємо:

$$(r, \varphi_j) = (r_{\Omega}(\varphi_j)_{\Omega}) + (r_{\partial\Omega}(\varphi_j)_{\partial\Omega}) = 0. \quad (1.19)$$

До правої частини звичайного рівняння методу зважених нев'язок у нас додалася проекція нев'язки  $r_{\partial\Omega}$  на підпростір  $G^n(\partial\Omega)$  – результат апроксимації граничної умови. Зрозуміло, що в цьому випадку проекція  $r_{\Omega}$  не анулюється, а балансується проекцією  $r_{\partial\Omega}$ .

Метод скінченних елементів описаний у працях [99, 110] та [130, 131].

На сьогодні метод скінченних елементів досить поширений, що з математичної точки зору відповідає певному вибору базисних та пробних функцій.

Ідея методу полягає в тому, щоб не намагатися апроксимувати розв'язок одразу у всій області  $\Omega$ , а розбити її на ряди, що не перекриваються підобластями, елементами  $\Omega_p$ , таких, що  $\Omega = \bigcup \Omega_p$ , і будувати апроксимацію для кожної підобласті окремо.

Заданої точності ми можемо досягти й за допомогою малого числа базисних функцій за рахунок дроблення області визначення розв'язку. Застосування проекційного методу до лінійної крайової задачі дає:

$$(r, \varphi_j) = \int_{\Omega} \varphi_j (\hat{A}\tilde{u} - q) d\Omega = 0. \quad (1.20)$$

Маючи на увазі, що  $\Omega = \bigcup \Omega_p$  і вибираючи для кожної підобласті систему пробних функцій  $\{\varphi_j^p\}$ , одержуємо:

$$(r, \varphi_j^p) = \int_{\Omega} \varphi_j^p (\hat{A}\tilde{u} - q) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi_j^p \left( \hat{A} \sum_i \tilde{u}_p^i e_i^p - q \right) d\Omega = 0. \quad (1.21)$$

Функції  $\{e_i^p\}$  і  $\{\varphi_j^p\}$  називаються базисними і пробними функціями елемента чи локальними базисними і пробними функціями. Функції, визначені на  $\Omega_p$ , можна довизначати на всю область  $\Omega$ , як-от:

$$e_i = \begin{cases} e_i^p & \text{на } \Omega_p \\ 0 & \text{поза } \Omega_p \end{cases}, \quad \varphi_j = \begin{cases} \varphi_j^p & \text{на } \Omega_p \\ 0 & \text{поза } \Omega_p \end{cases}. \quad (1.22)$$

Ці нові функції є глобальними базисними й пробними функціями відповідно.

Слабка форма методу зважених нев'язок. Застосування методу скінченних елементів до лінійної крайової задачі дає систему лінійних рівнянь:

$$\sum_i \tilde{u}_p^i \left( \int_{\Omega_p} \varphi_j^p \hat{A} e_i^p d\Omega \right) = \int_{\Omega_p} \varphi_j^p q d\Omega, \quad p = 1, \dots, P. \quad (1.23)$$

Якщо оператор  $\hat{A}$  містить похідні порядку не вище  $s$ , то локальні базисні функції  $\{e_i^p\}$  повинні бути не менше  $s$  разів диференційованими. Це досить сильна вимога. Часто, однак, інтеграл:



$$\int_{\Omega_p} \varphi_j^p \hat{A} e_i^p d\Omega, \quad (1.24)$$

за допомогою теореми Гріна вдається звести до інтеграла:

$$\int_{\Omega_p} \hat{L} \varphi_j^p \hat{N} e_i^p d\Omega, \quad (1.25)$$

де  $\hat{L}$  і  $\hat{N}$  – лінійні диференціальні оператори більш низького порядку, ніж вихідний оператор  $\hat{A}$ . Вимоги гладкості, пропоновані до базисних функцій  $\{e_i^p\}$ , знижуються, щоправда, за рахунок підвищення гладкості пробних функцій  $\{\varphi_j^p\}$ . Така модифікація називається слабкою формою методу зважених нев'язок. При використанні методу Гальоркіна, коли  $\{\varphi_j^p\} = \{e_j^p\}$ , застосування слабкої форми виправдано, це тільки послаблює вимоги гладкості, що накладаються на базисні функції.

Учені та інженери, фахівці в галузі фізичних наук широко використовують останнім часом методи, засновані на наближеному розв'язку рівнянь, що описують фізичну задачу. Розклад невідомих функцій у ряди, зокрема в ряди Тейлора, - це один із перших наближених методів – метод скінченних різниць. Його також можна інтерпретувати як окремий випадок більш загального методу зважених нев'язок.

Метод скінченних елементів може ґрунтуватися як на варіаційних принципах, так і на більш загальних уявленнях методу зважених нев'язок. Суцільне середовище розбивається на окремі елементи, які можна розглядати як конкретні частини цілого. Саме цією наочністю метод привернув до себе увагу дослідників. Науково-технічна література з означеного методу досить обширна, причому розглядаються різні задачі: розрахунку конструкцій [130], потоку рідини [131] та інші.

Вищезгаданий метод інтенсивно почав розроблятися на початку 1960-х років, і саме в цей період з'явилися тисячі робіт із чисельних методів, ефективних підходів до розв'язку прикладних задач, дослідження основних фізико-математичних принципів. Методи, застосування яких розпочали ще тоді, коли не було обчислювальної техніки [132, 141], описували різні шляхи розв'язання рівнянь. До них належать методи Бубнова, колокацій, графічні прийоми розв'язку, матричні розклади й метод передатних матриць, комбінації різних прийомів і т. д. Вони продовжували розвиватись іноді під іншими назвами, подібними до методів скінченних елементів, Бубнова, кінцево-елементних смуг, окремих схем інтегрування за часом і т. д. Іншим напрямком наближеного аналізу був розвиток змішаних принципів, коли фізичні задачі можна виражати й вирішувати різними способами відповідно до вигляду використовуваних апроксимацій рівнянь. Використання змішаних методів розпочато в

працях [156, 157] у методі скінченних елементів. Застосування змішаних методів у будівельній механіці описані в праці [161].

Розвиток числових методів безпосередньо пов'язаний із появою обчислювальних машин, які могли вирішувати інженерні задачі, що вимагають збереження великого числового масиву й проведення значного обсягу обчислень. На якийсь час прогрес в обчислювальній техніці відвернув увагу учених від розвитку математичних методів і їхніх фізичних основ.

Окремий тип аналітичного методу не зв'язаний безпосередньо з наближеними методами – це метод інтегральних рівнянь, який використовувався головним чином у механіці рідини й задачах загальної теорії потенціалу, відомий як метод джерела, що характерно в цих задачах невідомі не є фізичними змінними. Розвиток цього методу описано в працях [139, 160] та [138, 150]. Зокрема, розвинуто згадані методи в працях радянських учених [144, 151, 154] і [159]. Раніше, у праці [142], був розвинутий метод, що застосовував інтегральні рівняння для розв'язку рівнянь типу рівняння Лапласа.

«Прямий» метод дослідження описаний у праці [144]. З точки зору інженера метод був уперше запропонований у праці [133]. Саме прямий метод найбільш прийнятний для інженерів і механіків, оскільки невідомі величини в ньому є фізичними змінними.

Порівняємо розглянуті підходи до розв'язку диференціальних рівнянь із крайовими умовами.

Безсумнівною перевагою різницевих методів є порівняна легкість одержання різницевих рівнянь, що особливо виявляється в багатомірних задачах. Проекційні методи при розв'язанні рівнянь вимагають обчислення інтегралів, і для цього іноді доводиться залучати чисельні процедури.

Проекційні методи (метод скінченних елементів) добре пристосовані для розв'язку рівнянь в областях довільної форми. Складність різницевих рівнянь сильно залежить від вигляду області й регулярності розташування вузлів.

Збіжність проекційних методів визначається апроксимуючими властивостями базисних функцій і може бути доведена для задачі в цілому. Для доведення збіжності різницевого розв'язку потрібно аналізувати апроксимуючі властивості і стійкість кожного окремого рівняння.

Урешті, слід сказати, що жоден із методів не має явної переваги. Вибір методу має визначатися розв'язуваною задачею і наявними ресурсами, хоча найчастіше найбільш важливими аргументами є особисті смаки обчислювача.

Метод скінченних елементів є одним із найбільш ефективних числових методів розв'язання крайових задач [84, 85]. На сьогодні побачи-

ли світ десятки тисяч публікацій та монографій провідних учених із МСЕ [5, 21, 99] та ін.

Питанням обґрунтування методу скінченних елементів присвячені праці [57, 49, 131].

У [86] запропоновано розрахувати матрицю жорсткості елемента конструкції, враховуючи змінність поперечного перерізу. Але елемент конструкції представлено одним скінченним елементом, що не завжди дає достатню точність результату.

Забезпечення довговічності мостових конструкцій є актуальною задачею мостобудування. При проектуванні сучасних мостобудівних конструкцій для розрахунку основних факторів їхнього функціонування: міцності, жорсткості, стійкості – використовуються як дані теоретичних розрахунків [4], так і результати відповідних експериментальних досліджень [50, 51, 121]. Вказані два підходи є взаємопов'язані, бо об'єм експериментальних робіт у значній мірі залежить від точності застосовуваних розрахункових методів. Тому розробка і впровадження в інженерну практику вдосконалених методів розрахунку елементів будівельних конструкцій (балки, плити, оболонки, мостові опори і т. ін.) є актуальною задачею. На сьогодні серед великої кількості відомих методів розрахунку найбільш точними є методи теорії пружності, описані в працях [116, 119, 134]. Але внаслідок того, що далеко не всі задачі теорії пружності й теорії оболонок мають точні замкнуті розв'язки, значну роль у розрахунковій практиці відіграють наближені методи, серед яких найбільш плідними є варіаційні, описані в науково-технічній літературі різними авторами [37, 88, 127] та [97, 98, 100], і методи функціонального аналізу, розглянуті в працях [21, 54, 55] та [119, 120]. Розвиток варіаційних методів, викладених у класичних працях Релея і Рітца, отримав своє застосування до задач розрахунку основних конструктивних елементів, що використовуються в будівельній галузі, завдяки роботам І. Г. Бубнова, В.З. Власова, Б.Г. Гальоркіна, Л.В. Канторовича, Л.С. Лейбензона, П.Ф. Папковича, С. П. Тимошенко та ін.

Найбільшого розповсюдження дістали на сьогоднішній день проекційні методи [31, 54, 55], прямі варіаційні методи [21, 62, 88], а також метод скінчених елементів [41, 99], що є логічним розширенням і вдосконаленням проекційних методів, які трактуються як проекція точного розв'язку з нескінченновимірного гільбертового простору на скінченновимірний підпростір (рис. 1.2).

Вказані методи дають можливість побудувати наближені розв'язки на основі вибору базисних та пробних функцій. На рисунку 1.2. умовно зображено точний розв'язок у нескінченновимірному просторі вектором  $u(x, y)$ , а проекції точного розв'язку на скінченновимірні підпростори  $B_1$  та  $B_2$  відповідно  $u_1(x, y)$  та  $u_2(x, y)$ .

Більш складним є питання оцінки точності отриманих результатів, чіткі практичні рекомендації відсутні. Для приблизної оцінки рекомендується виконати декілька розрахунків із поступовим зменшенням розмірів скінченних елементів (за аналогією з методом, запропонованим Тимошенко С.П., при розв'язуванні задач стійкості енергетичним методом).

Ми пропонуємо шлях удосконалення числових проекційних методів, що може бути сформульованим як вирівнювання й мінімізація  $|u_1(x,y) - u_2(x,y)|$  у всьому просторі розв'язку (рис. 1.3).

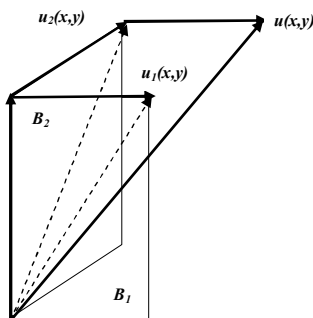


Рис. 1.2. Проекція точного розв'язку з нескінченно вимірною гільбертовою простору на скінченно вимірний підпростір.

У роботі [30] розглянуто математичну модель напруженого стану ортотропної мостової плити. Автори виходять із правильного припущення, що бетон і арматура, виготовлена зі сталі, є ізотропними матеріалами. Оскільки анізотропною в макроскопічному плані є сама конструкція, плита, необхідно саме в цьому аспекті дослідити математичну модель, диференціальне рівняння деформації ортотропної плити.

У наступних параграфах ми встановимо умови, що задають область допустимих значень механічних параметрів мостової плити, модуль пружності, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона, за яких математична модель ортотропної мостової плити дає розв'язок в області дійсних чисел, тобто є адекватною досліджуваному об'єкту.

До недоліків чисельних методів слід віднести те, що одержання чисельного розв'язку може виявитися надмірно дорогим, оскільки потребує коштовних програмних пакетів, а якщо ще й математична постановка завдання допускає більше одного розв'язку, важко визначити, чи відповідають результати розрахунку дійсності. Наближеність розв'язку є головним недоліком числових методів.

Для усунення впливу цього недоліку ми пропонуємо необхідність дублювання чисельних розрахунків, наприклад, із застосуванням різних базисних функцій. Нами буде розглянуто розв'язок та порівняння розв'язків диференціального рівняння опори та балки аналітичним і проєкційним методами в середовищі поліномів та тригонометричних функцій.

На основі огляду вищезгаданих наукових літературних джерел можна побачити, що на даний час переважають чисельні методи. Аналітичні розв'язки, що містять повну інформацію про досліджувану модель мостової конструкції, через свою громіздкість майже не розглядаються, тому далі ми отримаємо аналітичний розв'язок для мостової плити.

## **1.5. Висновки до розділу 1 та задачі досліджень**

На основі проведеного огляду наукових літературних джерел із дослідження проблем діагностики, методів розрахунку, оцінки й покращення механічних параметрів мостових конструкцій впливає, що теоретичні засади дослідження базуються на фізиці, механіці деформівного тіла, механіці руйнування будівельних конструкцій.

Теоретичною базою для проведення досліджень описаних вище проблем є представлення елементів мостових конструкцій відповідними математичними моделями і подальше їх дослідження числовими та аналітичними методами.

Аналіз проблем розрахунку, визначення та покращення механічних параметрів залізобетонних конструкцій мостів надав можливість дійти таких висновків:

1. Аналізуючи й узагальнюючи наукові літературні джерела з теоретичних та експериментальних досліджень динамічного коефіцієнта інтенсивності напружень та власних частот коливань елементів мостових конструкцій, ми встановили, що в одному випадку математична модель простіша, ніж модельований об'єкт (моделювання коефіцієнта інтенсивності напружень), а у випадку двох інших математичних моделей, що описують відповідно статичне та динамічне випробування, не до кінця використано співвідношення для обробки результатів натурального експеримента й визначення важливих механічних характеристик залізобетонної мостової плити. Відсутні й методики визначення важливих механічних характеристик, що пов'язані із залишковим ресурсом мостів.

2. До найпоширеніших методів відносяться з'єднання арматури за допомогою різьбової втулки. Цей спосіб має досить суттєві недоліки, а

саме: складність обробки кінців арматурних стержнів, створення додаткових концентраторів напружень внаслідок нарізання різьби, що в результаті негативно впливає на механічні характеристики конструкції та її ресурс.

3. Аналіз чисельних та аналітичних методів розрахунку мостових конструкцій, описаних у згаданій вище науковій літературі, свідчить, що перевага надається чисельним методам, причому в певній системі базисних функцій. Відсутні роботи з порівняння чисельних розв'язків у різних базисних функціях з аналітичними розв'язками, а також порівняння чисельних розв'язків у різних базисах. Таке порівняння може бути використано як критерій дискретизації представлення числового розв'язку.

4. Будівельні норми і правила для залізобетонних конструкцій рекомендують визначати ширину розкриття тріщини за емпіричною залежністю, що не є результатом всесторонніх глибоких теоретичних досліджень і вивчення всіх факторів, які виявляють вплив на ширину розкриття тріщини і напружено-деформований стан конструкційного елемента балкового типу з дефектом у вигляді тріщини.

5. За чисельного моделювання реальних мостових споруд результат залежить від рівня адекватності моделі реальному об'єкту, ступеня розбиття моделі на скінченні елементи, стійкості розв'язку відповідного диференціального рівняння за заданої кількості скінченних елементів.

6. Стосовно натурних динамічних та статичних випробувань слід відмітити важливість інформації, яку можна отримати з результатів натурних випробувань, оскільки А. С. Моргун встановлено зв'язок жорсткості з наявністю тріщин [89, 90], що, в свою чергу, пов'язано з ресурсом мостової споруди.

Аналізуючи й узагальнюючи викладений матеріал, можна стверджувати, що важливим питанням є покращення експлуатаційних, зокрема механічних, характеристик мостів та методів їх визначення.

Для цього потрібно розробити досконалішу технологію з'єднання арматурних стержнів.

Існує необхідність перегляду адекватності математичної моделі розрахунку коефіцієнта напружень досліджуваному об'єкту та її вдосконалення.

Важливо отримати й максимально використати співвідношення, що впливають із математичних моделей статичної й динамічної деформованого тіла, для непрямого вимірювання важливих механічних характеристик (ефективний модуль пружності, ефективна густина, ефективна товщина, ефективна циліндрична жорсткість тощо) мостової плити.

Стосовно чисельних методів дослідження і розрахунків параметрів елементів мостових конструкцій, то представлення розв'язку пара-

тельно у двох базисах важливо з точки зору надійності та обґрунтованого вибору ступеня дискретизації.

Незважаючи на значну кількість досліджень та публікацій із розглянутої тематики, методи розрахунку та покращення механічних параметрів залізобетонних конструкцій мостів недостатньо вивчені та впроваджені в практику.

Отже, аналіз науково-технічної літератури в п. 1.1-1.4 та вищезгадане надають можливість констатувати, що розробка методики розрахунку напружено-деформованого стану та визначення механічних параметрів залізобетонних конструкцій мостів є актуальною задачею.

Дана робота спрямована на аналітичне, числове та експериментальне дослідження, розробку методики розрахунку напружено-деформованого стану та покращення залізобетонних елементів мостових конструкцій.

На розв'язання вищезгаданих завдань спрямовано наступні розділи монографії.

## РОЗДІЛ 2 ВИЗНАЧЕННЯ ТА ПОКРАЩЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ МОСТІВ

### 2.1. Удосконалення методу визначення коефіцієнта інтенсивності напружень у балкових мостових конструкціях

У цьому параграфі вирішується задача, визначена в основних проблемах та висновках до першого розділу, тобто досліджується більш загальний випадок, що має місце в реальних конструкціях, коли тріщина знаходиться під кутом до поверхні.

Розглянемо зразок, що послаблений тріщиною, яка виходить на його поверхню під кутом (рис. 2.1).

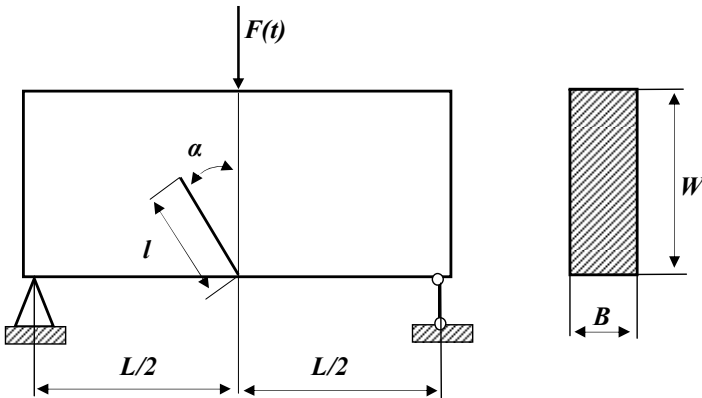


Рис. 2.1. Схема навантаження зразка.

Нехай на нерухомий до випробувань зразок із моменту часу  $t=0$  діє сила  $F(t)$  ( $F(0)=0$ ). Апроксимуємо функцію  $F(t)$   $N$  – ланковою ламаною кривою:

$$F(t) = \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1})(t_i - t_{i-1})H(t_i - t_{i-1}), \quad (2.1)$$



де  $a_i$  – кутові коефіцієнти ланок ( $a_0 = 0$ );  $t_i$  – абсиси точок злому ( $t_0 = 0$ );  $H(t)$  – функція Гевісайда.

За аналогією з роботами [3, 33] динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень можна представити у вигляді:

$$K_I(t) = \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) K_I^{(1)}(t - t_{i-1}), \quad K_{II}(t) = \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) K_{II}^{(1)}(t - t_{i-1}), \quad (2.2)$$

де  $K_I^{(1)}(t)$  і  $K_{II}^{(1)}(t)$  – ДКІН у зразку при дії одиничного навантаження  $F(t) = 1 \times t$ . Значення  $K_I^{(1)}(t)$  і  $K_{II}^{(1)}(t)$  знайдемо за допомогою методів модального аналізу. Частоти власних коливань  $\omega_i$  і відповідні їм переміщення зразка (власні вектори) визначаються з узагальненої задачі про власні значення [136, 147]:

$$[K] \bar{u} = \omega^2 [M] \bar{u} \quad (2.3)$$

і умов нормування:

$$u_i^T [M] u_j = \delta_{ij}, \quad (2.4)$$

де  $[K]$  і  $[M]$  – матриці жорсткості і мас [153];  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера; індекс «Т» означає транспонування [102]. Після нескладних перетворень [3, 33] співвідношення (2.2) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} K_I(t) &= K_{IS}^{(1)} P(t) - K_{IS}^{(1)} \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) H(t_i - t_{i-1}) \sum_{j=1}^n (\eta_j / \omega_j) \sin \omega_j (t_i - t_{i-1}) \\ K_{II}(t) &= K_{IIS}^{(1)} P(t) - K_{IIS}^{(1)} \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) H(t_i - t_{i-1}) \sum_{j=1}^n (\zeta_j / \omega_j) \sin \omega_j (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}, \quad (2.5)$$

де  $K_{IS}^{(1)}(t)$  і  $K_{IIS}^{(1)}(t)$  – статичний коефіцієнт інтенсивності напружень під час згину зразка одиничною силою (рис. 2.1);

$\eta_i = K_{II} u_{0i} / \omega_i^2 K_{IS}^{(1)}$ ;  $\zeta_i = K_{III} u_{0i} / \omega_i^2 K_{IIS}^{(1)}$ ;  $u_{0i}$  –  $i$ -товий компонент вектора переміщень точки прикладання сили,  $K_{II}$  і  $K_{III}$  – коефіцієнт інтенсивності напружень для зразка при  $i$ -й нормованій моді вільних коливань. Відповідно до праць [3, 33, 102] можна показати, що співвідношення:

$$\sum_{i=1}^n \eta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n \zeta_i = 1, \quad (2.6)$$

служить критерієм для вибору  $n$  у рівняннях (2.5). Формули (2.5) представляють ДКІН як суму двох складових – квазістатичної й інерційної поправки.

При розв'язуванні задачі на власні значення (2.3)-(2.4) використовувався метод скінченних елементів. При розбитті зразка на скінченні елементи використовувались восьмивузлові елементи.

Загальний вигляд розбиття зразка на скінченні елементи показано на рис. 2.2.

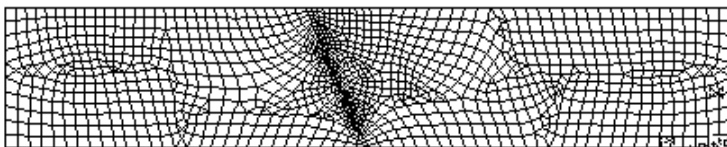


Рис. 2.2. Загальний вигляд розбиття зразка на елементи.

В околі вершини тріщини використовувались подібні до трикутних елементи, в яких вузли зміщені так, як показано на рис. 2.3.

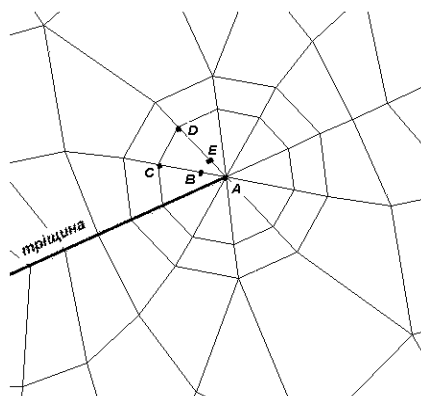


Рис. 2.3. Схема моделювання виродженими скінченними елементами біля вершини тріщини.

Згідно з роботою [153] можна записати формулу:

$$AB = AC/4; \quad AE = AD/4.$$

За такого моделювання скінченними елементами біля вершини тріщини динамічні коефіцієнти інтенсивності можна представити в такому вигляді (рис. 2.4).

$$\begin{aligned} K_I(t) &= \sqrt{\frac{2\pi}{c}} \frac{G}{(k+1)} \left[ 4(u'_A(t) - u'_D(t)) - (u'_B(t) - u'_C(t)) \right]; \\ K_{II}(t) &= \sqrt{\frac{2\pi}{c}} \frac{G}{(k+1)} \left[ 4(v'_A(t) - v'_D(t)) - (v'_B(t) - v'_C(t)) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ми розглядали два зразки. Перший – із матеріалу аралдит Б ( $E=3.38$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu=0.33$ ,  $\rho=1170$  кг/м<sup>3</sup>). Апроксимуючи експериментальні дані [129] ламаною кривою згідно з формулою (2.1), отримуємо такі коефіцієнти  $a_i$  і  $t_i$ :  $a_1=0$ ,  $a_2=7692307$ ,  $a_3=4444444$ ,  $a_4=-262500$ ,  $a_5=-6428572$ ,  $a_6=-1000000$ ,  $a_7=583333$ ,  $a_8=4000000$ ,  $a_9=6666661$ ,  $a_{10}=-5000005$ ,  $a_{11}=-7750001$ ,  $t_1=0$ ,  $t_2=1.3 \times 10^{-4}$ ,  $t_3=2.2 \times 10^{-4}$ ,  $t_4=3.8 \times 10^{-4}$ ,  $t_5=5.2 \times 10^{-4}$ ,  $t_6=6.0 \times 10^{-4}$ ,  $t_7=7.2 \times 10^{-4}$ ,  $t_8=9.4 \times 10^{-4}$ ,  $t_9=1.0 \times 10^{-3}$ ,  $t_{10}=1.08 \times 10^{-3}$ ,  $t_{11}=1.2 \times 10^{-3}$ . Другий зразок – сталевий ( $E=210$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu=0.3$ ,  $\rho=7850$  кг/м<sup>3</sup>). Для цього зразка маємо такі значення коефіцієнтів  $a_i$  і  $t_i$ :  $a_1=0$ ,  $a_2=1.5384616 \times 10^8$ ,  $a_3=1.5249999 \times 10^9$ ,  $a_4=2.3333335 \times 10^9$ ,  $a_5=1.0869565 \times 10^8$ ,  $a_6=2.375 \times 10^8$ ,  $a_7=-1.5263115 \times 10^8$ ,  $a_8=-1.1249999 \times 10^9$ ,  $a_9=-2.3061965 \times 10^8$ ,  $a_{10}=-875000$ ,  $t_1=0$ ,  $t_2=1.3 \times 10^{-5}$ ,  $t_3=3.3 \times 10^{-5}$ ,  $t_4=4.2 \times 10^{-5}$ ,  $t_5=6.5 \times 10^{-5}$ ,  $t_6=8.1 \times 10^{-5}$ ,  $t_7=1.19 \times 10^{-4}$ ,  $t_8=1.43 \times 10^{-4}$ ,  $t_9=2.6 \times 10^{-4}$ ,  $t_{11}=2.8 \times 10^{-4}$ .

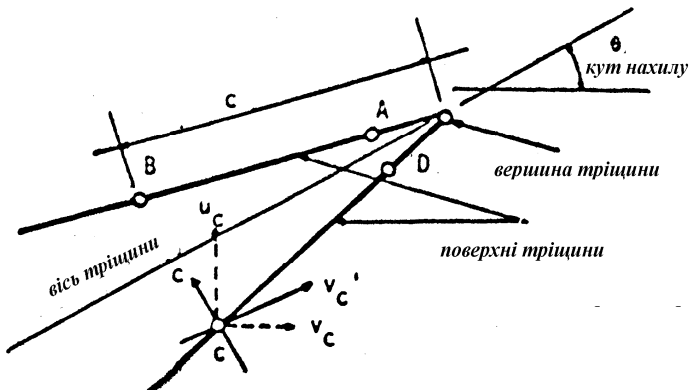


Рис. 2.4. Схема тріщини для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень по відомих переміщеннях.

Для цих зразків методом скінченних елементів обчислено залежність динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_I(t)$  і  $K_{II}(t)$  від часу. При цьому застосовувався метод Ньюмарка [136]. Для першого зразка крок за часом сягав  $\Delta t = 10^{-5}$  сек., а для другого –  $\Delta t = 10^{-6}$  сек.

На рисунках 2.5 і 2.6 показана графічна залежність  $K_I(t)$  і  $K_{II}(t)$  від часу.

На рисунках 2.5 і 2.6 крива 1 представляє залежність  $K_I(t)$  від часу при  $\alpha = 0^\circ$ , 2 – при  $\alpha = 15^\circ$ , 3 – при  $\alpha = 30^\circ$ , 4 –  $K_{II}(t)$  – при  $\alpha = 0^\circ$ . Як видно із представлених вище рисунків 2.5 і 2.6., при руйнуванні зразків домінуючу роль відіграє динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень нормального відриву  $K_I(t)$ . Тому в подальшому нами буде досліджуватися тільки  $K_I(t)$ .

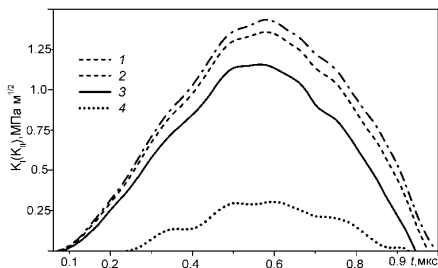


Рис. 2.5. Залежність динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень від часу для першого зразка.

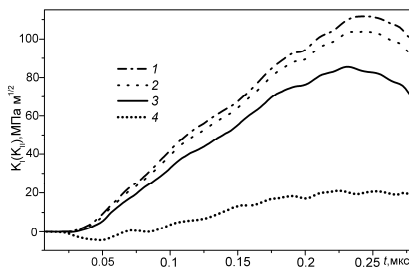


Рис. 2.6. Залежність динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень від часу для другого зразка.

При обчисленні статичного коефіцієнта інтенсивності напружень для зразка, який навантажується за схемою статичного одностовового згину, подібно як і в роботі [3], об'ємне навантаження замінюємо рівномірно розподіленим навантаженням по верхній і нижній поверхнях зразка. Після обробки результатів, які одержано за допомогою методу скінченних елементів, у відповідному діапазоні параметрів  $4 \leq \gamma \leq 6$ ;  $0,3 \leq \lambda \leq 0,7$ ;  $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$ ; ( $\gamma = L/W, \lambda = l/W$ ) з похибкою 1 % описується формулою (2.8).

Безрозмірні коефіцієнти  $\eta_i$  та власні частоти  $\omega_i^* = \omega_i W / \sqrt{E/\rho}$  ( $E$  – модуль пружності;  $\rho$  – густина матеріалу) не залежать від розмірів зразка. Однак вони залежать від відношення довжини зразка до його висоти, відносної глибини тріщини та коефіцієнта Пуассона  $\nu$  [102].

Для  $4 \leq \gamma \leq 6$ ,  $0,3 \leq \lambda \leq 0,7$ ,  $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$  та  $\nu = 0,3$  методом блоків Ланцоша [137] було чисельно знайдено кругові частоти власних коливань зразка і відповідні їм власні вектори. Проаналізувавши після цього величину  $\sum_{i=1}^N \eta_i$ , можна дійти висновку, що в цьому інтервалі геометричних параметрів для визначення ДКІН до-статньо обмежитися чотирма

модами вільних коливань. Відповідно обробивши числові результати за допомогою методу найменших квадратів, для  $\omega_i^*$  та  $\eta_i$  знайдено такі поліноміальні наближення:

$$K_{IS}^{(1)} = L\sqrt{l} \left\{ -0.5758 + 14.1614\lambda - 33.919\lambda^2 + 31.714\lambda^3 - \right. \\ \left. - (3.5718 - 3.0794\lambda)\lambda/\gamma - [0.4302 - 3.8093\lambda + 9.5093\lambda^2 - \right. \\ \left. - 8.2682\lambda^3 - \lambda(0.6833 - 2.1534\lambda)/\gamma] (2.4381\sqrt{\alpha} - 10.216\alpha) \right\} / (BW^2). \quad (2.8)$$

$$\omega_1 = -0,26 + 0,5048\lambda - 0,2450\lambda^2 + \frac{2,655 - 3,6153\gamma + 0,8518\lambda^2}{\gamma} + 0,0623\alpha\lambda \\ \omega_2 = 0,0421 + 0,1107\lambda - 0,329\lambda^2 + \frac{3,4431 - 2,4512\gamma + 1,4513\lambda^2}{\gamma} \\ \omega_3 = -0,2716 - 0,3369\lambda + 0,6425\lambda^2 + \frac{4,0624 + 2,281\gamma - 4,3066\lambda^2}{\gamma} + \alpha(0,1747\lambda - 0,0122\gamma), \quad (2.9) \\ \omega_4 = -0,3898 + 0,0756\lambda - 0,0593\lambda^2 + \frac{6,5669 - 1,3536\gamma + 1,0996\lambda^2}{\gamma} + 0,0089\alpha\lambda$$

$$\eta_1 = 0.7028 + 1.5368\lambda - 1.5326\lambda^2 - (0.1685 - 0.2236\lambda)\lambda\gamma - \\ - \alpha [0.0526 - 0.1977\lambda - 0.7551\lambda^2 + (0.0063 + 0.1081\lambda)\lambda\gamma]; \\ \eta_2 = 0.2827 - 1.2172\lambda + 1.0406\lambda^2 - (0.0443 - 0.2424\lambda + 0.2303\lambda^2)\gamma - \\ - \alpha [0.5024 - 1.9852\lambda + 2.1771\lambda^2 - (0.1025 - 0.4086\lambda + 0.4153\lambda^2)\gamma]; \\ \eta_3 = \alpha [-9.9973 + 41.867\sqrt{\lambda} - 47.966\lambda + 17.439\lambda^2 + (2.1994 - 9.1905\sqrt{\lambda} + 10.532\lambda - 3.8306\lambda \\ \eta_4 = 0.2281 - 0.645\lambda + 0.4622\lambda^2 - (0.0032 - 0.0018\lambda)\lambda\gamma + \\ + \alpha [0.0495 - 0.2712\lambda + 0.2555\lambda^2 - (0.007 - 0.0635\lambda + 0.0745\lambda^2)\gamma]. \quad (2.10)$$

У формулах (2.8) і (2.9)  $\alpha$  повинно братись у радіанах. У них відносна точність апроксимації  $\omega_i^*$  та  $\eta_i$  не перевищує 2 %. Для  $\eta_2$ ,  $\eta_3$ ,  $\eta_4$  абсолютна точність апроксимації не перевищує 0.004. Після цього було знайдено числові значення  $\omega_i^*$  та  $\eta_i$  для проміжку  $0,27 \leq \nu \leq 0,33$ . Виявилось, що для перших трьох мод значення  $\omega_i^*$  та  $\eta_i$  практично не змінюються. Для останньої моди характерна незначна зміна (не більше 0,003 у бік збільшення або зменшення, порівняно зі значеннями, виведеними за формулами (2.8) і (2.9)). Ураховуючи, що ця мода робить незначний внесок у значення ДКІН (це впливає зі структури формули (2.5) і того, що модулі  $\omega_4^*$  і  $\eta_4$  незначні, порівняно з цими ж величинами для перших трьох мод), можна зробити висновок, що в інтервалі

$0,27 \leq \nu \leq 0,33$  без суттєвої втрати точності можна користуватися формулами (2.8) і (2.9). Це підтверджено і на рис. 2.5 (1-ий зразок).

На рисунках 2.7 і 2.8 криві 1, 3, 5 відображають залежність  $K_I(t)$  від часу при різних значеннях кута  $\alpha$  (відповідно для  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ) для першого і другого зразків, яка побудована за допомогою співвідношень (2.8)-(2.9). Для перевірки вірогідності вищевказаних формул для цих же силових схем методом скінченного елемента було побудовано ті ж залежності. На рисунках 2.7 і 2.8 їм відповідають криві 2, 4, 6. Як бачимо, між цими результатами спостерігається досить добра кореляція.

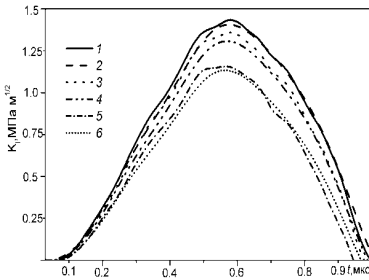


Рис. 2.7. Порівняння результатів обчислення  $K_I(t)$  для першого зразка за різних способів його обчислення

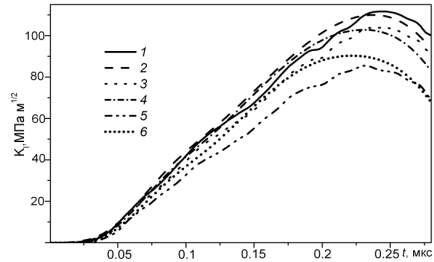


Рис. 2.8. Порівняння результатів обчислення  $K_I(t)$  для другого зразка за різних способів його обчислення

Отже, отримані формули (2.8) - (2.10) можна використати для К-тарування балкових зразків із тріщиною, яка не перпендикулярна до поверхні зразка.

При цьому силу  $F(t)$  можна визначати експериментально згідно з методикою або за допомогою наближеної формули [155].

## 2.2. Дослідження власних коливань залізобетонної плити, вільно опертої з чотирьох боків у відносних координатах

Нижче описано шлях розв'язку проблеми, сформульованої в основних аспектах та висновках до першого розділу, а саме: досліджено моделі механіки деформівного тіла, що описують власні коливання мостової плити, отримані співвідношення для подальшого використання при обробці результатів статичних та динамічних випробовувань моста.

На відміну від загальноприйнятого представлення диференціальних рівнянь деформації елементів мостових конструкцій в абсолютних ко-

ординатах [53], ми застосуємо відносні координати –  $\eta = \frac{x}{a}$ ,  $\xi = \frac{y}{b}$ , де  $a, b$  – довжина та ширина плити,  $x, y$  – розмірні змінні (координати точки на поверхні плити). Виведення диференціального рівняння мостової (тонкої) плити та його розв’язку у відносних координатах надає можливість ефективно використати сучасне програмне забезпечення та мову програмування. Зокрема є можливість візуалізувати й спостерігати анімаційне накладання коливних поверхонь мостових плит різних розмірів, коливання поверхні моста та поверхні його зменшеного макету.

Задачі про визначення частот і форм власних коливань тонких залізобетонних плит призводять до необхідності інтегрування диференціальних рівнянь у частинних похідних. Найбільш добре вивчені ті випадки, коли є можливим розділення змінних. До них належать, зокрема, коливання прямокутної тонкої залізобетонної плити, шарнірно опертої з протилежних боків. Якщо розділити змінні неможливо, то для розрахунку, в основному, використовують наближені й чисельні методи.

Розглянемо рівняння руху тонких залізобетонних плит постійної товщини. Розташуємо осі  $\eta$  й  $\xi$  у куті тонкої залізобетонної плити, вісь  $w$  направимо по нормалі до цієї площини. Диференціальне рівняння статичного прогину тонкої залізо-бетонної плити постійної товщини  $h$  за малих переміщень виглядає так:

$$D\nabla^2\nabla^2w = q(\eta, \xi), \quad (2.11)$$

де  $D$  – циліндрична жорсткість плити,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа,  $\nabla^2\nabla^2$  – бігармонічний оператор,

$$\nabla^2\nabla^2w = \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right), \quad (2.12)$$

де  $w$  – поперечна деформація плити,  $q$  – питоме навантаження,

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – циліндрична жорсткість.

Додаючи до зовнішнього навантаження інтенсивність сил інерції:

$$q_i = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.13)$$

де  $\rho$  – густина матеріалу, одержимо рівняння руху:

$$\nabla^2\nabla^2w + \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{D} q(\eta, \xi, t). \quad (2.14)$$

За вільних коливань навантаження  $q(\eta, \xi, t) = 0$ , і розв’язок рівняння (2.14) шукаємо у вигляді:

$$w(\eta, \xi, t) = w(\eta, \xi) \cos(\alpha t). \quad (2.15)$$

Підставляючи (2.15) в однорідне рівняння, що відповідає (2.14), одержимо для амплітудної функції  $w(\eta, \xi)$  рівняння в частинних похідних:

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \alpha^4 w = 0, \quad (2.16)$$

$$\text{де } \alpha^4 = \omega^2 \frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}.$$

Рівняння (2.16) може виглядати так:

$$(\nabla^2 - \alpha^2)(\nabla^2 + \alpha^2)w = 0,$$

звідки випливає, що розв'язком (2.16) є, зокрема, розв'язок більш простих рівнянь:

$$\begin{cases} (\nabla^2 - \alpha^2)w = 0 \\ (\nabla^2 + \alpha^2)w = 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

або

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \alpha^2 w = 0 \\ \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \alpha^2 w = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

Із незліченної множини розв'язків рівняння (2.16) повинні бути відібрані ті, що відповідають умовам закріплення країв тонких залізобетонних плит. Ці умови будуть такими ж, як і за статичного прогину.

Плита, шарнірно оперта з протилежних боків. Точний розв'язок задачі про визначення власних частот і форм коливань прямокутних тонких залізобетонних плит можна отримати, якщо дві протилежні сторони тонких залізобетонних плит мають шарнірну опору. При цьому закріплення двох інших сторін може бути довільним.

Нехай у прямокутної тонкої залізобетонної плити шарнірно оперті краї  $\eta = 0$  й  $\eta = 1$   $\xi = 0$  й  $\xi = 1$ .

Тоді вирази для амплітуди прогинів, що задовольняють умови шарнірного опираювання на цих краях, можна записати у вигляді:

$$w(\eta, \xi) = f(\xi) \sin(n\pi\eta), \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.20)$$

Підставляючи цей вираз у (2.18) і (2.19), отримуємо результат, де функція  $f(\xi)$  повинна задовольняти одному з двох рівнянь:

$$f''(\xi) - \alpha_1^2 f(\xi) = 0, \quad (2.21)$$



$$\text{де } \alpha_1^2 = (\alpha b)^2 + \left(\frac{b}{a} n\pi\right)^2,$$

або

$$f''(\xi) + \alpha_2^2 f(\xi) = 0, \quad (2.22)$$

$$\text{де } \alpha_2^2 = (\alpha b)^2 - \left(\frac{b}{a} n\pi\right)^2.$$

Розв'язками цих рівнянь є вирази  $ch(\alpha_1 \xi)$ ,  $sh(\alpha_1 \xi)$ ,  $\cos(\alpha_2 \xi)$ ,  $\sin(\alpha_2 \xi)$ .

Отже, загальний вираз для  $w(\eta, \xi)$  набуває вигляду:

$$w(\eta, \xi) = [C_1 ch(\alpha_1 \xi) + C_2 sh(\alpha_1 \xi) + C_3 \cos(\alpha_2 \xi) + C_4 \sin(\alpha_2 \xi)] \sin(n\pi\eta). \quad (2.23)$$

Ці вирази повинні задовольняти граничні умови за  $\eta = 0$ ,  $\eta = 1$ . Якщо ці краї тонкої залізобетонної плити також шарнірно оперті, то:

$$w(0, \xi) = w(1, \xi) = 0, \quad M_2(0, \xi) = M_2(1, \xi) = 0, \quad (2.24)$$

де

$$M_2 = -D \left( \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right). \quad (2.25)$$

Одержимо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_3 = 0; \quad \left[ \left( \frac{\alpha_1}{b} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \nu \right] C_1 - \left[ \left( \frac{\alpha_2}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \nu \right] C_3 = 0; \\ ch(\alpha_1) C_1 + sh(\alpha_1) C_2 + \cos(\alpha_2) C_3 + \sin(\alpha_2) C_4 = 0; \\ ch(\alpha_1) \left[ \left( \frac{\alpha_1}{b} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \nu \right] C_1 + sh(\alpha_1) \left[ \left( \frac{\alpha_1}{b} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \nu \right] C_2 - \\ - \cos(\alpha_2) \left[ \left( \frac{\alpha_2}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \nu \right] C_3 - \sin(\alpha_2) \left[ \left( \frac{\alpha_2}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \nu \right] C_4 = 0. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Система має розв'язок, якщо головний визначник дорівнює нулю, тобто якщо:

$$4\alpha^4 sh \left( \sqrt{(\alpha b)^2 + \left( \frac{b}{a} n\pi \right)^2} \right) \sin \left( \sqrt{(\alpha b)^2 - \left( \frac{b}{a} n\pi \right)^2} \right) = 0, \quad (2.27)$$

або

$$\sin \left( \sqrt{(\alpha b)^2 - \left( \frac{b}{a} n\pi \right)^2} \right) = 0. \quad (2.28)$$

Останнє рівняння має розв'язок за  $\sqrt{(\alpha b)^2 - \left( \frac{b}{a} n\pi \right)^2} = m\pi$ .

Тобто  $\alpha^2 = \pi^2 \left[ \left( \frac{n}{a} \right)^2 + \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right]$ . Тоді власні частоти тонкої залізобетонної плити, шарнір-но опертої з усіх боків:

$$\omega_{n,m} = \pi^2 \left[ \left( \frac{n}{a} \right)^2 + \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}. \quad (2.29)$$

Нижча частота:

$$\omega_{1,1} = \pi^2 \frac{a^2 + b^2}{(ab)^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}. \quad (2.30)$$

Форма коливань задається виразом:

$$w(\eta, \xi) = C_4 \sin(\alpha_2 \xi) \sin(n\pi\eta) \quad (2.31)$$

Отже, співвідношення (2.30) пов'язує власну частоту коливань, геометричні параметри, механічні параметри плити та густину матеріалу. Алгоритм розв'язку, описаний вище, застосуємо для того, щоб отримати подібне до (2.30) співвідношення для мостової плити, вільно опертої з двох протилежних боків та вільної з двох інших.

У наступних параграфах ми отримуємо співвідношення, необхідні для розробки методу розрахунку значення модуля пружності та ефективної товщини мостової плити за результатами натурних випробувань.

### 2.3. Дослідження власних коливань залізобетонної мостової плити, вільно опертої з двох протилежних боків та вільної з двох інших у відносних координатах

Розглянемо випадок, коли дві сторони плити вільно оперті, а інші дві – вільні. Відповідні крайові умови набувають більш загального вигляду:

$$M_2(\eta, 0) = M_2(\eta, 1) = 0; \quad V_2(\eta, 0) = V_2(\eta, 1) = 0, \quad (2.32)$$

де

$$M_2 = -D \left( \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right); \quad V_2 = -D \left( \frac{1}{b^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2-\nu) \frac{1}{a^2 b} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right). \quad (2.33)$$

Співвідношення (2.32) призводять до системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_{11}C_1 + A_{13}C_3 = 0; & A_{22}C_2 + A_{24}C_4 = 0; \\ A_{11}ch(\alpha_1)C_1 + A_{11}sh(\alpha_1)C_2 + A_{13} \cos(\alpha_2)C_3 + A_{13} \sin(\alpha_2)C_4 = 0; \\ A_{22}sh(\alpha_1)C_1 + A_{22}ch(\alpha_1)C_2 - A_{24} \sin(\alpha_2)C_3 + A_{24} \cos(\alpha_2)C_4 = 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

де

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \left(\frac{\alpha_1}{b}\right)^2 - \nu \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2; & A_{12} &= A_{14} = 0; & A_{13} &= \left(\frac{\alpha_2}{b}\right)^2 - \nu \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2; & A_{21} &= A_{23} = 0; \\
 A_{22} &= \left(\frac{\alpha_1}{b}\right)^3 - (2-\nu) \frac{\alpha_1}{b} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2; & A_{24} &= -\left(\frac{\alpha_2}{b}\right)^3 - (2-\nu) \frac{\alpha_2}{b} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Система (2.34) має розв'язок, якщо визначник:

$$\begin{aligned}
 |A| &= [(A_{13}A_{22})^2 - (A_{11}A_{24})^2] sh \left[ \sqrt{(\alpha b)^2 + \left(\frac{b}{a}n\pi\right)^2} \right] \sin \left[ \sqrt{(\alpha b)^2 - \left(\frac{b}{a}n\pi\right)^2} \right] + \\
 &+ 2A_{11}A_{13}A_{22}A_{24} \left[ 1 - ch \left[ \sqrt{(\alpha b)^2 + \left(\frac{b}{a}n\pi\right)^2} \right] \cos \left[ \sqrt{(\alpha b)^2 - \left(\frac{b}{a}n\pi\right)^2} \right] \right] = 0.
 \end{aligned}$$

рівний нулю. Із визначника отримаємо функцію  $F(\alpha)$ :

$$\begin{aligned}
 F(\alpha) &= th \left[ \sqrt{(\alpha b)^2 + \left(\frac{b}{a}n\pi\right)^2} \right] \sin \left[ \sqrt{(\alpha b)^2 - \left(\frac{b}{a}n\pi\right)^2} \right] + \\
 &+ \left[ \frac{2A_{11}A_{13}A_{22}A_{24}}{[(A_{13}A_{22})^2 - (A_{11}A_{24})^2]} \right] \left[ \frac{1}{ch \left[ \sqrt{(\alpha b)^2 + \left(\frac{b}{a}n\pi\right)^2} \right]} - \cos \left[ \sqrt{(\alpha b)^2 - \left(\frac{b}{a}n\pi\right)^2} \right] \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Визначення власної частоти коливань мостової плити. Співвідношення (2.36) утворює частотне рівняння, корені якого дають власні частоти коливань плити  $f$ :

$$f = \frac{\alpha_i^2}{4\pi} h \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}}, \tag{2.37}$$

де  $\alpha_i$  – корені рівняння (2.36).

Отже, розглянувши модель мостової плити, вільно опертої з двох протилежних боків та вільної з двох інших, ми отримали співвідношення (2.37), що пов'язує модуль пружності, ефективну товщину мостової плити, ефективну густину конструкції з результатом динамічного випробування, власною частотою коливань мостової плити [81]. У наступних параграфах пов'яжемо модуль пружності та ефективну товщину з результатами статичних випробувань, прогином мостової плити і навантаженням.

## 2.4. Покращення з'єднання арматури періодичного профілю у залізобетонних конструкціях мостів

У цьому параграфі вирішується завдання, визначене в основних проблемах та висновках до першого розділу, а саме: запропоновано й досліджено втулкове з'єднання арматури, що має вищу надійність та довговічність [105].

В основу даного методу покладено з'єднання кінців арматури сталевую втулкою, що обтискається на гідравлічному пресі спеціальними профільними пуансонами (рис. 2.9.).

Такими з'єднаннями зрошують арматуру періодичного профілю, міцність якого адекватна міцності арматури. Кінці прутів не вимагають спеціальної обробки, а втулки виготовляють із відповідного сортаменту сталевих труб, які виробляють вітчизняні трубопрокатні підприємства. Для виконання даного з'єднання сконструйовано портативний гідравлічний прес, що надає можливість зрошувати арматуру безпосередньо на будівельному майданчику. Конструктивну схему преса ілюструє рис. 2.10. Зважаючи на технологічні особливості силової головки преса, відстань між паралельними прутами арматури в конструкції повинна сягати не менш ніж 100 мм.

З'єднують арматуру за цим методом так: кінці арматури вставляють у втулку, щоб лінія стику знаходилася приблизно посередині системи «втулка – стержень», яку фіксують у спеціальній опорі, дно якої має виступи і впадини, що відповідають оберненому періодичному профілю арматури. Це необхідно для збігу виступів і впадин на профільних пуансонах (верхньому й нижньому) з відповідними впадинами і виступами арматури. Після цього починається обтискування втулки.

Виступи на профільних пуансонах потрапляють на впадини, а впадини – на виступи арматури. Матеріал втулки під дією пластичної деформації заповнює міжреберний проміжок профілю арматури, створюючи надійне зчеплення і не викликаючи при цьому значних контактних напружень на поверхні ребер. Сила обтиску втулки має бути в межах від 600 до 750 кН, залежно від діаметра арматури.

Для перевірки надійності втулкового з'єднання в лабораторії досліджень фізико-механічних властивостей конструкційних матеріалів ФМІ проведено порівняльні випробування на розтяг під короткочасним та циклічним навантаженнями двох типів втулкових з'єднань арматури.

У першому випадку з'єднувальна втулка обтиснута пуансоном із гладкою напівциліндричною внутрішньою поверхнею, а в другому – профільним пуансоном. У першому випадку сила обтиску втулки – 900 кН, а в другому – 700 кН. Для виготовлення з'єднань використані зразки

арматурної сталі Ш 14 мм класу А 800 довжиною 320 мм, вирізані з одного прутика. Як втулки, використовували патрубки безшовних холоднотягнутих і холоднокатаних труб зі сталі 20.

Зразок руйнувався по арматурі на деякій відстані від втулки, на відміну від зразків, обтиснутих гладким пуансоном, які досить часто руйнувалися всередині втулки або на межі «втулка – стержень», де, імовірно, виникають найбільші контактні напруження.

На основі теорії ймовірності, математичної теорії пружності й пластичності побудовано розрахункові моделі та розв'язано задачі ймовірності утворення дефектів та міцності з'єднання арматури обтиснутими гільзами, з допомогою яких можна визначити оптимальні навантаження пресування, попередньо зміцнювати матеріал з'єднань пресуванням, прогнозувати короточасну та довготривалу міцність таких стержнів під статичними, температурними та циклічними навантаженнями в робочих середовищах.

Із застосуванням отриманих експериментальних і теоретичних результатів на Львівському заводі залізобетонних виробів № 2, Мукачівському заводі «Будіндустрія» і Стрийському заводі металевих та залізобетонних конструкцій розроблено зразки залізобетонних конструкцій, армованих з'єднаною арматурою (балки, призми), натурні експериментальні плити перекриття, центрифуговані опори ліній електропередач.

На основі виконаних теоретичних та експериментальних досліджень втулкових з'єднань арматури у балках, колонах, плитах було розроблено низку нормативних документів, зокрема ТУ У В.26.6-00018112-257:2006 «З'єднання стрижнів арматурних обтисненням гільзами», технічні умови введені в дію 2006-11-28 [38]; СОУ 45.2 -10018112 - 016: 2007 «З'єднання арматурних стержнів обтискними втулками»: МР В.2.3-218-03534506-510:2006; методичні рекомендації «З'єднання арматурних стержнів обтискними втулками» [69].

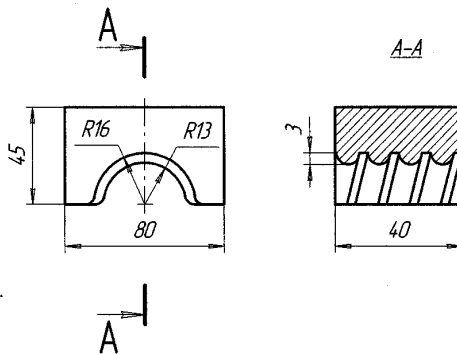


Рис.2.9. Загальний вигляд профільного пуансона.

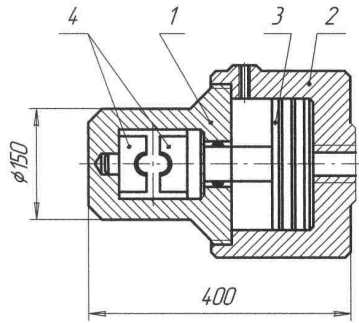


Рис.2.10. Конструктивна схема силової головки гідравлічного пресу:  
1 – корпус; 2 – циліндр; 3 – поршень; 4 – профільні пуансони.

На рис. 2.11. наведено типове армування плити проїжджої частини мосту. Армування аркового монолітного шляхопроводу на ділянці автомобільної дороги Чернівці – Герца (КПП) наведено на рис. 2.12.

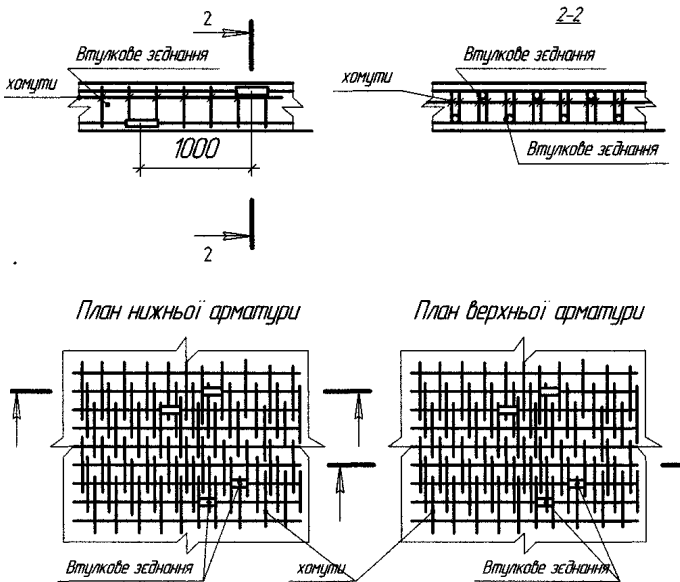
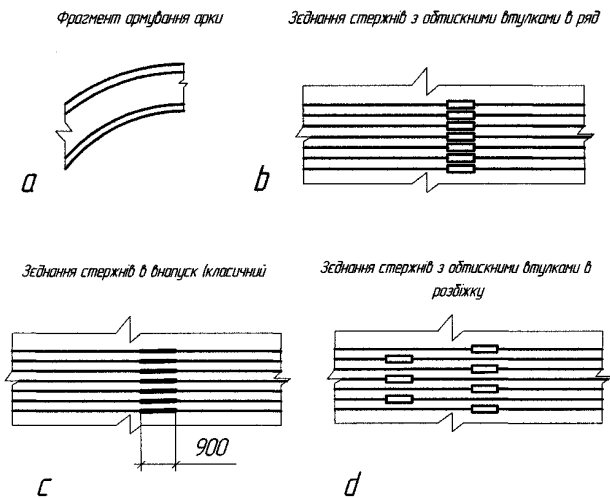


Рис. 2.11. Армування плити проїжджої частини мосту стержнями, що з'єднані за допомогою обтискнутої втулки: а – поздовжній розріз плити, б – поперечний розріз плити.



*Рис. 2.12. Армування арки частини мосту стержнями: а – фрагмент арки; б – армування традиційне внапуск; с – з'єднання арматури за допомогою втулок у ряд; д – з'єднання арматури за допомогою втулок врозбіг.*

Отже, у результаті аналізу вищенаведених праць запропоновано армування несучих конструкцій мостових споруд. Зокрема, приклади армування конструкцій мостових переходів показано на рис. 2.11. На рисунках 2.11 та 2.12 вказано відповідно: видно втулкові з'єднання, хомути, план нижньої арматури, план верхньої арматури, фрагмент армування арки, класичне з'єднання стержнів у напуск, з'єднання стержнів обтискними втулками у ряд та врозбіг. На втулкеве з'єднання отримано патент [103].

## 2.5. Висновки до розділу 2

На основі проведених теоретичних і експериментальних досліджень можна сформулювати наступні висновки:

1. Під час руйнування зразків вирішальне значення має ДКІН нормального відриву. Власні частоти не залежать від абсолютних розмірів зразка, а залежать від відношення довжини зразка до його висоти, відносної глибини тріщини та коефіцієнта Пуассона. Отримані формули

(2.8) та (2.10) можна використати для К-тарування балкових зразків із тріщиною, що не є перпендикулярною до поверхні зразка.

2. За всіх типів динамічних розрахунків першочерговим є визначення власних частот коливань елементів мостових конструкцій. Співвідношення (2.29), (2.36) та (2.37) можна використати для розрахунку власних частот коливання залізобетонної мостової плити, вільно опертої із чотирьох боків, а також вільно опертої із протилежних боків та вільної з інших двох.

3. Встановлено, що втулкеве з'єднання арматури, отримане шляхом обтискування профільним пуансоном, дає надійніше зчеплення за статичного розтягу та має значно вищу довговічність під втомним циклічним навантаженням.

4. Запропоноване втулкеве з'єднання запатентовано [74] і використано при армуванні конструкцій мостових переходів, шляхопроводів, набивного стовпа на мостах.

5. Для розрахунку напружено-деформованого стану та визначення механічних параметрів залізобетонних конструкцій мостів потрібно розглянути, розвинути і вдосконалити числові та аналітичні методи моделювання елементів мостових конструкцій, отримати співвідношення, що пов'язують результати статичного та динамічного випробування з інтегральними механічними параметрами елементів конструкцій мостів.



## **РОЗДІЛ 3**

# **ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЙ МОСТІВ АНАЛІТИЧНИМИ ТА ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ**

У цьому розділі розглядаються відомі задачі механіки деформівного тіла, а саме, досліджуються напружено-деформовані стани мостової опори та балки аналітичними та числовими методами. Вирішується одна з науково-технічних задач – дублювання розв’язку у двох різних базисах. Пропонується використовувати нев’язку отриманих розв’язків для визначення кількості скінченних елементів на які треба розбивати конструктивний елемент при визначенні його напружено-деформованого стану числовими методами.

Аналіз математичного апарату розрахунку напружено-деформованого стану застосуємо до опори. Для розрахунку напружено-деформованого стану опори та балки застосуємо метод Гальоркіна та широкоживаний інженерами метод скінченних елементів.

Опора та балка як конструктивні елементи моста зручні тим, що їхні математичні моделі допускають як аналітичні, так і числові методи розв’язку. Це надає нам можливість порівняти не тільки числові методи у двох різних базисах, а порівняти їх із повністю адекватним моделі аналітичним розв’язком.

Головне завдання дослідження – це виявити, за яких умов навантаження та крайових умов отримані у двох різних базисах розв’язки близькі й за яких умов вони різняться.

### **3.1. Визначення напружено-деформованого стану трьохелементної мостової опори методом скінченних елементів**

Оскільки помилки в оцінці характеристик міцності й деформативності конструкцій, відхилення від проектних рішень під час будівництва та порушення умов експлуатації може призвести до аварійного стану, поставимо за мету розв’язання комплексної науково-технічної проблеми на прикладі моделювання деформації мостової опори.

На даний час задачі обчислювального характеру з використанням персональних комп'ютерів (ПК) можна вирішувати на трьох основних рівнях: 1) у середовищі вибраної системи програмування; 2) на основі спеціальних обчислювальних процедур і програм; 3) за допомоги спеціальних пакетів програм. Серед засобів третього рівня особливо слід виділити інтегрований багатofункціональний пакет MathCAD фірми MathSoft Inc.

Реалізацію МСЕ виконаємо із застосуванням пакету MathCAD [2, 35].

У роботі [86] описано процес розрахунку деформації розтягнутого (стиснутого) одного скінченного елемента у формі стержня, але відсутній приклад розрахунку конструкції з кількох скінчених елементів. У свою чергу, у праці [23] дано опис загальної методики застосування МСЕ стосовно конструкції, розбитої на велику кількість скінчених елементів, але автором розглянуто побудову матриці жорсткості тільки для одного окремого елемента.

Застосуємо матрицю жорсткості, описану в [86], і загальну методику, розвинуту в [23], до конкретної математичної задачі – моделювання деформації мостової опори під дією зовнішнього силового навантаження зосередженою силою  $P$ , що складається з трьох скінчених елементів (рис. 3.1).

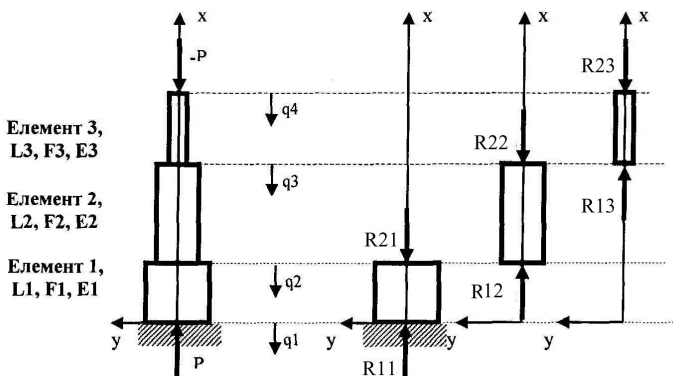


Рис. 3.1. Модель мостової трьохелементної опори.

Почнемо з коректної постановки задачі й побудуємо для неї математичну модель МСЕ.

Із розрахункової схеми на рис. 3.1 бачимо, що діючі на систему сили направлені вздовж опори, а напруження й деформації розподілені по площі опори рівномірно.

Нами застосовано функціонали теорії пружності [1], які є ефективним засобом якісного аналізу варіаційних і диференціальних формулювань і теоретичною основою для побудови прямих варіаційних і варіаційно-різницевих методів, які отримують усе більшого розвитку і застосування завдяки зростаючим можливостям обчислювальної техніки. Використаємо варіаційно-різницеву схему, яка будується на основі загальної ідеї розчленування складної технічної системи на елементи, що природним чином спрямовує до поняття скінченного елемента. Розчленування, зазвичай, супроводжується механічним трактуванням, що виражено у виборі так званої основної системи (для якої додаткові умови виконано) і невідомих (розшуковуються за допомогою часткового функціонала).

Функціонал повної потенціальної енергії опори виглядає так [115]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EF \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L p(x)u(x)dx, \quad (3.1)$$

де  $u(x)$  – зміщення, направлене вздовж осі абсцис;  $\frac{du}{dx} = \varepsilon_x$  – деформація,

відносне видовження (стиск);  $E \frac{du}{dx} = \sigma_x$  – нормальне напруження, що рівномірно розподілене по перерізу площею  $F$  мостової опори;  $p(x)$  – функція, яка описує інтенсивність зовнішніх сил, діючих вздовж опори;  $L$  – довжина відповідного скінченного елемента;  $E$  – модуль пружності матеріалу континуума, що займає скінченний елемент.

Оскільки у функціонал виду (3.1) входять тільки перші похідні переміщень, то їх можна апроксимувати поліномами першого ступеня:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (3.2)$$

Кожен  $i$ -й елемент має два ступені вільності –  $q_i$  та  $q_{i+1}$ . Знайдемо зв'язок між коефіцієнтами полінома (3.2) та ступенями вільності.

Використавши загальну методику, описану в працях [23, 43], для кожного зі скінченних елементів, визначаємо коефіцієнти полінома (3.2), координатні функції та функцію переміщень через ступені вільності й координатні функції. У результаті виконання відповідних процедур одержуємо:

скінченний елемент 1 –

коефіцієнти полінома: 
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ -\frac{q_1}{L_1} + \frac{q_2}{L_1} \end{pmatrix},$$

координатні функції:  $f_{11} = 1 - \frac{x}{L_1}, f_{12} = \frac{x}{L_1},$

функція переміщень першого скінченного елемента  
 $u_1(x, q_1, q_2) = q_1 f_{11} + q_2 f_{12}$ ;

скінченний елемент 2 –

коефіцієнти полінома: 
$$\begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 1 & L_1 + L_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1 + L_2}{L_2} q_2 - \frac{L_1}{L_2} q_3 \\ -\frac{q_2}{L_2} + \frac{q_3}{L_2} \end{pmatrix},$$

координатні функції:  $f_{21} = \frac{L_1 + L_2}{L_2} - \frac{x}{L_2}$ ,  $f_{22} = -\frac{L_1}{L_2} + \frac{x}{L_2}$ , функція переміщень другого скінченного елемента:

$$u_2(x, q_2, q_3) = q_2 f_{21} + q_3 f_{22},$$

скінченний елемент 3 –

коефіцієнти полінома:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_1 + L_2 \\ 1 & L_1 + L_2 + L_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3} q_3 - \frac{L_1 + L_2}{L_3} q_4 \\ -\frac{q_3}{L_3} + \frac{q_4}{L_3} \end{pmatrix},$$

координатні функції:  $f_{31} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3} - \frac{x}{L_3}$ ,  $f_{32} = -\frac{L_1 + L_2}{L_3} + \frac{x}{L_3}$ , функція переміщень третього скінченного елемента:

$$u_3(x, q_3, q_4) = q_3 f_{31} + q_4 f_{32}.$$

Матрицю коефіцієнтів жорсткості визначимо за формулою, наведеною в робо-ті [5]:

$$k_{ij} = F \int_0^L \sigma_i(x) \epsilon_j(x) dx = \int_0^L EF \left( \frac{du}{dx} \right)_i \left( \frac{du}{dx} \right)_j dx, \quad (i = 1, 2; j = 1, 2).$$

У результаті для розглядуваних скінченних елементів одержуємо:

скінченний елемент 1 –

$$\begin{aligned} [K_{11}]^e &= E_1 F_1 \begin{bmatrix} \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,1,0)}{dx} \frac{du_1(x,1,0)}{dx} dx & \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,1,0)}{dx} \frac{du_1(x,0,1)}{dx} dx \\ \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,0,1)}{dx} \frac{du_1(x,1,0)}{dx} dx & \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,0,1)}{dx} \frac{du_1(x,0,1)}{dx} dx \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} E_1 F_1 & -\frac{1}{L_1} E_1 F_1 \\ -\frac{1}{L_1} E_1 F_1 & \frac{1}{L_1} E_1 F_1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

скінченний елемент 2 –

$$[K_{22}]^e = E_2 F_2 \left[ \begin{array}{cc} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{d u_2(x,1,0)}{d x} \frac{d u_2(x,1,0)}{d x} dx & \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{d u_2(x,1,0)}{d x} \frac{d u_2(x,0,1)}{d x} dx \\ \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{d u_2(x,0,1)}{d x} \frac{d u_2(x,1,0)}{d x} dx & \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{d u_2(x,0,1)}{d x} \frac{d u_2(x,0,1)}{d x} dx \end{array} \right] =$$

$$= \left[ \begin{array}{cc} \left( \frac{L_1 + L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 & \left( -\frac{L_1 + L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 \\ \left( -\frac{L_1 + L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 & \left( \frac{L_1 + L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 \end{array} \right];$$

скінченний елемент 3 –

$$[K_{33}]^e = E_3 F_3 \left[ \begin{array}{cc} \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{d u_3(x,1,0)}{d x} \frac{d u_3(x,1,0)}{d x} dx & \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{d u_3(x,1,0)}{d x} \frac{d u_3(x,0,1)}{d x} dx \\ \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{d u_3(x,0,1)}{d x} \frac{d u_3(x,1,0)}{d x} dx & \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{d u_3(x,0,1)}{d x} \frac{d u_3(x,0,1)}{d x} dx \end{array} \right] =$$

$$= \left[ \begin{array}{cc} \left( \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3^2} - \frac{L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 & \left( -\frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3^2} + \frac{L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 \\ \left( -\frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3^2} + \frac{L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 & \left( \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3^2} - \frac{L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 \end{array} \right].$$

Незв'язна глобальна матриця згідно із залежностями, поданими у роботі [18], матиме вигляд

$$[K]^e = \begin{bmatrix} [K_{11}]^e & [0] & [0] \\ [0] & [K_{22}]^e & [0] \\ [0] & [0] & [K_{33}]^e \end{bmatrix},$$

де  $[K_{11}]^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ ,  $[K_{22}]^e = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$ ,  $[K_{33}]^e = \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$ , а  $k_j$  – коефіцієнти

жорсткості скінченних елементів у глобальній нумерації  $i = \overline{1,6}$ ;  $j = \overline{1,6}$ .

Глобальна кінематична матриця  $[A]$  трьохелементної опори моста і глобальна матриця жорсткості  $[K]$  на основі формул із монографії [23] будуть

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [K] = [A]^T [K]^e [A],$$

звідки отримуємо

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 F_1}{L_1} & -\frac{E_1 F_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 F_1}{L_1} & \frac{E_1 F_1}{L_1} + \frac{E_2 F_2}{L_2} & -\frac{E_2 F_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2 F_2}{L_2} & \frac{E_2 F_2}{L_2} + \frac{E_3 F_3}{L_3} & -\frac{E_3 F_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 F_3}{L_3} & \frac{E_3 F_3}{L_3} \end{bmatrix}.$$

Глобальне рівняння жорсткості для опори моста, що пов'язує зовнішні сили та лінійні переміщення вузлів, на основі [23], запишеться так

$$\{P\} = [K]\{q\}. \quad (3.3)$$

Згрупувавши за ступенями вільності, що відповідають закріпленим зв'язкам (у даному випадку це один зв'язок опори з фундаментом  $q_1$ ), розбивши його на блоки, перепишемо рівняння (3.3) так

$$\begin{Bmatrix} P_s \\ P_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sf} \\ K_{fs} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_s \\ q_f \end{Bmatrix}.$$

Оскільки  $q_s = q_1 = 0$ , то

$$\{P_f\} = [K_{ff}]\{q_f\}, \quad \{P_s\} = [K_{sf}]\{q_f\}, \quad (3.4)$$

де

$$[K_{ff}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} E_1 F + \frac{1}{L_2} E_2 F_2 & -\frac{1}{L_2} E_2 F_2 & 0 \\ -\frac{1}{L_2} E_2 F_2 & \frac{1}{L_2} E_2 F_2 + \frac{L_1 + L_3}{L_3^2} E_3 F_3 & -\frac{L_1 + L_3}{L_3^2} E_3 F_3 \\ 0 & \frac{L_1 + L_3}{L_3^2} E_3 F_3 & \frac{L_1 + L_3}{L_3^2} E_3 F_3 \end{bmatrix}; \quad [K_{sf}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} E_1 F_1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\{q_f\} = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}; \quad \{P_f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}.$$

Загальний розв'язок рівняння (3.4) у символічній формі має вид

$$\{q_f\} = [K_{ff}]^{-1} \{P_f\}. \quad (3.5)$$

Реакція опори і реакції скінченних елементів опори моста на основі залежностей (3.4), (3.5) визначається з рівнянь:

$$\{P_s\} = [K_{sf}]\{q_f\}; \quad (3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}; \quad (3.7)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{13} \\ R_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}.$$

Ефективність розробленої методики проілюструємо на чисельному прикладі розрахунку трьохелементної мостової опори, який було реалізовано в системі MathCAD 2001 Professional згідно з отриманими залежностями (3.4)-(3.7) (Додаток А).

Отже, ми отримали алгоритм розв'язування задачі напружено-деформованого стану опори методом СЕ.

У наступних дослідженнях, для підвищення надійності результатів, застосуємо отриману вище процедуру розв'язку для побудови числових та аналітичних методів і алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану з метою дублювання розв'язків у двох різних базисах, це дозволить обґрунтовано визначати необхідні ступені дискретизації моделі конструктивного елемента моста.

### 3.2. Визначення напружено-деформованого стану мостової опори зі змінним перерізом методом скінченного елемента

Застосуємо отриманий у п. 3.1. алгоритм для побудови матриці жорсткості опори складнішого профілю.

Завданням дослідження є отримати матрицю жорсткості, функцію переміщення та нормального напруження для мостової опори в обох згаданих випадках.

Предметом дослідження є механіко-математичні моделі деформацій та напружень у перерізі опори.

Розглянемо мостову опору у формі зрізаного конуса. Осьовим перерізом є трапеція. Нижня основа конуса має площу  $F_1$ , а верхня –  $F_2$ . Висота конуса –  $H$ , рис. 3.2. Знайдемо функціональну залежність площі перерізу  $F(x)$  зрізаного конуса від його висоти  $x$  над основою  $F_1$ .

З рис. 3.2 маємо:

$$\frac{R_1 - R_2}{H} = \frac{R_1 - R_x}{x}. \quad (3.8)$$

Далі одержимо:

$$\frac{R_x}{R_1} = 1 - \frac{1 - \frac{R_2}{R_1}}{H} x \quad \text{або} \quad \sqrt{\frac{F(x)}{F_1}} = 1 - \frac{1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}}}{H} x. \quad (3.9)$$

Отже, функціональна залежність площі перерізу  $F(x)$  зрізаного конуса від його висоти  $x$  над основою  $F_1$ :

$$F(x) = F_1 \left( 1 - \frac{1 - \sqrt{F_2/F_1}}{H} x \right)^2 \quad (3.10)$$

Для подальших міркувань важливим є саме функція  $F(x)$ . Кожній формі опори відповідає певна функція залежності площі перерізу від  $x$ .

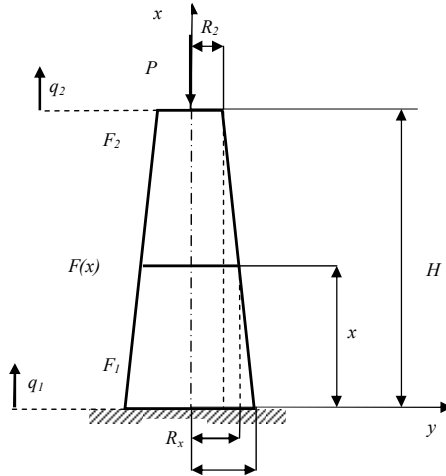


Рис. 3.2. Мостова опора, зрізаний конус, нижня основа конуса має площу  $F_1$  верхня –  $F_2$ , висота конуса –  $H$ , площа перерізу –  $F(x)$ , висота перерізу  $x$  над основою  $F_1$ , ступені свободи  $q_1, q_2$ , сила, що діє на опорі  $P$ .

Розглянемо опору як скінченний елемент зі ступенями свободи  $q_1, q_2$  та переміщенням, спрямованим уздовж осі  $x$  – сів:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (3.11)$$

Знаходимо  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  з умов на кінцях опори:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & H \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Переміщення виражені через ступені свободи:

$$u(x, q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & H \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \left( 1 - \frac{x}{H} \right) q_1 + \frac{x}{H} q_2, \quad (3.13)$$

$$\text{де } 1 - \frac{x}{H} = f_1 \text{ та } \frac{x}{H} = f_2 - \text{координатні функції.} \quad (3.14)$$

Матриця жорсткості опори:



$$K = E \begin{bmatrix} \int_0^H F(x) \frac{du(x,1,0)}{dx} \frac{du(x,1,0)}{dx} & \int_0^H F(x) \frac{du(x,1,0)}{dx} \frac{du(x,0,1)}{dx} \\ \int_0^H F(x) \frac{du(x,0,1)}{dx} \frac{du(x,1,0)}{dx} & \int_0^H F(x) \frac{du(x,0,1)}{dx} \frac{du(x,0,1)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Елементи матриці жорсткості:

$$\begin{aligned} K_{11} &= E \left[ \frac{1}{3} \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \frac{F_2}{H \left( \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right)} - \frac{1}{3} \frac{F_1}{H \left( \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right)} \right]; \\ K_{12} &= E \left[ -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \frac{F_2}{H \left( \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right)} + \frac{1}{3} \frac{F_1}{H \left( \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right)} \right]; \\ K_{21} &= E \left[ -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \frac{F_2}{H \left( \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right)} + \frac{1}{3} \frac{F_1}{H \left( \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right)} \right]; \\ K_{22} &= E \left[ \frac{1}{3} \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \frac{F_2}{H \left( \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right)} - \frac{1}{3} \frac{F_1}{H \left( \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right)} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Згрупуємо ступені свободи, що відповідають закріпленим зв'язкам (у даному випадку це один зв'язок опори з фундаментом  $q_1$ ), рівняння жорсткості розіб'ємо на блоки:

$$\begin{pmatrix} P_s \\ P_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sf} \\ K_{fs} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_s \\ q_f \end{pmatrix}; \quad (3.17)$$

$$(P_f) = [K_{ff}] (q_f); \quad (P_s) = [K_{sf}] (q_f). \quad (3.18)$$

Оскільки  $q_s = q_1 = 0$ , то розв'язок системи (3.17):

$$q = K_{ff}^{-1} P_f, \quad P_s = K_{fs} q_2, \quad (3.19)$$

$$\text{де } [K_{ff}] = K_{22}, \quad [K_{sf}] = K_{12}, \quad P_f = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

У додатку Б наведено програму розрахунку мостової опори у формі зрізаного конуса, що представлена одним скінченним елементом.

Отже, досліджуючи напружено-деформований стан опори довільного перерізу, ми отримали основне співвідношення МСЕ – матрицю жорсткості.

У наступному параграфі застосуємо отриману вище матрицю жорсткості й розглянемо напружено-деформований стан опори у вигляді  $N$  скінченних елементів та порівняємо з попереднім результатом.

### 3.3. Визначення напружено-деформованого стану мостової опори зі змінним перерізом методом $N$ скінченних елементів

Розіб'ємо мостову опору (рис. 3.2) на  $N$  скінченних елементів, зрізаних конусів висоти  $H/N$ . Переміщення, виражені через ступені свободи цих елементів, дорівнюватимуть:

$$u(x, q_n, q_{n+1}) = (1 \quad x) \begin{bmatrix} 1 & \frac{H}{N} \cdot (n-1) \\ 1 & \frac{H}{N} \cdot n \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_n \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n - \frac{x}{H} \\ \frac{x}{N} \end{pmatrix} q_n + \begin{pmatrix} 1 + \frac{x}{H} - n \\ \frac{x}{N} \end{pmatrix} q_{n+1} \quad (3.21)$$

де  $n$  – порядковий номер скінченного елемента, якщо рахувати знизу, рис. 3.2,

$$n - \frac{x}{H} = f_n \quad \text{та} \quad 1 + \frac{x}{H} - n = f_{n+1} \quad - \text{координатні функції.} \quad (3.22)$$

$$\text{Врахуємо, що} \quad \frac{du(x, q_n, q_{n+1})}{dx} = -\frac{1}{H/N} q_n + \frac{1}{H/N} q_{n+1}. \quad (3.23)$$

Одержимо матрицю жорсткості  $n$ -го скінченного елемента опори:

$$Kn = E \begin{bmatrix} \int_{H(n-1)}^{Hn} F(x) \frac{du(x,1,0)}{dx} \frac{du(x,1,0)}{dx} & \int_{H(n-1)}^{Hn} F(x) \frac{du(x,1,0)}{dx} \frac{du(x,0,1)}{dx} \\ \int_{H(n-1)}^{Hn} F(x) \frac{du(x,0,1)}{dx} \frac{du(x,1,0)}{dx} & \int_{H(n-1)}^{Hn} F(x) \frac{du(x,0,1)}{dx} \frac{du(x,0,1)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Kn_{11} & Kn_{12} \\ Kn_{21} & Kn_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Елементи матриці жорсткості  $n$ -го скінченного елемента:

$$Kn_{11} = \left[ N - (2n-1) \left( 1 - \sqrt{F_2/F_1} \right) + \frac{3(n-1)n+1}{3} \frac{\left( 1 - \sqrt{F_2/F_1} \right)^2}{N} \right] F_1 \frac{E}{H}; \quad (3.25)$$

$$Kn_{12} = - \left[ N - (2n-1)(1 - \sqrt{F_2/F_1}) + \frac{3(n-1)n+1}{3} \frac{(1 - \sqrt{F_2/F_1})^2}{N} \right] F_1 \frac{E}{H}; \quad (3.26)$$

$$Kn_{21} = - \left[ N - (2n-1)(1 - \sqrt{F_2/F_1}) + \frac{3(n-1)n+1}{3} \frac{(1 - \sqrt{F_2/F_1})^2}{N} \right] F_1 \frac{E}{H}; \quad (3.27)$$

$$Kn_{22} = \left[ N - (2n-1)(1 - \sqrt{F_2/F_1}) + \frac{3(n-1)n+1}{3} \frac{(1 - \sqrt{F_2/F_1})^2}{N} \right] F_1 \frac{E}{H}. \quad (3.28)$$

Глобальна незв'язна матриця жорсткості складається з  $2N$  рядків та  $2N$  стовпчиків:

$$Ke = \begin{bmatrix} K1_{11} & K1_{12} & - & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ K1_{21} & K1_{22} & - & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & Kn_{11} & Kn_{12} & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & Kn_{21} & Kn_{22} & - & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 & - & KN_{11} & KN_{12} \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 & - & KN_{21} & KN_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Глобальна кінематична матриця складається з  $2N$  рядків та  $N+I$  стовпчиків:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Глобальна зв'язна матриця жорсткості квадратна складається з  $N+I$  рядків та  $N+I$  стовпчиків, знаходимо її за формулою:

Для знаходження переміщення ступенів свободи  $q_i$ , реакції опори  $P_s$ , скористаємось співвідношеннями (3.17) – (3.20), врахувавши, що  $q_s = q_l = 0$  і

$$Kh = A^T Ke A, \quad Kh = \begin{bmatrix} K1_{11} & K1_{12} & 0 & 0 \\ K1_{21} & K1_{22} + Kn_{11} & Kn_{12} & 0 \\ 0 & Kn_{21} & Kn_{22} + KN_{11} & Kn_{12} \\ 0 & 0 & KN_{21} & KN_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$[K_{ff}] = \begin{bmatrix} K1_{22} + Kn_{11} & Kn_{12} & 0 \\ Kn_{21} & Kn_{22} + KN_{11} & Kn_{12} \\ 0 & KN_{21} & KN_{22} \end{bmatrix}; \quad (3.32)$$

$$[K_{sf}] = [K1_{12} \quad 0 \quad 0]; \{P_f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}.$$

На рис. 3.3 представлено графіки лінійного переміщення –  $u(x)$  (1 – метод одного скінченного елемента; 2 – метод  $N$  скінченних елементів,  $N = 5$ ; 3 – аналітичний метод) та нормального напруження –  $\sigma(x)$  (1 – метод одного скінченного елемента; 2 – метод  $N$  скінченних елементів,  $N = 5$ ; 3 – аналітичний метод).

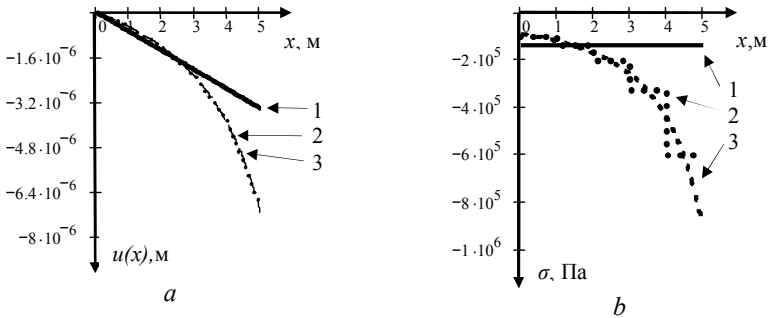


Рис. 3.3. Графіки: а – лінійного переміщення –  $u(x)$ ,  
 б – нормального напруження –  $\sigma(x)$ .

Вихідні дані до розрахунків на графіках рис. 3.1: навантаження  $P = 46$  т, площі перерізу та висота  $F_1 = 5 \text{ м}^2$ ,  $F_2 = 0,5 \text{ м}^2$ ,  $H = 5$  м (рис. 3.2), модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

У додатку Б наведено програму розрахунку мостової опори у формі зрізаного конуса методом  $N$  скінченних елементів у формі зрізаних конусів у системі MathCAD 2001 Professional.

Отже, ми отримали алгоритм та програму розрахунку напружено-деформованого стану опори методом скінченних елементів. Надалі застосуємо цей алгоритм для дублювання розв'язків в базах, що належать різним класам функцій. Дублювання розв'язків підвищить їх надійність, а нев'язка отриманих розв'язків слугуватиме мірою їх точності.

### 3.4. Визначення напружено-деформованого стану мостової опори аналітичним та числовими методами за різних базисних та пробних функцій

У цьому параграфі розглянемо задачу порівняння результатів розрахунку напружено-деформованого стану опори. Skorистаємось тим, що для математичної моделі опори існує аналітичний розв'язок відповідного диференціального рівняння. Саме з цим розв'язком, як найбільш адекватним щодо математичної моделі опори, порівняємо числові розв'язки.

Розглянемо мостову опору у формі зрізаного конуса, осьовим перерізом якого є трапеція (рис. 3.2). Нижня й верхня основи конуса еліпсоїдної форми мають площі відповідно  $F_1$  і  $F_2$ ; висота конуса дорівнює  $H$ . Припустимо, що на мостову опору по її осі діє зосереджена сила  $P$ , прикладена до верхньої основи. Вказана конструкція – проміжна мостова опора (бик), яку роблять або ступінчатою, або з похилими гранями за ступінчатого фундаменту, наближається до бруса, що дорівнює опору, розрахунок якого наведено в роботах [112, 118]. Сформуємо задачу щодо визначення напружено-деформованого стану мостових конструкцій шляхом формулювання відповідної математичної моделі на основі диференціальних рівнянь деформації опори та розвитку підходу до їх розв'язання. Розвинемо аналітичні та чисельні методи розв'язку граничної задачі про деформацію мостової опори, порівняємо отримані результати та зробимо оцінку достовірності застосовуваних чисельних схем.

**Виклад основного матеріалу досліджень.** Об'єктом дослідження є мостова опора у формі зрізаного конуса. Диференціальне рівняння деформації опори має вигляд [112, 118, 120]

$$\sigma(x) = E \varepsilon(x), \quad (3.33)$$

де  $E$  – модуль пружності,  $\varepsilon(x)$  – відносна лінійна деформація,  $\sigma(x)$  – напруження, що виникає в перерізі мостової опори з координатою  $x$  і визначається залежністю:

$$\sigma(x) = P / F(x). \quad (3.34)$$

У виразі (3.34)  $F(x)$  – площа перерізу на рівні  $x$  від мостової опори. Оскільки в конструкції виникає неоднорідний напружений стан, то деформація в довільному січенні визначається залежністю:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}, \quad (3.35)$$

де  $u(x)$  – позовжне зміщення осьової лінії мостової опори в розглядуваній точці з координатою  $x$ .

Для подальших розрахунків застосуємо функцію площі перерізу  $F(x)$  (3.10). Використовуючи вирази (3.34), (3.35) та підставивши значення  $F(x)$  з виразу (3.10) у рівняння (3.33), матимемо:

$$E \frac{du}{dx} = \frac{P}{F_1} \frac{1}{\left[1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1\right) \frac{x}{H}\right]^2}. \quad (3.36)$$

Увівши нову безрозмірну змінну  $\eta = x/H$  ( $0 \leq \eta \leq 1$ ), перепишемо рівняння (3.36) таким чином:

$$\frac{E}{H} \frac{du}{d\eta} = \frac{P}{F_1} \frac{1}{\left[1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1\right) \eta\right]^2}. \quad (3.37)$$

Інтегрування отриманого диференціального рівняння (3.37) дає:

$$u(\eta) = \frac{H}{E} \int_0^\eta \frac{P}{F_1} \frac{1}{\left[1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1\right) \eta_0\right]^2} d\eta_0. \quad (3.38)$$

Обчисливши інтеграл у правій частині залежності (3.38), одержимо:

$$u(\eta) = \frac{PH}{EF_1 \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1\right)} \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1\right) \eta}\right]. \quad (3.39)$$

На основі залежностей (3.33) і (3.39) запишемо аналітичні вирази для визначення переміщення точок мостової опори  $u(x)$  та напруження  $\sigma(x)$  в перерізі з координатою  $x$ :

$$u(x) = \frac{PH}{EF_1 \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1\right)} \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1\right) \frac{x}{H}}\right]; \quad (3.40)$$

$$\sigma(x) = \frac{P}{F_1} \frac{1}{\left[1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1\right) \cdot \frac{x}{H}\right]^2}. \quad (3.41)$$

Із метою оцінки точності числового проєкційного методу розв'язування диференціального рівняння деформації мостової опори

(3.37), використаємо прямий варіаційний метод Гальоркіна на базі поліноміальних і тригонометричних функцій. Розрахункову схему розглядуваної конструкції відповідно до застосовуваного числового методу подано на рис. 3.4.

Таким чином, трактуємо мостову опору як скінченний елемент із чотирма вузлами  $H_1, H_2, H_3, H_4$ .

Розв'язок рівняння (3.37) шукаємо у вигляді полінома:

$$u(\eta) = c_1 + c_2\eta + c_3\eta^2 + c_4\eta^3 + c_5\eta^4, \quad (3.42)$$

причому вимагатимемо виконання граничної умови  $u(0) = 0$ , а також умов у вузлових точках  $H_1, H_2, H_3, H_4$  опори:

$$u(1/4) = H_1; \quad u(1/2) = H_2; \quad u(3/4) = H_3; \quad u(1) = H_4, \quad (3.43)$$

в умовах (3.43)  $H_1, H_2, H_3, H_4$  тут і далі вагові коефіцієнти для базисних функцій.

Константи  $c_i$  ( $i=1,2,3,4,5$ ) у виразі для переміщення (3.42) знайдемо з розв'язку системи алгебраїчних рівнянь, сформованої на основі виконання граничної умови про відсутність переміщення основи опори та групи умов у вузлах (3.43). У результаті маємо систему рівнянь вигляду:

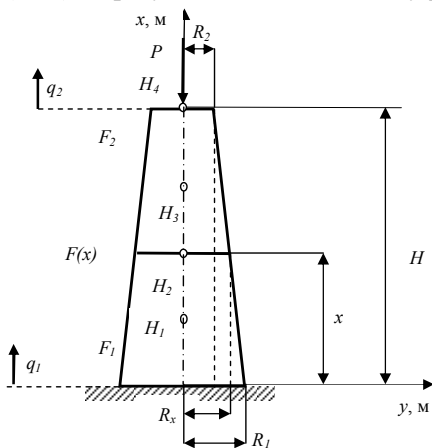


Рис. 3.4. Мостова опора – зрізаний конус із вузлами  $H_1, H_2, H_3, H_4$ .

$$\begin{cases} c_1 = 0, \quad \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{16}c_3 + \frac{1}{48}c_4 + \frac{1}{256}c_5 = H_1; \quad \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_3 + \frac{1}{8}c_4 + \frac{1}{16}c_5 = H_2; \\ \frac{3}{4}c_2 + \frac{9}{16}c_3 + \frac{27}{64}c_4 + \frac{81}{256}c_5 = H_3; \quad c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = H_4, \end{cases}$$

розв'язок якої наступний:

$$\begin{aligned}
c_1 = 0; \quad c_2 = 16H_1 - 12H_2 + \frac{16}{3}H_3 - H_4; \quad c_3 = -\frac{208}{3}H_1 + 76H_2 - \frac{112}{3}H_3 + \frac{22}{3}H_4; \\
c_4 = 96H_1 - 128H_2 + \frac{224}{3}H_3 - 16H_4; \quad c_5 = -\frac{128}{3}H_1 + 64H_2 - \frac{128}{3}H_3 + \frac{32}{3}H_4.
\end{aligned}
\tag{3.44}$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти  $c_i$  ( $i=1,2,3,4,5$ ) (3.44) у формулу (3.42) та групуючи отриманий вираз щодо вагових коефіцієнтів  $H_j$  ( $j=1,2,3,4$ ), одержуємо:

$$\begin{aligned}
u(\eta) = & \left( 16\eta - \frac{208}{3}\eta^2 + 96\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4 \right) H_1 + \left( -12\eta + 76\eta^2 - 128\eta^3 + 64\eta^4 \right) H_2 + \\
& + \left( \frac{16}{3}\eta - \frac{112}{3}\eta^2 + \frac{224}{3}\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4 \right) H_3 + \left( -\eta + \frac{22}{3}\eta^2 - 16\eta^3 + \frac{32}{3}\eta^4 \right) H_4.
\end{aligned}
\tag{3.45}$$

Маючи вираз (3.45), можна записати поліноміальні базисні функції методу Гальборкіна:

$$\begin{aligned}
e_1(\eta) = 16\eta - \frac{208}{3}\eta^2 + 96\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4; \quad e_2(\eta) = -12\eta + 76\eta^2 - 128\eta^3 + 64\eta^4; \\
e_3(\eta) = \frac{16}{3}\eta - \frac{112}{3}\eta^2 + \frac{224}{3}\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4; \quad e_4(\eta) = -\eta + \frac{22}{3}\eta^2 - 16\eta^3 + \frac{32}{3}\eta^4.
\end{aligned}
\tag{3.46}$$

Чисельні розрахунки виконано за таких вихідних даних:

$$H = 5 \text{ м}, \quad E = 1,764 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad F_1 = 5 \text{ м}^2, \quad F_2 = 0,5 \text{ м}^2, \quad P = 2 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

Процедура застосування методу Гальборкіна, вважаючи при цьому, що базисні (3.46) і пробні функції співпадають, є такою: знаходимо відповідну матрицю  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ji} = \frac{E}{H} \int_0^1 e_j(\eta) \frac{d e_i(\eta)}{d \eta} d\eta; \\
\Lambda = \begin{pmatrix} -1,551 \times 10^{-6} & 3,902 \times 10^9 & -1,892 \times 10^9 & 7,095 \times 10^8 \\ -3,902 \times 10^9 & -2,871 \times 10^{-5} & 3,902 \times 10^9 & -1,485 \times 10^9 \\ 1,892 \times 10^9 & -3,902 \times 10^9 & -2,607 \times 10^{-5} & 2,720 \times 10^9 \\ -7,095 \times 10 & 1,485 \times 10^9 & -2,720 \times 10^9 & 1,746 \times 10^9 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.47}$$

визначаємо вектор  $\vec{b}$ :

$$b_j = \int_0^1 e_j(\eta) \sigma(\eta) d\eta; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -25,822 \cdot 10^4 \\ -20,105 \cdot 10^4 \\ -70,137 \cdot 10^4 \\ -26,429 \cdot 10^4 \end{pmatrix},
\tag{3.48}$$

$$\text{на основі (3.48) з виразу } \Lambda_j H_i = b_j \tag{3.49}$$



та значень (3.47) отримаємо вагові коефіцієнти:

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \vec{b} = \begin{pmatrix} -2,933 \cdot 10^{-5} \\ -8,388 \cdot 10^{-5} \\ -1,707 \cdot 10^{-4} \\ -3,578 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Підставляючи знайдені значення (3.50) у (3.45), отримуємо наближений розв'язок диференціального рівняння деформації опори:

$$\begin{aligned} u(\eta) = & -(16\eta - 208\eta^2/3 + 96\eta^3 - 128\eta^4/3)2,933 \cdot 10^{-5} - (-12\eta + 76\eta^2 - 128\eta^3 + 64\eta^4)8,388 \\ & - (16\eta/3 - 112\eta^2/3 + 224\eta^3/3 - 128\eta^4/3)1,707 \cdot 10^{-4} - (-\eta + 22\eta^2/3 - 16\eta^3 + 32\eta^4/3)3,578 \cdot (3.51) \\ = & -1,525 \cdot 10^{-5} \eta - 5,860 \cdot 10^{-4} \eta^2 + 8,906 \cdot 10^{-4} \eta^3 - 6,435 \cdot 10^{-4} \eta^4. \end{aligned}$$

Використавши проекційний метод шляхом розкладу на чотири базисні тригонометричні функції, розв'язок рівняння (3.37) подамо у вигляді:

$$u(\eta) = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + c_3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + c_4 \cos(\pi\eta) + c_5 \sin(\pi\eta). \quad (3.52)$$

Функція  $u(\eta)$  (3.52) має задовольняти умову  $u(0) = 0$ , а також умови (3.43) у вузлових точках. У результаті одержимо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_4 = 0; c_1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}c_2 + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}c_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_5 = H_1; \\ c_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_3 + c_5 = H_2; c_1 + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}c_2 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}c_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}c_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_5 = H_3; \\ c_2 + c_3 - c_4 = H_4, \end{array} \right.$$

із розв'язком:

$$c_1 = -36,577H_1 + 51,728H_2 - 36,577H_3 + 11,213H_4;$$

$$c_2 = 33,563H_1 - 51,728H_2 + 39,591H_3 - 12,844H_4;$$

$$c_3 = 39,591H_1 - 51,728H_2 + 33,563H_3 - 8,582H_4;$$

$$c_4 = 3,014H_1 - 3,014H_3 + 1,631H_4;$$

$$c_5 = -15,151H_1 + 22,426H_2 - 15,151H_3 + 3,938H_4.$$

Підставивши значення коефіцієнтів  $c_i$  ( $i=1,2,3,4,5$ ) у вираз для переміщення (3.52), матимемо:

$$\begin{aligned}
u(\eta) = & \left[ -36,577 + 33,563 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 39,591 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 3,014 \cos(\pi\eta) - \right. \\
& \left. -15,151 \sin(\pi\eta) \right] H_1 + \left[ 51,728 - 51,728 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 51,728 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 22,426 \sin(\pi\eta) \right] H_2 \\
& + \left[ -36,577 + 39,591 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 33,563 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 3,014 \cos(\pi\eta) - 15,151 \sin(\pi\eta) \right] H_3 \\
& + \left[ 11,213 - 12,844 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 8,582 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 1,631 \cos(\pi\eta) + 3,938 \sin(\pi\eta) \right] H_4
\end{aligned} \tag{3.53}$$

На основі (3.53) формуємо тригонометричні базисні функції:

$$e_1(\eta) = -36,577 + 33,563 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 39,591 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 3,014 \cos(\pi\eta) - 15,151 \sin(\pi\eta);$$

$$e_2(\eta) = 51,728 - 51,728 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 51,728 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 22,426 \sin(\pi\eta);$$

$$e_3(\eta) = -36,577 + 39,591 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 33,563 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 3,014 \cos(\pi\eta) - 15,151 \sin(\pi\eta);$$

$$e_4(\eta) = 11,213 - 12,844 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 8,582 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 1,631 \cos(\pi\eta) + 3,938 \sin(\pi\eta);$$

(3.54)

Виконавши обчислення з реалізації методу Гальоркіна відповідно до залежностей (3.47)-(3.50) і з використанням базисних функцій (3.54), знаходимо значення вагових коефіцієнтів:

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \bar{b} = \begin{pmatrix} -2,581 \cdot 10^{-5} \\ -8,083 \cdot 10^{-5} \\ -1,656 \cdot 10^{-4} \\ -3,515 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Маючи значення деформацій вузлів  $H_j$  ( $j=1,2,3,4$ ), можна записати вираз для визначення переміщення мостової опори на основі методу Гальоркіна з базисними тригонометричними функціями:

$$\begin{aligned}
u(\eta) = & \left[ 36,6 - 33,6 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 39,6 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 3,0 \cos(\pi\eta) + 15,2 \sin(\pi\eta) \right] 2,6 \cdot 10^{-5} \\
& + \left[ -51,7 + 51,7 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 51,7 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 22,4 \sin(\pi\eta) \right] 8,1 \cdot 10^{-5}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ 36,6 - 39,6 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 33,6 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 3,0 \cos(\pi\eta) + 15,2 \sin(\pi\eta) \right] 1,7 \cdot 10^{-4} \\
& + \left[ 11,2 + 12,8 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 8,6 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 1,6 \cos(\pi\eta) - 3,9 \sin(\pi\eta) \right] 3,5 \cdot 10^{-4} = \\
& = 10^{-3} \begin{pmatrix} -1,122 + \\ + 1,274 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) \end{pmatrix} + 10^{-4} \left( 6,182 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 1,520 \cos(\pi\eta) - 2,970 \sin(\pi\eta) \right)
\end{aligned}$$

На основі отриманих залежностей (3.55) побудовано розрахунковий алгоритм. Виконані числові дослідження показали, що аналітичний метод та адаптовані наближені схеми на основі методу Гальоркіна адекватні в просторі поліноміальних та тригонометричних базисних функцій.

Зокрема, порівняння розв'язків, отриманих на основі вказаних підходів, у точці найбільшого переміщення показує, що відхилення від аналітичного розв'язку у випадку використання проекційного методу з вибором вказаних базисних функцій становить 0,4%-0,03%. Однак, слід зауважити, що вздовж опори відносна відмінність результатів

$$\varepsilon(\eta)\% = \frac{u_1(\eta) - u_2(\eta)}{u_1(\eta) + u_2(\eta)} \cdot 100\%, \text{ отриманих у різних базисних функціях } (u_1(\eta)$$

– деформація в тригонометричному базисі,  $u_2(\eta)$  – деформація в поліноміальному базисі) має суттєву різницю, яку видно з графіка (рис. 3.5).

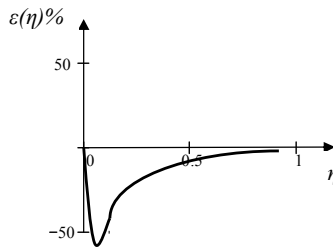


Рис. 3.5. Відносна відмінність результатів, отриманих у різних базисах.

Отже, із проведених досліджень можна зробити висновок, що форма кривої на рис. 3.5 вказує на те, що біля основи опори має місце значна розбіжність результатів, отриманих у різних базисах.

Напружено-деформований стан опори задається звичайним диференціальним рівнянням, розв'язком якого є функція однієї змінної і граничні умови не передбачають багатьох варіантів. Тому в наступному

параграфі розглянемо математичне моделювання балки, для якої існує, як і для опори, аналітичний розв'язок, але балка передбачає більше варіантів граничних умов.

### **3.5. Визначення напружено-деформованого стану балкових елементів мостів аналітичним та числовими методами за різних базисних та пробних функцій**

У цьому параграфі вирішуватимемо поставлену вище науково-технічну задачу, тобто вивчатимемо напружено-деформований стан балкових елементів моста шляхом порівняння аналітичних та числових методів дослідження відомої моделі механіки деформівного тіла, що описує балку.

Метою дослідження є порівняльний аналіз застосувань аналітичних та відповідних чисельних методів до розв'язання крайової задачі розрахунку конструкцій балочного типу. Об'єктом дослідження є однопролітна балка довжиною  $L$  та моментом інерції поперечного перерізу  $J$  (рис. 3.6); предметом дослідження є відповідні моделі та методи отримання числових результатів, що описують балку.

Прогин однорідної балки довжини  $L$  дає розв'язок двохточкової крайової задачі:

$$EJ \frac{d^4 u}{dx^4} = q, \quad u(0) = A, u'(0) = B, u(L) = C, u'(L) = D \quad (3.56)$$

де  $E$  – модуль пружності,  $u(x)$  – поперечне зміщення осьової лінії балки,  $x$  – поздовжня координата,  $A, B, C, D$  – сталі, що виражають умови на кінцях балки.

Розв'язок задачі дає формула:

$$u(x) = P_3(x) + \frac{EJ}{6L^4} \int_0^x (x-z)^3 q(z) dz,$$

де  $P_3(x)$  – поліном, коефіцієнти якого визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Припускаємо, що на балку діє поперечне рівномірно розподілене навантаження. Введенням нової безрозмірної змінної  $\eta = x/L$  рівняння (3.56) набуде вигляду:

$$\frac{EJ}{L^4} \frac{d^4 u}{d\eta^4} = q. \quad (3.57)$$

Розв'язок рівняння (3.57) шукатимемо для трьох основних випадків закріплення країв:

– балка, вільно оперта з обох боків, граничні умови для цього випадку мають вигляд:

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \frac{d^2 u(0)}{d\eta^2} = \frac{d^2 u(1)}{d\eta^2} = 0, \quad (3.58)$$

прогин вільно опертої балки визначається залежністю:

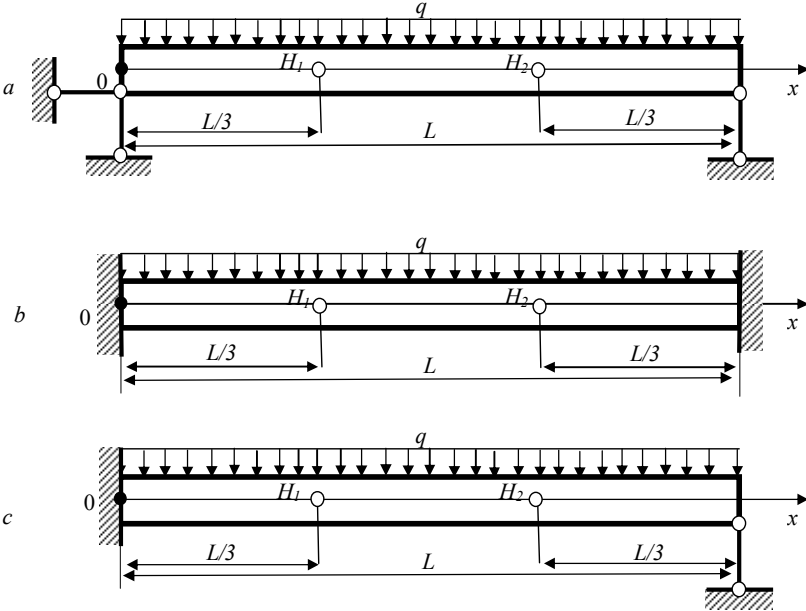


Рис. 3.6. Балка,  $L$  – довжина балки,  $q$  – поперечне рівномірно розподілене навантаження на балку.  $a$  – балка, вільно оперта з обох боків,  $b$  – балка, консольно закріплена з обох боків,  $c$  – балка, консольно закріплена зліва й вільно оперта справа.  $H_1$  та  $H_2$  – вузли всередині балки.

$$u(\eta) = \frac{q}{EJ} \left( \frac{\eta}{24} - \frac{\eta^3}{12} + \frac{\eta^4}{24} \right), \quad (3.59)$$

– консольне защемлення балки з обох боків, граничні умови для цього випадку:

$$u(0) = u(1) = 0; \quad \frac{du(0)}{d\eta} = \frac{du(1)}{d\eta} = 0, \quad (3.60)$$

а прогин визначається функцією:

$$u(\eta) = \frac{q}{EJ} \left( \frac{\eta^2}{24} - \frac{\eta^3}{12} + \frac{\eta^4}{24} \right), \quad (3.61)$$

– балка, консольно защеплена зліва та вільно оперта справа відповідно до граничних умов:

$$u(0) = u(1) = 0; \quad \frac{du(0)}{d\eta} = 0; \quad \frac{d^2u(1)}{d\eta^2} = 0, \quad (3.62)$$

прогин описується функцією:

$$u(\eta) = \frac{q}{EJ} \left( \frac{\eta^2}{16} - \frac{5\eta^3}{48} + \frac{\eta^4}{24} \right). \quad (3.63)$$

Дослідимо питання про можливість отримання наближеного розв'язку для балки за вказаних граничних умов із використанням числових проєкційних методів та методу скінченних елементів. Для цього будемо трактувати балку як скінченний елемент із двома вузлами  $H_1$  і  $H_2$  всередині (проліт балки розбиваємо на три рівні частини) і двома – на краях.

Розв'яжемо диференціальне рівняння (3.57) проєкційним методом, розклавши функцію, що описує розв'язок, на дві базисні поліноміальні функції.

Для вільно опертої з двох боків балки розв'язок, що задовольняє граничні умови  $u(0) = u(1) = 0$ , шукаємо у вигляді:

$$u(\eta) = \eta(1-\eta)(c_1 + c_2\eta + c_3\eta^2 + c_4\eta^3). \quad (3.64)$$

Базисні функції знайдемо із граничних умов (3.58) та у вузлових точках  $H_1$  і  $H_2$ :

$$u(1/3) = H_1; \quad u(2/3) = H_2, \quad (3.65)$$

причому  $H_1, H_2$  тут і далі вагові коефіцієнти для базисних функцій.

Константи  $c_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) у виразі для прогину (3.64) знайдемо з розв'язку системи алгебраїчних рівнянь, утвореної з виконання групи умов (3.58) та умов у вузлах (3.65). У результаті приходимо до системи рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} -2c_1 + 2c_2 = 0; \quad \frac{2}{9}c_1 + \frac{2}{27}c_2 + \frac{2}{81}c_3 + \frac{2}{243}c_4 = H_1; \\ \frac{2}{9}c_1 + \frac{4}{27}c_2 + \frac{8}{81}c_3 + \frac{16}{243}c_4 = H_2; \quad -2c_1 - 4c_2 - 6c_3 - 8c_4 = 0, \end{cases}$$

розв'язок якої:

$$c_1 = c_2 = \frac{324}{55} H_1 - \frac{243}{110} H_2; \quad c_3 = -\frac{2106}{55} H_1 + \frac{3807}{110} H_2; \quad (3.66)$$

$$c_4 = \frac{243}{10} H_1 - \frac{243}{10} H_2.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти  $c_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) (3.66) у формулу (3.66) та групуючи отриманий вираз щодо вагових коефіцієнтів, отримуємо:

$$u(\eta) = \eta(1-\eta) \left( \frac{324}{55} + \frac{324}{55} \eta - \frac{2106}{55} \eta^2 + \frac{243}{10} \eta^3 \right) H_1 + \eta(1-\eta) \left( -\frac{243}{110} - \frac{243}{110} \eta + \frac{3807}{110} \eta^2 - \frac{243}{10} \eta^3 \right) H_2. \quad (3.67)$$

На основі (3.67) можна записати базисні функції:

$$e_1(\eta) = \eta(1-\eta) \left( \frac{324}{55} + \frac{324}{55} \eta - \frac{2106}{55} \eta^2 + \frac{243}{10} \eta^3 \right); \quad (3.68)$$

$$e_2(\eta) = \eta(1-\eta) \left( -\frac{243}{110} - \frac{243}{110} \eta + \frac{3807}{110} \eta^2 - \frac{243}{10} \eta^3 \right).$$

Застосуємо метод Гальоркіна, зважаючи на те, що базисні й пробні функції співпадають. Формуємо відповідну матрицю  $\Lambda$ , беручи до уваги залежності (3.68):

$$\Lambda_{ij} = \frac{EJ}{L^4} \int_0^1 e_j(\eta) \frac{d^4 e_i(\eta)}{d\eta^4} d\eta; \quad \Lambda = EJ \begin{pmatrix} \frac{1259712}{4235} & -\frac{1121931}{4235} \\ \frac{1121931}{4235} & \frac{1259712}{4235} \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Із використанням виразів (3.68) запишемо вектор  $\vec{b}$ :

$$b_j = q \int_0^1 e_j(\eta) d\eta, \quad \vec{b} = q \begin{pmatrix} 81 \\ 220 \\ 81 \\ 220 \end{pmatrix},$$

на основі якого з виразу  $\Lambda_{ij} H_i = b_j$  та залежностей (3.69) знайдемо значення вагових коефіцієнтів:

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{11q}{972EJ} \\ \frac{11q}{972EJ} \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Підставляючи знайдені значення (3.70) у (3.67), отримаємо шуканий розв'язок диференціального рівняння поперечної деформації балки, що цілком співпадає з відповідним аналітичним виразом (3.59).

Застосовуючи описану вище числову процедуру, переконуємось, що у випадку решти двох способів закріплення країв відповідні числові схеми також приводять до отриманих аналітичним методом виразів (3.61) і (3.63).

Використаємо як базисні функції в методі Гальоркіна систему тригонометричних функцій. Для цього розв'язок рівняння (3.57) шукаємо у вигляді:

$$u(\eta) = A_0 + \sum_{i=1}^3 [A_i \cos(\pi\eta i) + B_i \sin(\pi\eta i)]. \quad (3.71)$$

Для випадку вільно опертої балки коефіцієнти розкладу (3.71) знайдемо із системи рівнянь, які формуються на основі граничних умов (3.68) та умов у вузлах (3.65). У результаті маємо:

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0; \quad B_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} H_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} H_2; \quad B_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} H_1 - \frac{\sqrt{3}}{3} H_2; \quad B_3 = 0. \quad (3.72)$$

Підставивши значення коефіцієнтів (3.72) у вираз для прогину (3.71), одержимо:

$$u(\eta) = \frac{\sqrt{3}}{3} [\sin \pi\eta + \sin 2\pi\eta] H_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} [\sin \pi\eta - \sin 2\pi\eta] H_2. \quad (3.73)$$

Відповідно до виразу (3.73) базисні функції виглядатимуть так:

$$e_1(\eta) = \frac{\sqrt{3}}{3} [\sin(\pi\eta) + \sin(2\pi\eta)]; \quad e_2(\eta) = \frac{\sqrt{3}}{3} [\sin(\pi\eta) - \sin(2\pi\eta)]. \quad (3.74)$$

Із використанням залежностей (3.69), (3.70) на основі виразів (3.74) знаходимо значення вагових коефіцієнтів  $\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} q / \pi^5 EJ \\ 2\sqrt{3} q / \pi^5 EJ \end{pmatrix}$  і після відповідних перетворень отримуємо прогин  $u(\eta)$ :

$$u(\eta) = \frac{4q}{EJ\pi^5} \sin \pi\eta. \quad (3.75)$$

Функція, що описує прогин консольно защемленої з обох боків балки відповідно до розвинutoї методики, матиме вигляд:

$$u(\eta) = \frac{q}{8EJ\pi^4} (1 - \cos 2\pi\eta), \quad (3.76)$$

а для прогину балки, консольно защемленої зліва та вільно опертої справа, матимемо:

$$u(\eta) = U_0 \left[ \left( \frac{352}{\pi^2} + 75 \right) (2 + \cos \pi\eta - 2 \cos 2\pi\eta - \cos 3\pi\eta) + \frac{1271}{\pi} \begin{pmatrix} 2 \sin \pi\eta - \\ - \sin 2\pi\eta \end{pmatrix} \right], \quad (3.77)$$

$$\text{де } U_0 = \frac{30}{\pi^2 (61952 - 82125\pi^2)}.$$



Покажемо застосування методу скінченних елементів з адаптацією поліноміальних та тригонометричних базисних функцій до побудови розв'язку крайової задачі на основі диференціального рівняння (3.57) поперечного згину балки та відповідних граничних умов (3.58), (3.60), (3.62). Для цього розглядаємо балку як скінченний елемент із набором ступенів свободи  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ . Поперечний прогин подамо поліномом  $p'$ ятого ступеня за змінною  $\eta$  у вигляді:

$$u(\eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \eta^2 + \alpha_4 \eta^3 + \alpha_5 \eta^4 + \alpha_6 \eta^5. \quad (3.78)$$

Коефіцієнти в розкладі (3.78) визначимо з умов на кінцях балки та у вузлових точках, координати яких  $\eta=0$ ,  $\eta=1/3$ ,  $\eta=2/3$  і  $\eta=1$ . Для вільно опертої з обох боків балки одержуємо залежність:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 & 1/81 & 1/243 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 & 16/81 & 32/243 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

Зауважимо, що при формуванні (3.79) враховуємо, що ступені свободи  $q_1, q_3, q_4, q_5$  відповідають поперечним зміщенням  $u(\eta)$ , а  $q_2, q_6$  – другий похідній  $\frac{d^2 u}{d\eta^2}$ . Подамо переміщення через ступені свободи:

$$u(\eta, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = (1 \ \eta \ \eta^2 \ \eta^3 \ \eta^4 \ \eta^5) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 & 1/81 & 1/243 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 & 16/81 & 32/243 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

На основі (3.79) запишемо базисні функції:

$$e_1(\eta) = 1 - \frac{461}{110}\eta + \frac{189}{11}\eta^3 - \frac{243}{11}\eta^4 + \frac{81}{10}\eta^5; \quad e_2(\eta) = -\frac{13}{165}\eta + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{71}{66}\eta^3 + \frac{21}{22}\eta^4 - \frac{3}{10}\eta^5;$$

$$e_3(\eta) = \frac{324}{55}\eta - \frac{486}{11}\eta^3 + \frac{1377}{22}\eta^4 - \frac{243}{11}\eta^5; \quad e_4(\eta) = -\frac{243}{110}\eta + \frac{405}{11}\eta^3 - \frac{648}{11}\eta^4 + \frac{243}{10}\eta^5;$$

$$e_5(\eta) = \frac{28}{55}\eta - \frac{108}{11}\eta^3 + \frac{405}{22}\eta^4 - \frac{81}{10}\eta^5; \quad e_6(\eta) = -\frac{2}{165}\eta + \frac{17}{66}\eta^3 - \frac{6}{11}\eta^4 + \frac{3}{10}\eta^5.$$

Елементи  $K_{ij}$  матриці жорсткості:

$$K_{ij} = \frac{EJ}{L^4} \int_0^1 U_i(\eta) U_j(\eta) d\eta,$$

де

$$U_i(\eta) = \frac{d^2 u(\eta, q_1 = f_1(i), q_2 = f_2(i), q_3 = f_3(i), q_4 = f_4(i), q_5 = f_5(i), q_6 = f_6(i))}{d\eta^2},$$

$$U_j(\eta) = \frac{d^2 u(\eta, q_1 = f_1(j), q_2 = f_2(j), q_3 = f_3(j), q_4 = f_4(j), q_5 = f_5(j), q_6 = f_6(j))}{d\eta^2},$$

$$f_k(i) = \begin{cases} 1, & k = i; \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

Згрупувавши ступені свободи, що відповідають закріпленням зв'язкам (у даному випадку це ступені  $q_1, q_2, q_5, q_6$ ) та розбиваючи рівняння жорсткості на блоки:

$$\begin{pmatrix} P_s \\ P_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sf} \\ K_{fs} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_s \\ q_f \end{pmatrix}; \quad (P_s) = [K_{sf}] (q_f); \quad (P_f) = [K_{ff}] (q_f),$$

враховуючи, що  $q_1 = q_2 = q_5 = q_6$ , одержимо  $q_f = [K_{ff}]^{-1} P_f$ ;  $P_s = K_{fs} q_f$ ,

$$\text{де} \quad [K_{ff}] = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}; \quad [K_{sf}] = \begin{bmatrix} K_{13} & K_{14} \\ K_{23} & K_{24} \\ K_{53} & K_{54} \\ K_{63} & K_{64} \end{bmatrix}; \quad P_f = \begin{pmatrix} \int_0^1 e_3(\eta) q(\eta) d\eta \\ 0 \\ \int_0^1 e_4(\eta) q(\eta) d\eta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Здійснюючи відповідну процедуру застосування методу скінченних елементів [41, 99, 110] із використанням залежностей (3.78), (3.81) та покладаючи при цьому  $E=1$ ,  $L=1$ ,  $J=1$ ,  $q(\eta)=-1$ , переконуємось, що для всіх випадків закріплення країв балки отримуємо розв'язки, які повністю співпадають з аналітичними виразами (3.59), (3.61), (3.63).

Метод скінченних елементів із тригонометричними базисними функціями, розв'язок рівняння (3.57) пропонуємо у вигляді:

$$u(\eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \cos \pi\eta + \alpha_3 \sin \pi\eta + \alpha_4 \cos 2\pi\eta + \alpha_5 \sin 2\pi\eta + \alpha_6 \cos 3\pi\eta + \alpha_7 \sin 3\pi\eta. \quad (3.82)$$

Для вільно опертої балки коефіцієнти розкладу (3.82) знайдемо із системи рівнянь, які можна отримати на основі граничних умов (3.58) на краях балки та умов у вузлах (3.65):

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\pi^2 & 0 & -4\pi^2 & 0 & -9\pi^2 & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \pi^2 & 0 & -4\pi^2 & 0 & 9\pi^2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{pmatrix},$$

координати яких наступні:  $\eta=0$ ,  $\eta=1/4$ ,  $\eta=1/2$ ,  $\eta=3/4$  і  $\eta=1$ . Переміщення, виражене через змінні, що визначають ступені свободи, має вигляд:

$$\begin{aligned} & u(\eta, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7) = \\ & = (1; \cos \pi\eta; \sin \pi\eta; \cos 2\pi\eta; \sin 2\pi\eta; \cos 3\pi\eta; \sin 3\pi\eta) \times \\ & \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\pi^2 & 0 & -4\pi^2 & 0 & -9\pi^2 & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \pi^2 & 0 & -4\pi^2 & 0 & 9\pi^2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Здійснюючи відповідні перетворення з використанням залежностей (3.81) і визначаючи значення коефіцієнтів  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ , на основі формули (3.82) приходимо до таких аналітичних виразів прогину балки:

– вільно оперта з обох країв балка:

$$u(\eta) = \frac{4}{\pi^5} \sin \pi\eta - \frac{4}{243\pi^5} \sin 3\pi\eta, \quad (3.84)$$

– консольно защемлена з обох країв балка:

$$\begin{aligned} u(\eta) = & -1,886 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-3} \cos \pi\eta + 8,875 \cdot 10^{-4} \sin \pi\eta + 1,886 \cdot 10^{-3} \cos 2\pi\eta - \\ & - 7 \cdot 10^{-3} \cos 3\pi\eta - 2,959 \cdot 10^{-4} \sin 3\pi\eta, \end{aligned} \quad (3.85)$$

– балка, консольно защемлена зліва та вільно оперта справа:

$$\begin{aligned} u(\eta) = & -9,888 \cdot 10^{-4} - 4,912 \cdot 10^{-4} \cos \pi\eta - 3,135 \cdot 10^{-3} \sin \pi\eta + 9,888 \cdot 10^{-4} \cos 2\pi\eta + \\ & + 1,698 \cdot 10^{-3} \sin 2\pi\eta + 4,911 \cdot 10^{-4} \cos 3\pi\eta - 8,430 \cdot 10^{-5} \sin 3\pi\eta. \end{aligned} \quad (3.86)$$

На основі отриманих залежностей (3.67), (3.75), (3.76), (3.77), (3.67)-(3.86) побудовано розрахунковий алгоритм. Виконані числові дослідження показали, що аналітичний метод та адаптовані наближені

схеми на основі методу Гальоркіна і методу скінченних елементів мають тенденцію до стійкої адекватності в середовищі поліноміальних та тригонометричних базисних функцій.

Однак, так само як і для опори, відносна розбіжність результатів, одержаних у різних базисах, значно різниться в залежності від способу закріплення, відстані до місця обпирання або закріплення, розподілу навантаження (рис. 3.7).

На рис. 3.8-3.10 наведено графіки згинальних моментів та прогину консольно защемленої балки під дією сили  $q = -(e^{\xi^2} + 2 + 3 \sin(3\pi\xi))$ . Доданок  $e^{\xi^2}$  не має первісної, отже розв'язок можна отримати тільки чисельним методом. Як видно з рисунків, за п'ятьох вузлів графіки поперечних прогинів, одержані в поліноміальному та тригонометричному базисі, досить близькі. Розрахунки вказують, що розбіжність щодо максимального значення становить 13,2% (за 15 вузлів  $2 \times 10^{-4}\%$ ).

Рисунок 3.11 ілюструє суттєвий недолік чисельних методів: «зрив» розв'язку.

Алгоритм чисельного методу містить розв'язок системи рівнянь. За певних умов визначники системи стають меншими «машинного нуля», що й призводить до результату, зображеного на рис. 3.11 а. Дублювання розв'язку в різних класах базисних функцій покращує чисельний метод, робить його надійнішим. На рисунку 3.11 б представлено згинальний момент у консольно защемленій балці, що зберігає стійкість.

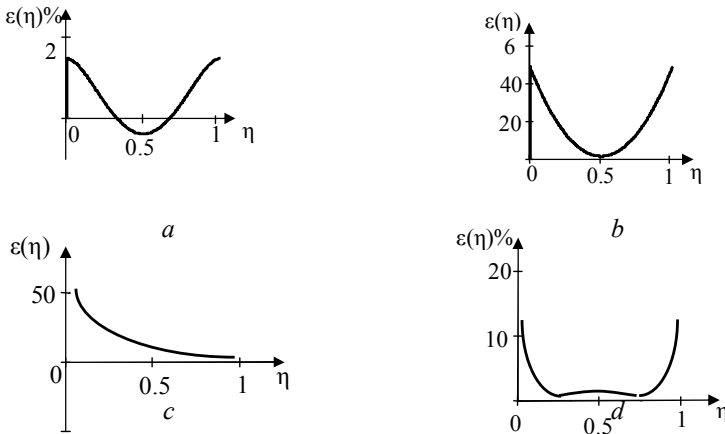


Рис. 3.7. Відносна відмінність результатів, одержаних у різних базисах, А – балка, вільно оперта з двох боків, В – балка, консольно закріплена з двох боків, С – балка, консольно закріплена зліва та вільно оперта справа, D – балка, консольно закріплена з двох боків, але дискретизація більша.

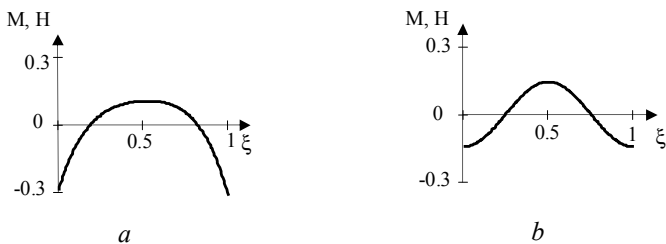


Рис. 3.8. Згинальний момент у консольно зацмленій балці, розрахований чисельним методом із застосуванням 5-ти вузлів (*a* – поліноміальний базис, *b* – тригонометричний базис).

Розбіжність силових факторів значно більша в різних базисах. Зокрема, розбіжність графіків згинального моменту становить відповідно: за 5-ти вузлів – 120 %; за 15-ти вузлів – 0,04 %.

Розбіжність результатів, отриманих числовим методом у різних базисах для

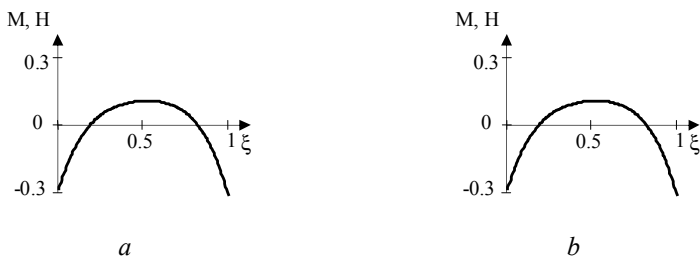


Рис. 3.9. Згинальний момент у консольно зацмленій балці, розрахований чисельним методом із застосуванням 15-ти вузлів (*a* – поліноміальний базис, *b* – тригонометричний базис).

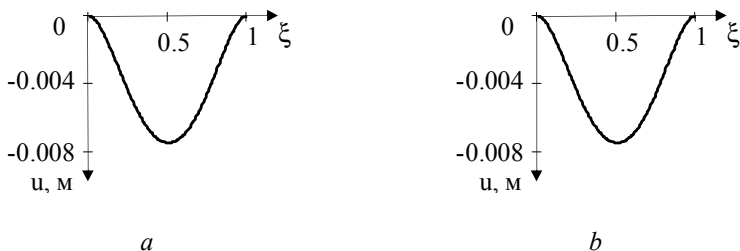
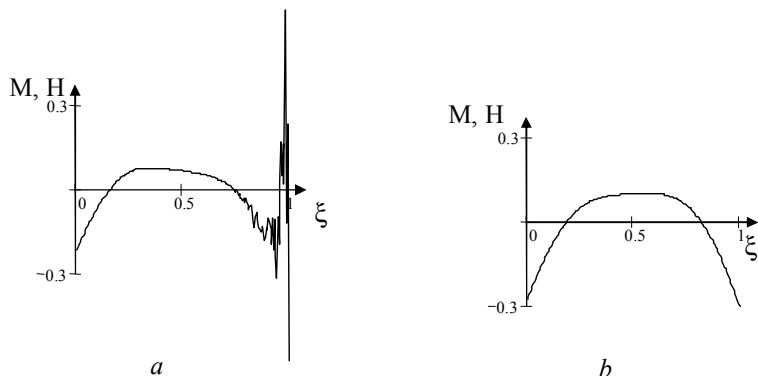


Рис. 3.10. Поперечний прогин консольно зацмленої балки, розрахований чисельним методом із застосуванням 5-ти вузлів (*a* – поліноміальний базис, *b* – тригонометричний базис).

консольно закріпленої з обох боків балки, зменшується з 50 % (чотири вузли зі значеннями  $\eta = 0, 1/3, 2/3, 1$  (рис.3.6 *b*)) до 12% (п'ять вузлів зі значеннями  $\eta = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ ), якщо збільшити кількість вузлів. Нами виявлено зростання відносної розбіжності результатів, отриманих у різних базисах за стрибкоподібною зміною навантаження уздовж балки.

З рис. 3.7 *c* бачимо, що на консольно закріпленому боці  $\varepsilon\%$  має більше значення, ніж на вільно опертому, відповідно  $\approx 50\%$  та  $\approx 2\%$ ,



*Рис. 3.11. Згинальний момент у консольно заземленій балці, розрахований чисельним методом із застосуванням 35-ти вузлів (а – у поліноміальному базисі втрачена стійкість розв’язку, б – тригонометричний базис, розв’язок стійкий).*

Отже, із проведених досліджень можна виокремити наступні положення:

- максимальна відносна розбіжність результатів, отриманих у різних базисах для вільно опертої з обох боків балки, становить  $\approx 2\%$ ;
- для консольно закріпленої  $\approx 50\%$  (рис. 3.7 *a, b*);
- обґрунтований вибір кількості, розміщення вузлів та оцінка точності чисельного методу можливі шляхом визначення інтегральної та локальної нев’язки розв’язків, отриманих у різних класах базисних функцій;
- «зрив» розв’язку в різних базисах відбувається за різних кількостей вузлів та їх розміщень;
- можуть виникати обчислювальні труднощі, пов’язані з тим, що чисельний метод забезпечує тільки середньоквадратичну, а не рівномірну збіжність до точного розв’язку. Його застосування може супроводжуватися появою осциляцій, позбавлених фізичного змісту

### 3.6. Методика розрахунку напружено-деформованого стану залізобетонної мостової балки таврового профілю з тріщиною

Вирішимо завдання, сформульоване в параграфі 1.1. Подамо аналітичну методику розрахунку тріщиностійкості залізобетонних балок таврового січення. На першому етапі вирішення цієї проблеми розглянемо метод визначення напружень у даній конструкції балкового типу.

Будівельні норми і правила для залізобетонних конструкцій «СНиП 2.03.01 84» рекомендують визначати ширину розкриття тріщини (в мм) за емпіричною залежністю:

$$a_{crit} = 20(3,5 - 100\mu)\delta\eta\psi_l(\sigma_s / E_s)\sqrt{d}, \quad (3.87)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт армування січення, який дається співвідношенням  $\mu = \frac{A_s}{bH}$ , причому  $A_s$  – площа розтягнутої арматури,  $b$  і  $H$  – ширина і висота балки;  $\delta$  – параметр, який для згинних елементів приймається рівним 1;  $\eta$  – коефіцієнт, що залежить від вигляду і профілю поздовжньо розтягнутої арматури, причому  $\eta = 0,85$  – для полосової арматури і  $\eta = 1$  – для стержневої арматури;  $\psi_l$  – коефіцієнт, який враховує тривалість дії навантаження і має вигляд  $\psi_l = 1,6 - 15\mu$ ;  $\sigma_s$  – напруження в зоні розтягу арматури;  $E_s$  – модуль пружності арматури;  $d$  – діаметр арматурного елемента;  $R_b$  – розрахунковий опір на стиск;  $A_b = xb$  – площа стиснутої зони бетону (рис. 3.12).

При розрахунках враховують, що коефіцієнт  $\mu$  не повинен перевищувати значення 0,02. Із формули (3.87) видно, що ця залежність може втратити сенс, адже за  $\mu > 0,035$  права частина (3.87) стає від'ємною. Крім того, як показують результати багаточисельних дослідів та експериментальних даних, залежність ширини тріщини від кореня кубічного з діаметра арматурного елемента, є некоректною [129]. Власне кажучи, залежність (3.87) не є результатом всесторонніх глибоких теоретичних досліджень і вивчення всіх факторів, які виявляють вплив на ширину розкриття тріщини і напружено-деформований стан конструкційного елемента балкового типу з дефектом у вигляді тріщини.

Тріщина по довжині балкового елемента при згині з'являється в середньому січенні, де виникають максимальні напруження  $\sigma_s$ ; саме в цьому випадку розтягуючі напруження в бетоні досягають величини  $R_b$  – розрахункового опору бетону на розтяг (рис. 3.13).

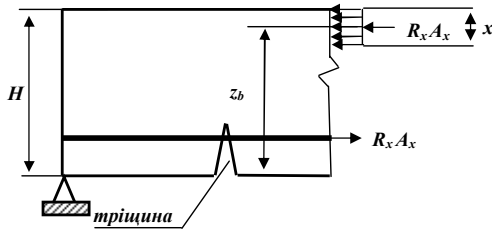


Рис. 3.12. Армована балка з тріщиною.

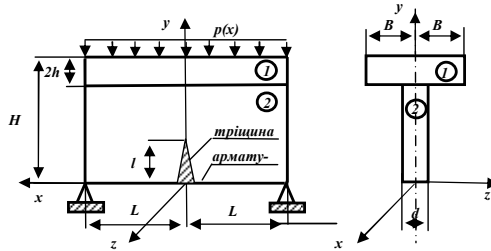


Рис. 3.13. Схема залізобетонної балки таврового профілю з тріщиною.

При розрахунках приймаємо балку як систему двох пружних однорідних пластин (рис. 3.14): горизонтальної (полиця 1) – товщиною  $2h$ , шириною  $2B$  і вертикальної (стінка 2) – товщиною  $d$  і висотою  $H$ . Стінка підкріплена по нижній грані  $y = 0$  пружною смугою (арматурою).

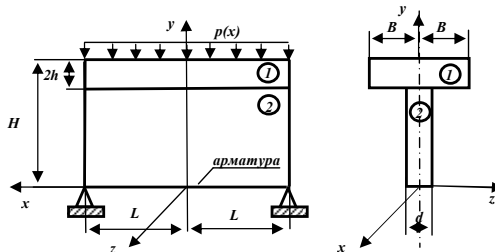


Рис. 3.14. Схема балки як система двох пружних однорідних пластин.

У залежностях (3.88)-(3.91) індекс «р» означає, що величина відноситься до полиці, а «с» – стінки (арматури).

Запишемо граничні умови для балки. Для полиці (плити) матимемо:

– прогин балки  $v_p(x, z)$  та згинний момент на опорі дорівнюють нулю, тобто:



$$v_p(x, z) = 0; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_p(x, z) = 0 \text{ при } x = \pm L, \quad (3.88)$$

– перерізуюча сила та згинальні моменти на вільних краях полиці відсутні:

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} v_p(x, z) + (2 - \nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} v_p(x, z) = 0; \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} v_p(x, z) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_p(x, z) = 0 \text{ при } z = \pm B. \quad (3.90)$$

На стику стінки і полиці прогин і деформація в напрямку осі  $Ox$  рівні між собою, тобто:

$$v_p(x, H - 2h) = v_c(x, H - 2h), \quad \varepsilon_{px}(x, H - 2h) = \varepsilon_{cx}(x, H - 2h). \quad (3.91)$$

Припустимо, що на полицю діє рівномірно розподілене по її ширині навантаження, симетрично до осі  $Oz$ , і прикладене вздовж лінії  $z = 0$ :

$$Q(x, z) = d[q(x) - p(x)]\delta(z). \quad (3.92)$$

У виразі (3.92)  $p(x)$  – інтенсивність прикладеного зверху навантаження, яке вважається відомим, віднесене до одиниці площі;  $q(x)$  – інтенсивність невідомого навантаження, прикладеного з боку стінки (реакція стінки);  $\delta(z)$  – дельта-функція Дірака [20,55];  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

На полицю також діє невідоме дотичне рівномірно розподілене навантаження, обумовлене стінкою, прикладене до лінії  $z = 0$ .

Граничні умови для стінки:

– нормальні напруження на торцях відсутні:

$$\sigma_{cx}(\pm L, y) = 0, \quad (3.93)$$

– напруження  $\tau_{xz}$  є граничним значенням дотичного напруження в стінці:

$$\tau_{cxz}(x, H) = \tau(x), \quad (3.94)$$

– на верхній край діє рівномірно розподілене навантаження:

$$\sigma_{cx}(x, H) = p(x), \quad (3.95)$$

– на нижньому краю нормальні напруження відсутні:

$$\sigma_{cx}(x, 0) = 0, \quad (3.96)$$

– на стику стінки з арматурою деформації рівні, тобто:

$$\varepsilon_{cx}(x, 0) = \varepsilon_{ax}. \quad (3.97)$$

Компоненти тензора напружень у полиці виражаються через прогин наступними залежностями [116]:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{px} &= -\frac{E(y-H-h)}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_p(x,z) + \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_p(x,z) \right]; \\ \tilde{\sigma}_{pz} &= -\frac{E(y-H-h)}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_p(x,z) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_p(x,z) \right].\end{aligned}\quad (3.98)$$

Із закону Гука випливає співвідношення:

$$\varepsilon_{px} = \frac{1}{E} (\sigma_{px} - \sigma_{pz}) = -(y-H-h) \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_p(x,z). \quad (3.99)$$

У рамках теорії Кірхофа прогин  $v_p(x,z)$ , як розв'язок рівняння типу Жермен, можна подати у вигляді:

$$v_p(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{1k} ch \alpha_k z + c_{2k} sh \alpha_k z + \frac{R_k}{2\alpha_k^2} \left( zch \alpha_k z - \frac{sh \alpha_k z}{\alpha_k} \right) \theta(z) \right] \cos \alpha_k x. \quad (3.100)$$

У виразі (3.100) позначено:

$$\alpha_k = \frac{2k-1}{2L} \pi; \quad R_k = -d \frac{q_k - p_k}{D}; \quad q_k, p_k - \text{невідомі коефіцієнти розкладу}$$

зовнішніх навантажень у тригонометричні ряди;  $\theta(z) = S(z) - \frac{1}{2}$  – зміщена на функція Гевісайда;  $S(z)$  – одинична функція Гевісайда [55];  $c_{1k}, c_{2k}$  – довільні сталі, які визначаються з граничних умов (3.88)-(3.97).

Використовуючи залежності (3.98)-(3.100), отримаємо:

$$\varepsilon_{px} = (y-H-h) \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{1k} ch \alpha_k z + c_{2k} sh \alpha_k z + \frac{R_k}{2\alpha_k^2} \left( zch \alpha_k z - \frac{sh \alpha_k z}{\alpha_k} \right) \theta(z) \right] \alpha_k^2 \cos \alpha_k x. \quad (3.101)$$

Наявність тріщини обумовлює нові граничні умови для стінки та арматури, за допомогою яких визначаються невідомі коефіцієнти у виразах для компонентів напружено-деформованого стану стінки та арматури. У випадку, що розглядається, матимемо:

на стику стінки з арматурою дотичні зусилля по всій ширині  $2u$  розкриття тріщини дорівнюватимуть нулю:

$$\tau_{cxz}(x,0) = 0 \quad \text{при } x \in [-u, u], \quad (3.102)$$

відносні видовження між арматурою і стінкою рівні між собою на ділянках, де тріщина відсутня:

$$\varepsilon_{ax} = \varepsilon_{cx} + \varepsilon'_{cx} \quad \text{при } y=0; \quad x \in [-L, L] \setminus [-u, u], \quad (3.103)$$

причому для  $\varepsilon'_{cx}$  – відносного видовження у стінці, обумовленого наявністю тріщини. Згідно з результатами роботи [61] маємо:

$$\varepsilon'_{cx} = \frac{2d}{\gamma} \int_0^l \frac{4x^4 t + (6 + \kappa)x^2 t^3 - 2(1 - \kappa)t^5 - x^3 t^2 - xt^4}{(x^2 + t^2)^3} \mu(t) dt. \quad (3.104)$$

У формулі (3.104) позначено:  $\gamma = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ ;  $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 - \nu}$ ;  $\mu(t)$  – невідома функція, що описує форму тріщини.

Остаточню напружено-деформований стан у полиці й стінці знаходитимемо за допомогою функцій Ейрі  $u_p$  (полиця) та  $u_c$  (стінка). Для полиці функція Ейрі матиме вигляд:

$$u_p = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k + B_k (1 \pm \alpha_k z)] e^{\mp \alpha_k z} \cos \alpha_k x, \quad (3.105)$$

де у формулі (3.105) перший знак відноситься до  $z > 0$ , другий – до  $z < 0$ ;  $A_k, B_k$  – невідомі коефіцієнти. Тоді для компонента тензора напружень маємо залежності:

$$\sigma_{px} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_p(x, z); \quad \sigma_{pz} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_p(x, z); \quad \tau_{pxz} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} u_p(x, z). \quad (3.106)$$

На основі формул (3.98), (3.99), (3.101), (3.105) і (3.106) отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{px} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 (A_k - B_k \pm \alpha_k z B_k) e^{\mp \alpha_k z} \cos \alpha_k x - \tilde{\sigma}_{px}; \\ \sigma_{pz} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 (A_k + B_k \pm \alpha_k z B_k) e^{\mp \alpha_k z} \cos \alpha_k x - \tilde{\sigma}_{pz}; \\ \tau_{pxz} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 (\pm A_k + \alpha_k z B_k) e^{\mp \alpha_k z} \sin \alpha_k x. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Напружено-деформований стан у стінці визначаємо через відповідну функцію Ейрі залежностями:

$$\sigma_{cx} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_c(x, y); \quad \sigma_{cy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_c(x, y); \quad \tau_{cxy} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_c(x, y). \quad (3.108)$$

Сформуємо функцію  $u_c(x, y)$  таким чином:

$$u_c(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \cos \alpha_k x. \quad (3.109)$$

У формулі (3.110) невідому функцію  $f_k(y)$  можна подати так:

$$f_k(y) = \lambda_{1k} ch \alpha_k y + \lambda_{2k} y ch \alpha_k y + \lambda_{3k} sh \alpha_k y + \lambda_{4k} y sh \alpha_k y. \quad (3.110)$$

У результаті на основі співвідношень (3.109)-(3.111) приходимо до розрахункових формул для компонент тензора напружень у стінці:

$$\sigma_{cx} = \sum_{k=1}^{\infty} [c_{2k}(2sh\alpha_k y + \alpha_k ych\alpha_k y) + c_{3k}\alpha_k sh\alpha_k y + c_{4k}(2ch\alpha_k y + \alpha_k ysh\alpha_k y)]\alpha_k \cos \alpha_k x;$$

$$\sigma_{cy} = -\sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k}ych\alpha_k y + c_{3k}sh\alpha_k y + c_{4k}ysh\alpha_k y)\alpha_k^2 \cos \alpha_k x; \quad (3.111)$$

$$\tau_{cxy} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_{2k}ysh\alpha_k y + \frac{c_{2k}}{\alpha_k} ch\alpha_k y + c_{3k}ch\alpha_k y + c_{4k}ych\alpha_k y + \frac{c_{4k}}{\alpha_k} sh\alpha_k y \right) \alpha_k^2 \sin \alpha_k x.$$

Невідомі коефіцієнти у формулах (3.105), (3.107), (3.109), (3.110), (3.111) визначаються з групи основних граничних умов (3.88)-(3.91), (3.93)-(3.97) та додаткових (3.102), (3.103).

Отже, з використанням математичного апарату узагальнених функцій (одиничних Гевісайда та імпульсних Дірака) одержимо залежності, які визначають напружено-деформований стан балки таврового профілю із тріщиною. Результати, отримані під час дослідження, можуть бути використані в інженерній практиці для знаходження ширини розкриття тріщини залежно від зміни зовнішнього силового навантаження, проценту армування і висоти балки.

### 3.7. Висновки до розділу 3

На основі теоретичних досліджень напружено-деформованого стану опори довільного перерізу (для довільної функціональної залежності  $F(x)$  перерізу балки від відстані  $x$  перерізу до основи) отримано основне співвідношення МСЕ, матрицю жорсткості, алгоритм та програму розрахунку напружено-деформованого стану опори та балки методом скінченних елементів, методом Гальоркіна та аналітичний розв'язок.

Порівнявши два випадки застосування методу скінченних елементів, зокрема представивши мостову опору одним скінченним елементом змінного перерізу та представивши опору як  $N$  скінченних елементів, бачимо, що графіки лінійного переміщення та нормального напруження суттєво відрізняються. Точніше описує деформацію модель, яка складається з більшої кількості елементів.

Порівняння розв'язків, отриманих на основі вказаних підходів у точці найбільшого прогину, показує:

– для вільно опертої балки відхилення від аналітичного розв'язку для проекційного методу становить 0,4%, а для методу скінченних елементів – 0,03%;

- для консольно закріпленої балки – відповідно 1,4% і 0,6%;
- у випадку консольно закріпленої зліва та вільно опертої справа балки масмо значення 3% і 4%.

1. Встановлено, що максимальна відносна розбіжність результатів, отриманих у різних базисах для вільно опертої з обох боків балки, становить  $\approx 2\%$ , для консольно закріпленої  $\approx 50\%$ , а на консольно закріпленому боці  $\varepsilon\%$  має більше значення, ніж на вільно опертому, відповідно  $\approx 50\%$  та  $\approx 2\%$ . Розбіжність результатів, отриманих числовим методом у різних базисах для консольно закріпленої з обох боків балки, зменшується з 50% (чотири вузли зі значеннями  $\eta = 0, 1/3, 2/3, 1$ ) до 12% (п'ять вузлів зі значеннями  $\eta = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ ), якщо збільшити кількість вузлів.

2. Із проведених досліджень випливає обумовлена необхідність густіше розміщувати вузли за числового методу розрахунку консольно заземленої балки та стрибкоподібної зміни навантаження.

3. Дублювання розв'язків у двох різних базисах підвищує надійність результатів і дозволяє визначити необхідну ступінь дискретизації моделі конструктивного елемента моста, зокрема опори, та обґрунтовано вибирати розміщення вузлів уздовж опори за числових методів ведення розрахунків.

4. Дублювання розв'язку в різних класах базисних функцій покращує чисельний метод, робить його надійнішим, оскільки «зрив» розв'язку в різних базисах відбувається за різних кількостей вузлів та їх розміщень.

5. Розвинуто методику знаходження напружено-деформованого стану балки таврового профілю за наявності в ній дефекту типу тріщини. При цьому використано апарат узагальнених функцій та елементи теорії пружності і концепції механіки крихкого руйнування

# РОЗДІЛ 4

## РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРОЇЗНОЇ ЧАСТИНИ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ ПРОГОНОВОЇ БУДОВИ МОСТА

### 4.1. Розрахунок напружено-деформованого стану сталезалізобетонного моста методом скінченних елементів

Постановка задачі. Аналізується напружено-деформівний стан багатопшарової пластини. Пластина складається із  $n$  шарів трансверсально ізотропного матеріалу. Товщина кожного шару стала і рівна  $h_k$  ( $k=1, \dots, n$ ). Площини ізотропії паралельні поверхням, шари нестисливі, для кожного з них закон Гука є таким:

$$\sigma_x = \frac{E_k}{1-\mu_k^2}(\epsilon_x^k + \mu_k \epsilon_y^k), \quad \sigma_y = \frac{E_k}{1-\mu_k^2}(\epsilon_y^k + \mu_k \epsilon_x^k), \quad \tau_{xy}^k = \frac{E_k}{2(1+\mu_k)}\epsilon_{xy}^k,$$

$$\tau_{xz}^k = G_k \gamma_{xz}^k, \quad \tau_{yz}^k = G_k \gamma_{yz}^k,$$

де  $E_k = E_k(z)$ ,  $\mu_k = \mu_k(z)$ ,  $G_k = G_k(z)$  - модуль пружності, коефіцієнт Пуассона і модуль зсуву. Розглядається випадок, для якого: 1) зовнішнє навантаження діє по нормалі до пластини; 2) шари працюють сумісно без відриву та проковзування; 3) нормальні переміщення незмінні вздовж товщини пластини:  $w_k(x, y, z) = w(x, y)$ ; 4) тангенціальні переміщення серединної площини пакету є нехтовно малими:  $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$ . За вказаних умов відносно функції зсуву  $\chi = \chi(x, y)$ , котра підлягає визначенню разом із функцією  $w(x, y)$ , отримуємо:

$$u_k(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \psi_k(z), \quad v_k(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \psi_k(z).$$

За останніми співвідношеннями побудовано функціонал потенціальної енергії пластини і знайдено розв'язок задачі методом скінченних елементів.

Міст моделюється пластиною у вигляді паралелограма, довша сторона якого дорівнює 23 метри 65 сантиметрів (рис. 4.1).

Знизу пластина підкріплюється п'ятьма сталевими балками, які, в свою чергу, з'єднані поперечними ребрами жорсткості (рис. 4.2).

Поперечний переріз цих балок та їхні розміри показано на рис. 4.3.

За допомогою методу скінченних елементів потрібно знайти величини та характер вертикальних прогинів поверхні моста.

Розглянемо шість випадків навантаження поверхні моста. Перший випадок навантаження показано на рис. 4.1.

Основні співвідношення методу скінченних елементів запишемо в матричному вигляді. Визначення пружних переміщень за допомогою методу скінченних переміщень зводиться до числового розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$[K]\{Q\} = \{F\},$$

де  $[K]$  – глобальна матриця жорсткості,  $\{Q\}$  – глобальний вектор переміщення вузлів,  $\{F\}$  – глобальний вектор навантажень, який є сумою реального навантаження  $\{P\}$  і фіктивних зусиль внаслідок наявності початкових (наприклад, температурних) деформацій  $\{H\}$ .

Локальні матриці й вектори для одного елемента задовольняють умови рівно-ваги:

$$[k]\{q\} = \{f\}, \quad \{f\} = \{p\} + \{h\}.$$

$$\{F\} = \{P\} + \{H\}.$$

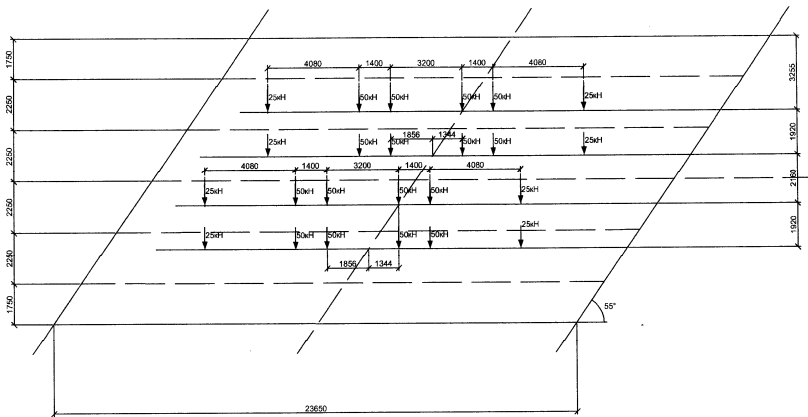


Рис. 4.1. Міст у вигляді паралелограма, перша схема навантаження.

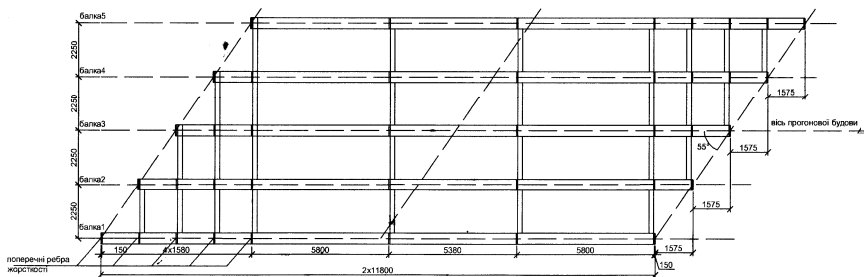


Рис. 4.2. Стальні балки та ребра жорсткості моста.

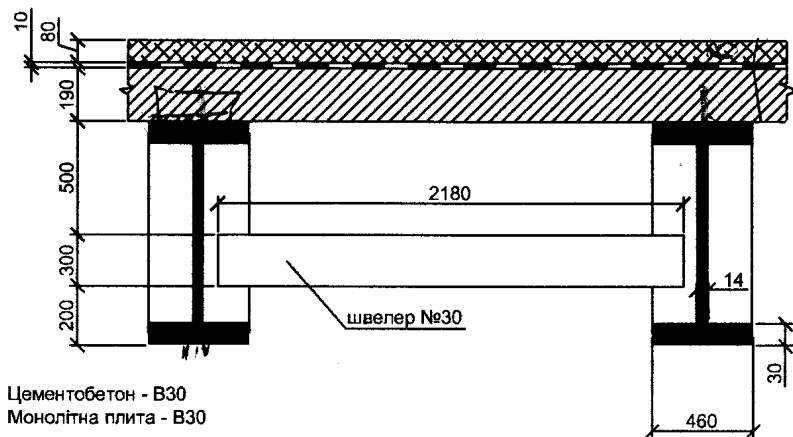


Рис. 4.3. Поперечний переріз балок.

Тут малими буквами позначено відповідні локальні величини.

Процес переходу від набору локальних величин до глобальних називають зборкою. Після розв'язання системи рівнянь рівноваги локальний вектор переміщення  $\{q\}$  знаходять за допомогою операції виборки.

Знання переміщень дає можливість визначити деформації  $\{\varepsilon\}$  і напруження  $\{\sigma\}$ :

$$\{\sigma\} = [B]\{q\} \quad \{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}).$$

Тут  $[B]$  – матричний диференціальний оператор,  $[D]$  – матриця пружності,  $\{\varepsilon_T\}$  – вектор термічних або інших початкових деформацій.

Матрицю жорсткості й фіктивне навантаження від температурної дії зазвичай обчислюють за допомогою числового диференціювання за об'ємом елемента  $V$  (верхній індекс  $t$  означає транспонування):

$$[k] = \int_V [B]^T [D] [B] dV, \quad [h] = \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_T\} dV.$$



За практичної реалізації методу скінченних елементів використовувались два типи скінченних елементів. Цементобетонну й монолітну залізобетонну плити моделювали 3-вимірними скінченними елементами з вісьмома вузлами. Схематично цей елемент показано на рис. 4.4.

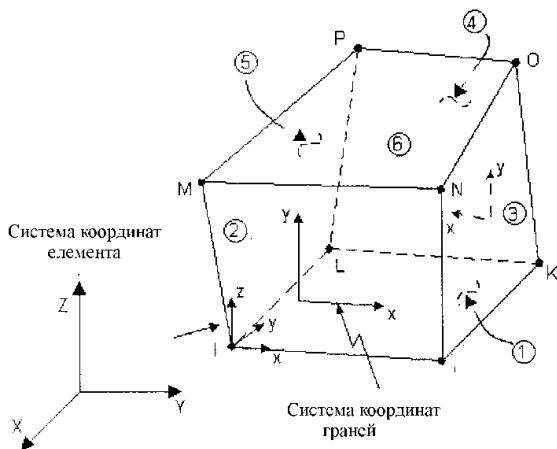


Рис. 4.4. Трьохмірний скінченний елемент.

На рис. 4.4 точки I, J, K, L, M, N, O, P символізують вузли. А так як кожен вузол має три ступені свободи, то у даного елемента їх 24.

Балки, зображені на рисунках 2.1.2 і 2.1.3, моделюємо плоским елементом із чотирма вузлами. Цей елемент схематично показано на рис. 4.5.

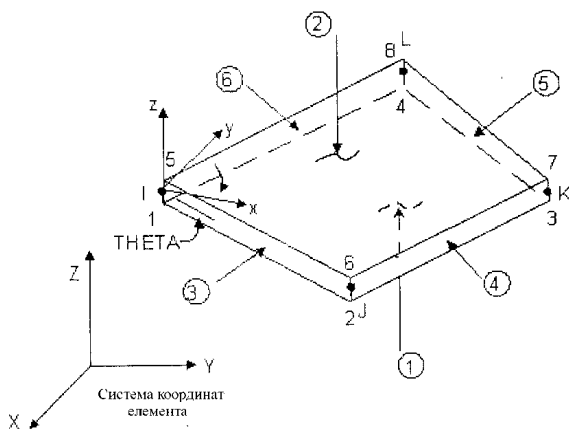


Рис. 4.5. Плоский скінченний елемент.

У цьому випадку відрізки I, J, K, L символізують вузли. А так як кожний відрізок має шість ступенів свободи (переміщення і повороти в трьох напрямках), то у даного елемента їх також 24.

**Результати розрахунків.** Розрахунки проводились у кожному з шести випадків для двох схем. Перша – при обчисленні прогинів не враховували сталі балки і поперечних ребер жорсткості. Друга – сталі балки враховували при моделюванні скінченними елементами, а впливом поперечних ребер нехтували. Надалі називатимемо ці схеми першою і другою схемами навантаження.

Розрахунок проводився за допомогою програми ANSYS 6.0. Для першої схеми навантаження розбиття моста на скінченні елементи виглядає так, як показано на рис. 4.6.

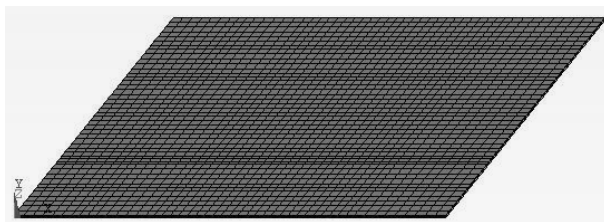


Рис. 4.6. Перша схема розбиття моста.

Обчислення проводились на двох різних розбиттях на скінченні елементи. При першому розбитті – на 4320 елементів першого типу (розв'язувалась система 23782 алгебраїчних рівнянь). Одержаний розподіл вертикальних переміщень поверхні моста зображений на рис. 4.7.

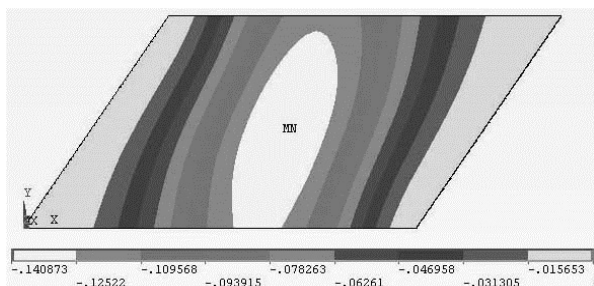
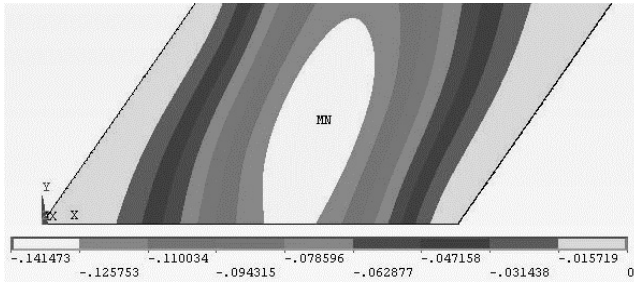


Рис. 4.7. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 4320 3-вимірних елементів

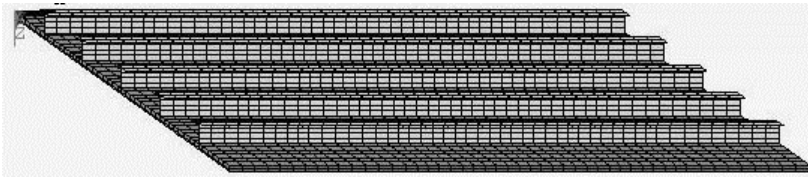
При другому розбитті (8430 елементів першого типу і 48576 алгебраїчних рівнянь) одержано розподіл вертикальних переміщень, що зображений на рис. 4.8.



*Рис. 4.8. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 8430 3-вимірних елементів.*

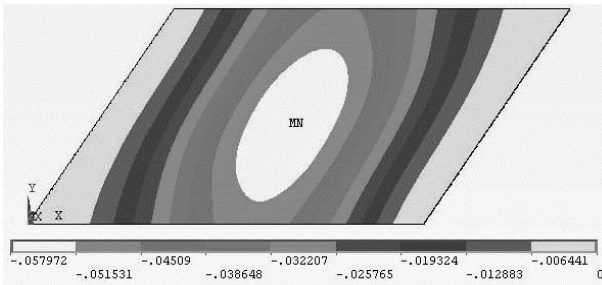
Порівняння результатів, що наведені на рисунках 4.7 і 4.8, вказує на те, що розбиття моста на 4320 елементів першого типу цілком достатньо для досягнення задовільної точності.

Загальний вигляд розбиття на скінченні елементи для другої схеми навантаження моста показано на рис. 4.9.



*Рис. 4.9. Друга схема розбиття моста.*

Результати обчислень при розбитті на 4312 елементів першого типу та 1760 елементів другого (34885 рівнянь) можна побачити на рисунку 4.10.



*Рис. 4.10. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 4312 3-вимірних та 1760 плоских елементів.*

Результати обчислень при розбитті на 8722 елементи першого типу та 3560 елементів другого (34885 рівнянь) – на рисунку 4.11.

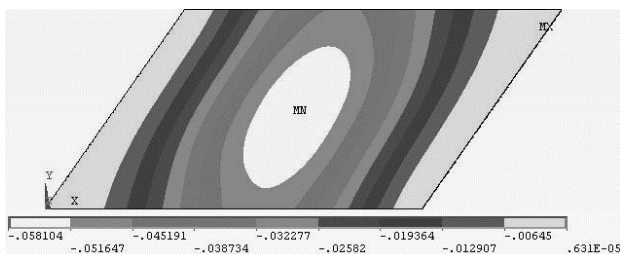


Рис. 4.11. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 8722 3-вимірних та 3560 плоских елементів.

Порівнюючи результати розрахунків, показані на рисунках 4.10 і 4.11, можна зробити висновок, що при розбитті на 4312 елементів першого типу і 1760 елементів другого є достатнім для досягнення бажаної точності. Надалі будемо наводити результати тільки для розбиття на меншу кількість елементів.

Другий випадок навантаження моста показано на рис. 4.12.

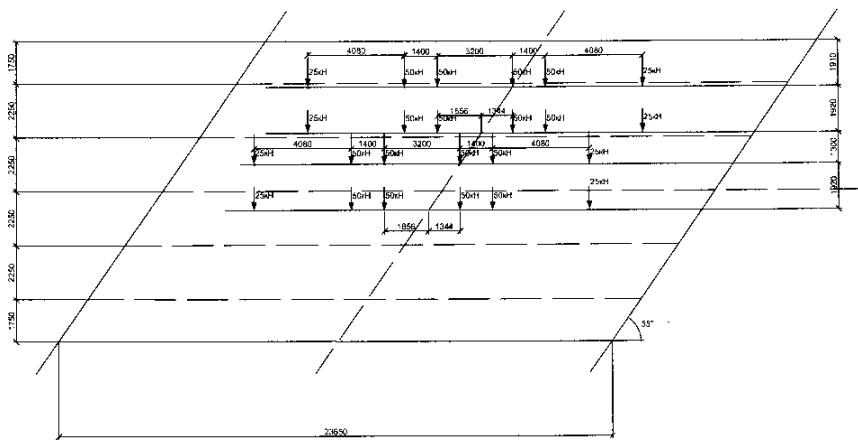


Рис. 4.12. Міст у вигляді паралелограма, друга схема навантаження

Для першої схеми навантаження при розбитті на 4416 елементів першого типу (24299 рівняння) одержано розподіл вертикальних переміщень, рис. 4.13. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 4416 3-вимірних та 1920 плоских елементів зображено на рис. 4.14.

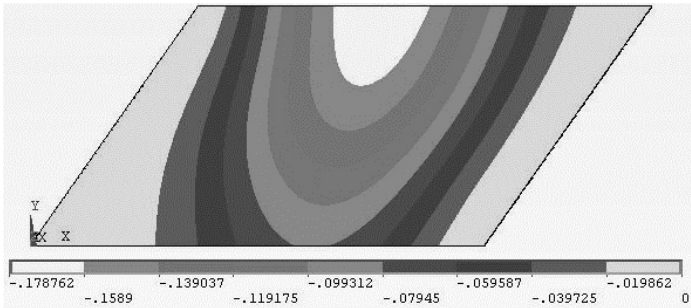


Рис. 4.13. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 4416 3-вимірних елементів.

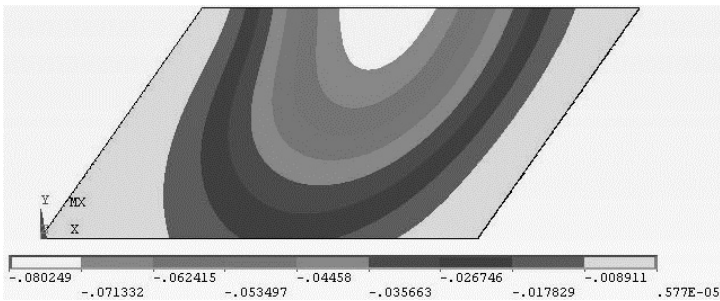


Рис. 4.14. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 4416 3-вимірних та 1920 плоских елементів.

Третій випадок навантаження моста (рис. 4.15).

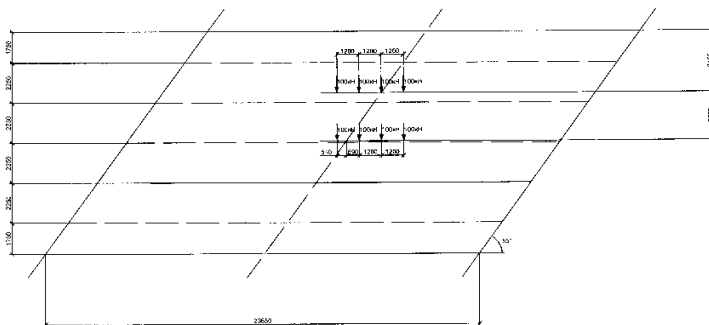


Рис. 4.15. Міст у вигляді паралелограма, третя схема навантаження.

Якщо міст розбити на 3200 елементів першого типу, то розподіл вертикальних переміщень його поверхні є таким (рис. 4.16).

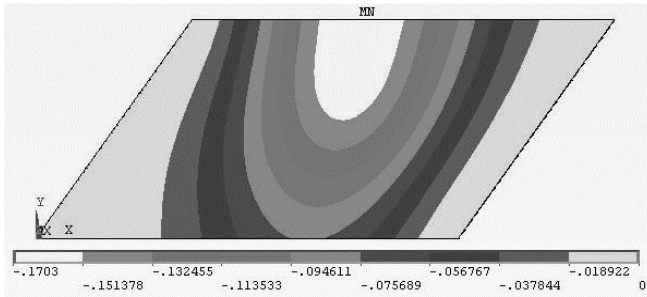


Рис. 4.16. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 3200 3-вимірних елементів.

Для другої схеми навантаження при розбитті на 2880 елементів першого типу і 960 елементів другого (36554 рівняння) розподіл вертикальних переміщень такий (рис. 4.17).

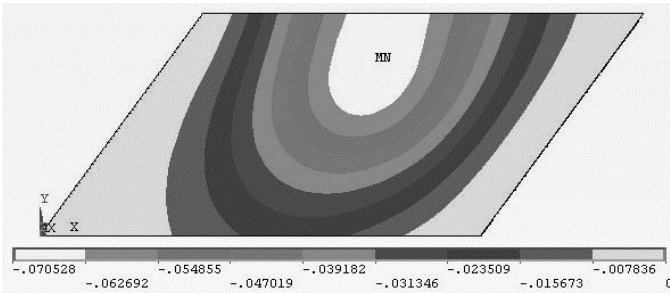


Рис. 4.17. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 2880 3-вимірних та 960 плоских елементів.

Для четвертого випадку навантаження сили, які діють на міст, розміщені так (рис. 4.18).

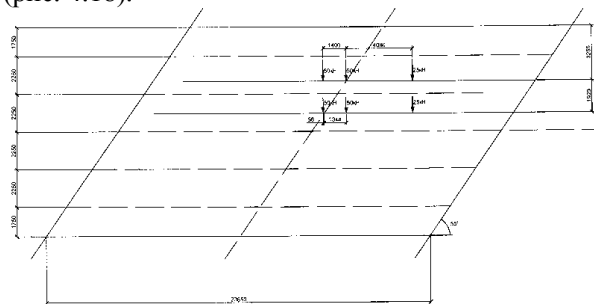


Рис. 4.18. Міст у вигляді паралелограма, четверта схема навантаження

Розбивши міст на 4312 елементів першого типу (перша схема), одержимо такий розподіл вертикальних переміщень по поверхні моста (рис. 4.19).

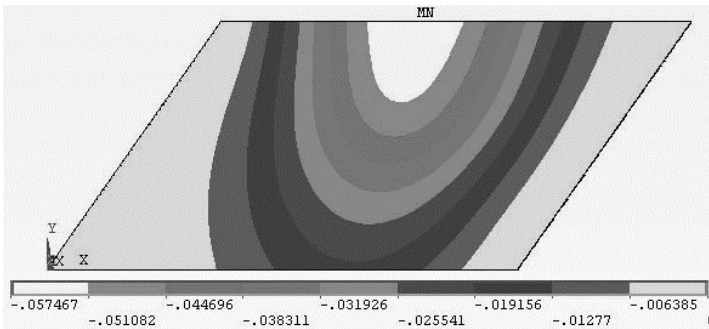


Рис. 4.19. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 4312 3-вимірних елементів.

Для другої схеми при розбитті на 4312 елементів першого типу і 1760 елементів другого розподіл вертикальних переміщень є таким (рис.4.20).

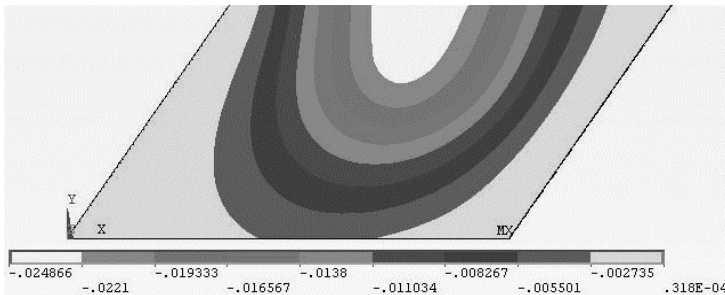


Рис. 4.20. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 4312 3-вимірних та 1760 плоских елементів.

Для п'ятого випадку навантаження сили, які діють на міст, розміщені так (рис. 4.21).

За першої схеми розрахунку, розбивши міст на 4048 елементів першого типу (22231 рівняння), отримаємо такий розподіл вертикальних переміщень поверхні моста (рис. 4.22).

Для другої схеми розрахунку, розбивши міст на 4048 елементів першого типу та 1760 елементів другого, отримаємо розподіл вертикальних переміщень поверхні моста, що зображений на рис. 4.23.

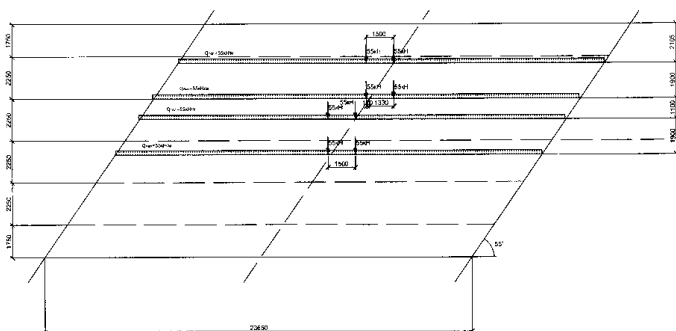


Рис. 4.21. Міст у вигляді паралелограма, п'ята схема навантаження.

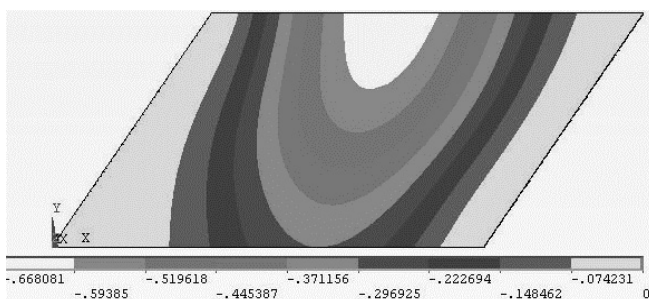


Рис. 4.22. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 4048 3-вимірних елементів.

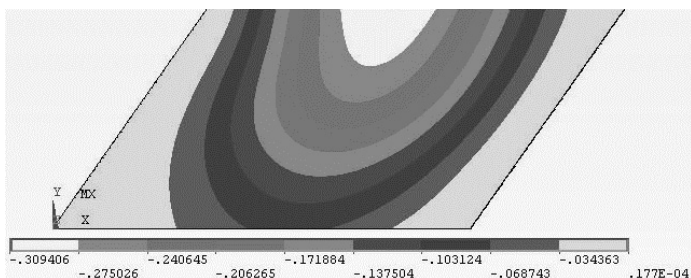


Рис. 4.23. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті а 4048 3-вимірних та 1760 плоских елементів.

Для шостого випадку навантаження сили, які діють на міст, розміщені так (рис. 4.24).



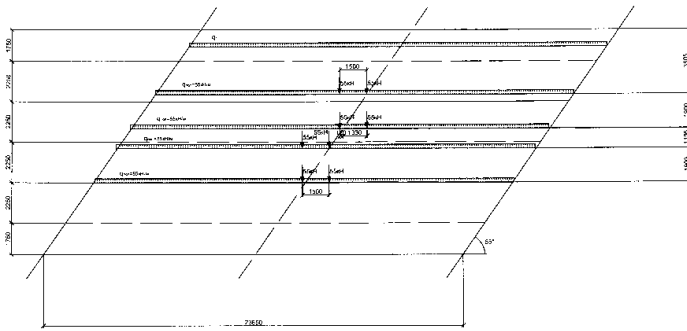


Рис. 4.24. Міст у вигляді паралелограма, шоста схема навантаження.

За першої схеми розрахунку, розбивши міст на 4312 елементів першого типу (23650 рівнянь), маємо розподіл вертикальних переміщень моста, що зображений на рис. 4.25.

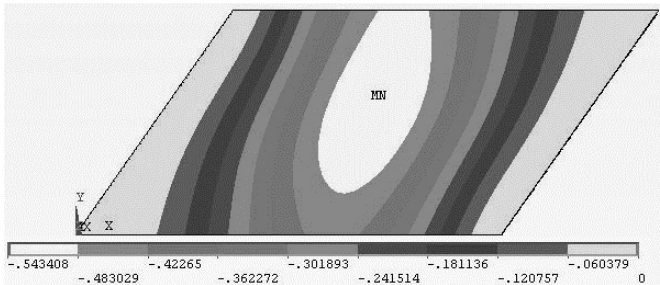


Рис. 4.25. Розподіл вертикальних переміщень при розбитті на 4312 3-вимірних елементів.

За другої схеми розрахунку спочатку розбиваємо міст на 4312 елементів першого типу та 1760 елементів другого. Одержимо розподіл вертикальних переміщень, що зображений на рис. 4.26.

Сьогодні для визначення напружено-деформованого стану залізобетонних конструкцій мостів, послаблених тріщинами, відомо ряд підходів [67], які вважаються досить громіздкими, і за практичного застосуванні одержаних результатів виникають значні труднощі. Тому існує проблема у вдосконаленні методів і підходів, зокрема в рамках деформаційних підходів механіки руйнування та одержання більш достовірних та зручних у практичному застосуванні результатів. Проте у багатьох країнах світу дуже поширений метод розрахунку мостових конструкцій методом скінченних елементів.



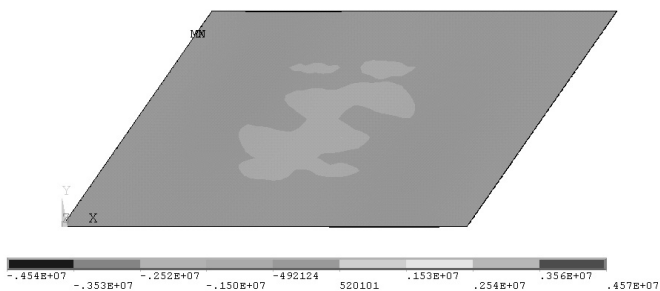


Рис. 4.28. Розподіл напружень при розбитті на 4416 3-вимірних елементів.

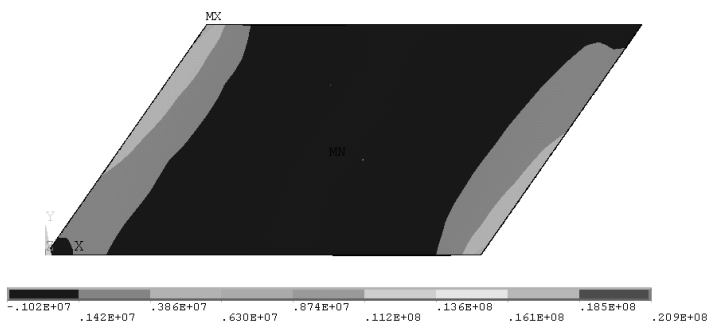


Рис. 4.29. Розподіл напружень при розбитті на 8924 3-вимірних елементів.

Для другої схеми навантаження при розбитті на 4416 елементів першого типу і 1920 елементів другого (36554 рівняння) розподіл головних напружень  $\sigma_3$  на рис. 4.30.

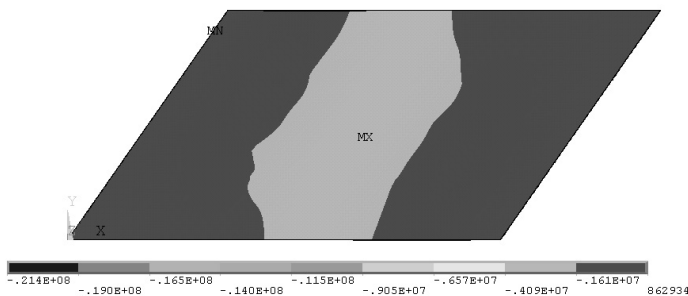


Рис. 4.30. Розподіл напружень при розбитті на 4416 3-вимірних та 1920 плоских елементів.



3. Для всіх шести випадків навантаження переміщення при врахуванні двотаврових балок більш ніж у два рази менші, ніж у випадку, коли їх не враховують (див. рис. 4.7, 4.8, 4.10, 4.11, 4.13-4.15, 4.16, 4.17, 4.19, 4.20, 4.22, 4.23, 4.25, 4.26).

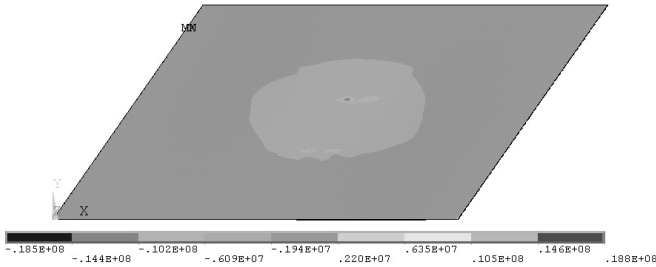


Рис. 4.33. Розподіл напружень ( $\sigma_2$ ) при розбитті на 8722 3-вимірних елементів.

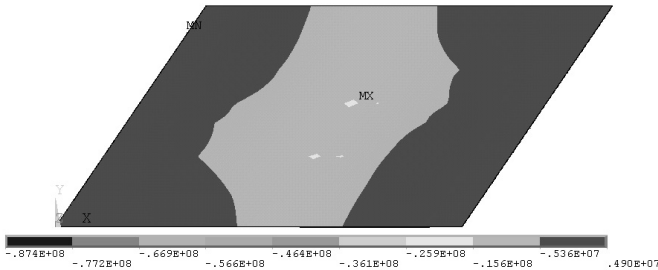


Рис. 4.34. Розподіл напружень ( $\sigma_3$ ) при розбитті на 8722 3-вимірних елементів.

4. Для кожного з шести випадків навантаження проведено співставлення результатів обчислень для різних густин сітки скінченних елементів. При цьому маємо добру кореляцію результатів при різних розбиттях (див. рис. 4.7, 4.8, 4.10, 4.11, 4.13-4.15, 4.16, 4.17, 4.19, 4.20, 4.22, 4.23, 4.25, 4.26).

5. Якщо навантаження розміщене більш-менш симетрично щодо незакріплених боків моста, то найбільші переміщення спостерігаються в області прикладання сил. В іншому випадку значні переміщення мають місце на краю незакріпленого боку моста, ближчого до прикладання сил (див. рис. 4.6-4.26).

6. В окремих випадках (див. рис. 4.48-4.26) одержано завищені значення перемішень. Це, очевидно, пов'язано з тим, що необхідно було б

враховувати поперечні ребра жорсткості (див. рис. 4.3) та не враховувалось армування монолітної плити (рис. 4.2).

7. Для більш точного розрахунку переміщень поверхні моста, крім факторів, вказаних у попередньому пункті, необхідно розглянути і поведінку моста за дії сил, змінних у часі.

8. У випадку, коли під час розрахунку враховують армування, слід також враховувати зміну міцності монолітної плити, зв'язаної зі ржавінням заліза.

9. На прогин моста впливає зміна міцності поперечних і поздовжніх сталевих балок при ржавінні (рис. 4.2).

#### **4.2. Застосування комплексного ряду Фур'є при розрахунку напружено-деформованого стану вільно опертих мостових плит**

У наступних параграфах вирішується поставлена вище науково-технічна задача: отримати аналітичний розв'язок диференціального рівняння поперечного згину мостової плити у виді придатному для прикладного застосування. Розглядаються різні рівні моделювання від однієї локальної сили до системи локальних сил та сил, розподілених на систему площадок.

Нами досліджується адекватність математичної моделі фізичному об'єкту – ортотропній залізобетонній мостовій плиті.

Розглянемо прямокутну залізобетонну плиту, поперечні розміри якої  $a \times b$  значно перевищують висоту  $h$ . За таких припущень плиту можемо вважати тонкою і застосовувати для її розрахунку методи класичної теорії плит.

Введемо декартову систему координат  $xOyz$ , направивши вісь  $Ox$  уздовж арматури, вісь  $Oy$  – у перпендикулярному напрямку, а вісь  $Oz$  – перпендикулярно до середини поверхні плити так, щоб система координат була правою. Початок координат розмістимо в геометричному центрі плити (рис. 4.35). Згідно з роботами [30, 59] таку плиту умовно можна замінити однорідною й ортотропною.

Диференціальне рівняння згину ортотропної плити має вигляд:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (4.1)$$

де  $D_{ij}$  – параметри жорсткості ортотропного матеріалу на згин та кручення, що називаються циліндричними жорсткостями матеріалу в напрямках головних осей  $Ox$ ,  $Oy$ , пов'язані з модулем пружності та моментом інерції плити (цей зв'язок описано в [30]), а  $q(x, y)$  – поперечне навантаження на плиту.

Напружено-деформований стан ортотропної залізобетонної мостової плити, що знаходиться під дією одного локального навантаження. За локального навантаження плити  $q(x, y) = q \delta(x-x_i) \delta(y-y_i)$ , де  $q$  – константа,  $\delta(x-x_i)$  та  $\delta(y-y_i)$  – функції,  $x_i$  та  $y_i$  – координати  $i$  – тої локальної сили.

Розглянемо локальне навантаження за рис. 4.35.

Розв'язок диференціального рівняння (4.1) сформуємо у вигляді суми:

$$w = w_* + w_0 \quad (4.2)$$

загального розв'язку  $w_*$  однорідного рівняння і частинного розв'язку  $w_0$  неоднорідного рівняння. Частковий розв'язок  $w_0$  вибираємо у вигляді розкладу в комплексний ряд Фур'є, на відміну від прийнятого – в [30] – тригонометричного ряду, застосуємо комплексний ряд Фур'є [56] (доцільність такого розкладу впливає далі):

$$w_0 = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N A_{m,n} \exp\left(2\pi i \left(m \frac{x}{a} + n \frac{y}{b}\right)\right). \quad (4.3)$$

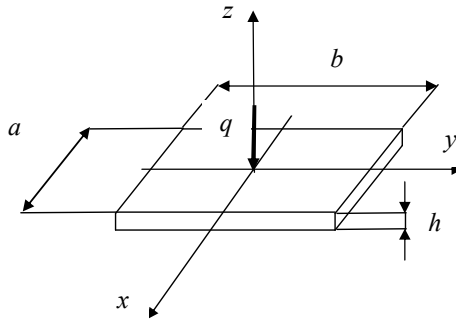


Рис. 4.35. Локальна сила, що моделює тиск на мостову плиту.

Підставляючи розв'язок (4.3) у рівняння (4.1) і прирівнюючи коефіцієнти при експонентах, знаходимо:

$$A_{m,n} = \frac{Q_{m,n}}{16\pi^4 (m^4 D_{11} + 2m^2 n^2 (D_{12} + 2D_{66}) + n^4 D_{22})}, \quad (4.4)$$

де  $Q_{m,n}$  – коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є зовнішнього навантаження  $q(x, y)$ :

$$Q_{m,n} = \frac{1}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q(x, y) \exp\left(-2\pi i \left(m \frac{x}{a} + n \frac{y}{b}\right)\right) dx dy. \quad (4.5)$$

Коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є зовнішнього навантаження  $q(x, y) = q \delta(x - x_i) \delta(y - y_i)$  будуть такі:

$$Q_{m,n} = \frac{q}{ab} \exp\left(-2\pi\left(m\frac{x_i}{a} + n\frac{y_i}{b}\right)\right). \quad (4.6)$$

Напружено-деформований стан ортотропної залізобетонної мостової плити, що знаходиться під дією системи локальних навантажень.

Розглянемо прямокутну залізобетонну плиту, навантажену шістьма локальними силами  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ . Її поперечний згин також описується диференціальним рівнянням (4.1), якому відповідає однорідне рівняння (4.7) у частинних похідних 4-го порядку [114]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (4.7)$$

Циліндричні жорсткості матеріалу в напрямках головних осей  $Ox, Oy$ , пов'язані з модулем пружності, модулем зсуву, коефіцієнтом Пуассона і товщиною плити [114]  $D_{ij} = \frac{h^3}{12} B_{ij}$ , де:

$$B_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \quad B_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \quad B_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \quad B_{66} = \frac{1}{a_{66}}; \quad (4.8)$$

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}; \quad a_{66} = \frac{1}{G}, \quad (4.9)$$

$E_1, E_2, G, \nu_{ij}, h$  – модулі пружності в напрямках головних осей, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона і товщина плити відповідно.

Зобразимо на рисунку 4.36 локальні сили  $P_1 - P_6$ , що моделюють тиск трьохвісного автомобіля на мостову плиту.

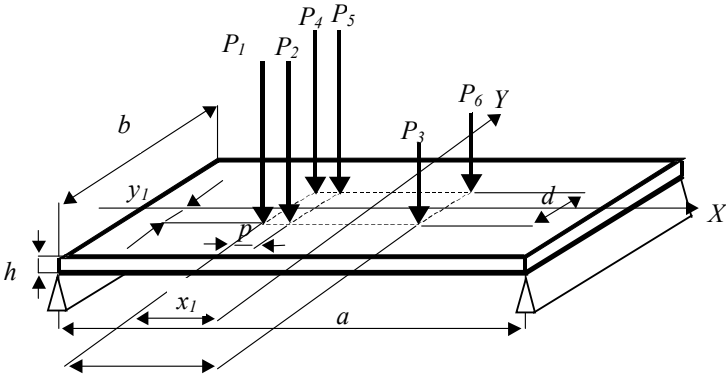


Рис. 4.36. Локальні сили  $P_1 - P_6$ , що моделюють тиск на мостову плиту трьохвісного автомобіля.

Візьмемо навантаження та схему розміщення згідно з нормативом Н-30 [28, 111]:  $P_1 = P_2 = P_4 = P_5 = 60 \cdot 10^3 \text{ Н}$  та  $P_3 = P_6 = 30 \cdot 10^3 \text{ Н}$ .



Інші розміри:

$$l = 7,6 \text{ м}, \quad d = 1,6 \text{ м}, \quad p = 1,9 \text{ м}, \quad a = 46 \text{ м}, \quad b = 9 \text{ м} \text{ та } h = 1 \text{ м}$$

Координати сили  $P_1$  задамо:

$$x_1 = -3,8 \text{ м}, \quad y_1 = -0,95 \text{ м}.$$

Координати інших сил розрахуємо:

$$P_2: \quad x_2 = x_1 + p \cos(\theta); \quad y_2 = y_1 + p \sin(\theta); \quad (4.10)$$

$$P_3: \quad x_3 = x_1 + l \cos(\theta); \quad y_3 = y_1 + l \sin(\theta); \quad (4.11)$$

$$P_4: \quad x_4 = x_1 + \sqrt{l^2 + d^2} \cos(\theta + \alpha_1); \quad y_4 = y_1 + \sqrt{l^2 + d^2} \sin(\theta + \alpha_1); \quad (4.12)$$

$$P_5: \quad x_5 = x_1 + \sqrt{p^2 + d^2} \cos(\theta + \alpha_2); \quad y_5 = y_1 + \sqrt{p^2 + d^2} \sin(\theta + \alpha_2); \quad (4.13)$$

$$P_6: \quad x_6 = x_1 - d \sin(\theta); \quad y_6 = y_1 + d \cos(\theta). \quad (4.14)$$

У формулах (4.10) – (4.14):

$$\alpha_1 = \arctg\left(\frac{d}{l}\right); \quad \alpha_2 = \arctg\left(\frac{d}{p}\right),$$

$\theta$  – кут між додатнім напрямком осі  $x$ -ів та площиною розміщення сил  $P_1, P_2, P_3$ . ( $\theta = 0$ ).

Навантаження системи локальних сил сформуємо так:

$$q(x, y) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N Q_{m,n} \exp \left( 2\pi i \left( m \frac{x}{a} + n \frac{y}{b} \right) \right) \right] =$$

$$\left\{ \begin{aligned} & P_1 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{m \frac{x-x_1}{a}}{+ n \frac{y-y_1}{b}} \right) \right] + P_2 \cdot \cos \left[ 2\pi \left( \frac{m \frac{x-x_2}{a}}{+ n \frac{y-y_2}{b}} \right) \right] + \\ & + P_3 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{m \frac{x-x_3}{a}}{+ n \frac{y-y_3}{b}} \right) \right] + P_4 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{m \frac{x-x_4}{a}}{+ n \frac{y-y_4}{b}} \right) \right] + \\ & + P_5 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{m \frac{x-x_5}{a}}{+ n \frac{y-y_5}{b}} \right) \right] + P_6 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{m \frac{x-x_6}{a}}{+ n \frac{y-y_6}{b}} \right) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4.15)$$

За локального навантаження плити  $q(x, y) = P_1 \delta(x-x_1) \delta(y-y_1) + P_2 \delta(x-x_2) \delta(y-y_2) + P_3 \delta(x-x_3) \delta(y-y_3) + P_4 \delta(x-x_4) \delta(y-y_4) + P_5 \delta(x-x_5) \delta(y-y_5) + P_6 \delta(x-x_6) \delta(y-y_6)$ , де  $\delta(x-x_i)$  та  $\delta(y-y_i)$   $\delta$  – функції.

Коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є навантаження  $q(x, y)$  будуть такими:

$$Q_{m,n} = \frac{1}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q(x, y) \exp\left(-2\pi i \left(m \frac{x}{a} + n \frac{y}{b}\right)\right) dx dy. \quad (4.16)$$

Після інтегрування маємо:

$$Q_{m,n} = \frac{1}{ab} \left[ \begin{aligned} & P_1 \exp\left(-2\pi i \left(m \frac{x_1}{a} + n \frac{y_1}{b}\right)\right) + P_2 \exp\left(-2\pi i \left(m \frac{x_2}{a} + n \frac{y_2}{b}\right)\right) + \\ & P_3 \exp\left(-2\pi i \left(m \frac{x_3}{a} + n \frac{y_3}{b}\right)\right) + P_4 \exp\left(-2\pi i \left(m \frac{x_4}{a} + n \frac{y_4}{b}\right)\right) + \\ & P_5 \exp\left(-2\pi i \left(m \frac{x_5}{a} + n \frac{y_5}{b}\right)\right) + P_6 \exp\left(-2\pi i \left(m \frac{x_6}{a} + n \frac{y_6}{b}\right)\right) \end{aligned} \right]. \quad (4.17)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (4.7) представляємо у вигляді, що дає можливість розділити змінні:

$$w_0 = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left( X(x)_n \exp\left(2\pi i n \frac{y}{b}\right) + Y(y)_m \exp\left(2\pi i m \frac{x}{a}\right) \right). \quad (4.18)$$

Знаходимо похідні:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = D_{11} \exp\left(2\pi i n \frac{y}{b}\right) \frac{\partial^4 X(x)_n}{\partial x^4} + D_{11} \frac{16\pi^4 m^4}{a^4} \exp\left(2\pi i m \frac{x}{a}\right) Y(y)_m;$$

$$2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} = 2(D_{12} + 2D_{66}) \left[ \begin{aligned} & -\frac{4\pi^2 n^2}{b^2} \exp\left(2\pi i n \frac{y}{b}\right) \frac{\partial^2 X(x)_n}{\partial x^2} - \\ & -\frac{4\pi^2 m^2}{a^2} \exp\left(2\pi i m \frac{x}{a}\right) \frac{\partial^2 Y(y)_m}{\partial y^2} \end{aligned} \right];$$

$$D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = D_{22} \frac{16\pi^4 n^4}{b^4} \exp\left(2\pi i n \frac{y}{b}\right) X(x)_n + D_{22} \exp\left(2\pi i m \frac{x}{a}\right) \frac{\partial^4 Y(y)_m}{\partial y^4}.$$

Підставляючи розв'язок (4.18) у рівняння (4.7) і розділяючи змінні, приходимо до двох звичайних диференціальних рівнянь щодо невідомих функцій  $X(x)_n$  та  $Y(y)_m$

$$\begin{aligned}
D_{11} \frac{\partial^4 X(x)_n}{\partial x^4} - 8(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \frac{\partial^2 X(x)_n}{\partial x^2} + D_{22} \frac{16\pi^4 n^4}{b^4} X(x)_n &= 0; \\
D_{22} \frac{\partial^4 Y(y)_m}{\partial y^4} - 8(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \frac{\partial^2 Y(y)_m}{\partial y^2} + D_{11} \frac{16\pi^4 m^4}{a^4} Y(y)_m &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.19}$$

Розв'язки рівнянь (4.15) вибираємо у вигляді:

$$\begin{aligned}
X(x)_n &= R_{1,n} \exp(\lambda_{1,n} x); \\
Y(y)_m &= R_{2,m} \exp(\lambda_{2,m} y),
\end{aligned}
\tag{4.20}$$

де  $R_{1,n}$ ,  $R_{2,m}$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  – невідомі параметри.

Підставляючи співвідношення (4.20) у рівняння (4.19), приходимо до двох характеристичних рівнянь стосовно невідомих параметрів:

$$\begin{aligned}
D_{11} \lambda_{1,n}^4 - 8(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \lambda_{1,n}^2 + D_{22} \frac{16\pi^4 n^4}{b^4} &= 0; \\
D_{22} \lambda_{2,m}^4 - 8(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \lambda_{2,m}^2 + D_{11} \frac{16\pi^4 m^4}{a^4} &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

Звідси отримуємо формули для визначення параметрів  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ :

$$\lambda_{1,n} = \pm 2 \frac{\pi n}{b} \sqrt{\frac{D_{12} + 2D_{66} \pm \sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 - D_{11} D_{22}}}{D_{11}}}; \tag{4.22.1}$$

$$\lambda_{2,m} = \pm 2 \frac{\pi m}{a} \sqrt{\frac{D_{12} + 2D_{66} \pm \sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 - D_{11} D_{22}}}{D_{22}}}; \tag{4.22.2}$$

Введемо у розгляд знакові функції:

$$f_{1,\nu} = (-1)^\nu \text{ та } f_{2,\nu} = -5 + \frac{31}{3}\nu - 5\nu^2 + \frac{2}{3}\nu^3.$$

Підставимо знакові функції у 4.22.1-4.22.2 і одержимо:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,n,\nu} &= f_{1,\nu} \frac{2\pi n}{b} \sqrt{\frac{D_{12} + 2D_{66} + f_{2,\nu} \sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 - D_{11} D_{22}}}{D_{11}}}; \\
\lambda_{2,m,\nu} &= f_{1,\nu} \frac{2\pi m}{a} \sqrt{\frac{D_{12} + 2D_{66} + f_{2,\nu} \sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 - D_{11} D_{22}}}{D_{22}}}.
\end{aligned}
\tag{4.23}$$

Параметри  $R_{1,n}$ ,  $R_{2,m}$  знаходимо з граничних умов на бокових гранях плити.

На поздовжніх (вільно опертих краях) повинні виконуватись умови:

$$w|_{x=-\frac{a}{2}} = 0, \quad w|_{x=\frac{a}{2}} = 0, \quad M_{11}|_{x=-\frac{a}{2}} = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0; \quad (4.24)$$

$$M_{11}|_{x=\frac{a}{2}} = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0. \quad (4.25)$$

На поперечних (вільних) краях маємо умови:

$$M_{22}|_{y=-\frac{b}{2}} = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \quad M_{22}|_{y=\frac{b}{2}} = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0; \quad (4.26)$$

$$V_2|_{y=-\frac{b}{2}} = -\left(D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) = 0; \quad (4.27)$$

$$V_2|_{y=\frac{b}{2}} = -\left(D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) = 0,$$

де  $M_{11}, M_{22}$  згинальні моменти в площинах  $x = const, y = const$ ,  $V_2$  – узагальнена поперечна сила.

Ми отримали розв’язок диференціального рівняння (4.1) у вигляді розкладу в комплексний ряд Фур’є, що має вигляд:

$$w = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left( \begin{aligned} &R_{1,n} \exp(\lambda_{1,n} x) \exp\left(2\pi i n \frac{y}{b}\right) + \\ &R_{2,m} \exp(\lambda_{2,m} y) \exp\left(2\pi i m \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \right) + \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N A_{m,n} \exp\left(2\pi i \left(m \frac{x}{a} + n \frac{y}{b}\right)\right). \quad (4.28)$$

Реальна частина розв’язку:

$$\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} \left( \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left( \begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^4 R_{1,n,\nu} \exp(\lambda_{1,n,\nu} x) \exp\left(2\pi i n \frac{y}{b}\right) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^4 R_{2,m,\nu} \exp(\lambda_{2,m,\nu} y) \exp\left(2\pi i m \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \right) + \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N A_{m,n} \exp\left(2\pi i \left(m \frac{x}{a} + n \frac{y}{b}\right)\right) \right). \quad (4.29)$$

Частинний і загальний розв’язки у вигляді (4.3) та (4.18) відповідно і виділення реальної частини дають можливість врахувати випадки, коли  $\lambda_1, \lambda_2$  мають комплексні значення.

У [44] розглянуто вісім параметрів  $R_{1,n,\nu}$  та  $R_{2,m,\nu}$  ( $\nu = 1, 2, 3, 4$ ) для одної гармоніки розкладу розв’язку диференціального рівняння в ряд Фур’є.

Для знаходження загального розв'язку однорідного рівняння (4.7), що відповідає диференціальному рівнянню (4.1), та загального розв'язку диференціального рівняння (4.1) зі врахуванням крайових умов, знайдемо 8 локальних констант як розв'язок системи восьми рівнянь:

$$A\bar{R} = \bar{B}, \quad (4.30)$$

де  $A$  – матриця системи розміром  $8$  рядків та  $2(M+N+1)v$  – стовпців,  $\bar{R}$  – вектор невідомих,  $\bar{B}$  – вектор вільних членів.

За умовою Кронекера-Капеллі [56] така система рівнянь сумісна і має безліч розв'язків тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.

Знайдемо елементи матриці  $A$  та вектор вільних членів  $\bar{B}$ :

$$A_{1,n_v} = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{1,n_v}a\right)\exp\left(2\pi in\frac{y}{b}\right); \quad (4.31)$$

$$A_{1,m_v} = \exp(\lambda_{2,m_v}a)\exp(-i\pi m); \quad (4.32)$$

$$B_1 = -\sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N A_{m,n} \exp\left(2i\pi\left(-\frac{1}{2}m + n\frac{y}{b}\right)\right); \quad (4.33)$$

$$A_{2,n_v} = \left( \begin{array}{c} -D_{11}\lambda_{1,n_v}^2 + \\ + 4D_{12}\pi^2 \frac{n^2}{b^2} \end{array} \right) \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{1,n_v}a\right) \times \exp\left(2\pi in\frac{y}{b}\right); \quad (4.34)$$

$$A_{2,m_v} = \left( \begin{array}{c} 4D_{11}\pi^2 \frac{m^2}{a^2} - \\ - D_{12}\lambda_{2,m_v}^2 \end{array} \right) \exp(\lambda_{2,m_v}a) \times \exp(-i\pi m); \quad (4.35)$$

$$B_2 = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left[ \begin{array}{c} -4\pi^2 A_{m,n} \left( D_{11} \frac{m^2}{a^2} + D_{12} \cdot \frac{n^2}{b^2} \right) \times \\ \times \exp\left(2i\pi\left(-\frac{1}{2}m + n\frac{y}{b}\right)\right) \end{array} \right]; \quad (4.36)$$

$$A_{3,n_v} = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda_{1,n_v}a\right)\exp\left(2\pi in\frac{y}{b}\right); \quad (4.37)$$

$$A_{3,m_v} = \exp(\lambda_{2,m_v}a)\exp(i\pi m); \quad (4.38)$$

$$B_3 = -\sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N A_{m,n} \exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}m + n\frac{y}{b}\right)\right); \quad (4.39)$$

$$A_{4,n_v} = \begin{pmatrix} -D_{11}\lambda_{1,n_v}^2 + \\ +4D_{12}\pi^2 \frac{n^2}{b^2} \end{pmatrix} \exp\left(\frac{1}{2}\lambda_{1,n_v} a\right) \times \exp\left(2\pi i n \frac{y}{b}\right); \quad (4.40)$$

$$A_{4,m_v} = \left(4D_{11}\pi^2 \frac{m^2}{a^2} - D_{12}\lambda_{2,m_v}^2\right) \exp(\lambda_{2,m_v} y) \times \exp(i\pi m); \quad (4.41)$$

$$B_4 = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left[ \begin{aligned} & -4\pi^2 A_{m,n} \left( D_{11} \frac{m^2}{a^2} + D_{12} \frac{n^2}{b^2} \right) \times \\ & \times \exp\left(2i\pi \left(\frac{1}{2}m + n \frac{y}{b}\right)\right) \end{aligned} \right]; \quad (4.42)$$

$$A_{5,n_v} = \begin{pmatrix} -D_{12}\lambda_{1,n_v}^2 + \\ +4D_{22}\pi^2 \frac{n^2}{b^2} \end{pmatrix} \exp\left(\frac{1}{2}\lambda_{1,n_v} x\right) \times \exp(-\pi i n); \quad (4.43)$$

$$A_{5,m_v} = \begin{pmatrix} 4D_{12}\pi^2 \frac{m^2}{a^2} - \\ -D_{22}\lambda_{2,m_v}^2 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{2,m_v} b\right) \times \exp\left(2i\pi m \frac{x}{a}\right); \quad (4.44)$$

$$B_5 = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left[ \begin{aligned} & -4\pi^2 A_{m,n} \left( D_{12} m^2/a^2 + D_{22} n^2/b^2 \right) \times \\ & \times \exp(i\pi(mx - n)) \end{aligned} \right]; \quad (4.45)$$

$$A_{6,n_v} = 2i\pi \frac{n}{b} \begin{pmatrix} 4D_{22}\pi^2 \frac{n^2}{b^2} - \\ -(D_{12} + 4D_{66})\lambda_{1,n_v}^2 \end{pmatrix} \times \exp(\lambda_{1,n_v} x) \exp(-\pi i n); \quad (4.46)$$

$$A_{6,m_v} = \begin{pmatrix} -D_{22}\lambda_{2,m_v}^2 + \\ +4(D_{12} + 4D_{66})\pi^2 \frac{m^2}{a^2} \end{pmatrix} \lambda_{2,m_v} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{2,m_v} b\right) \exp\left(2i\pi m \frac{x}{a}\right); \quad (4.47)$$

$$B_6 = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left[ \begin{aligned} & -8i\pi^3 A_{m,n} \frac{n}{b} \left( D_{22} \frac{n^2}{b^2} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{m^2}{a^2} \right) \times \\ & \times \exp\left(2i\pi \left(\frac{x}{a} m - n \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned} \right]; \quad (4.48)$$

$$A_{7,n_v} = \begin{pmatrix} -D_{12}\lambda_{1,n_v}^2 + \\ + 4D_{22}\pi^2 \frac{n^2}{b^2} \end{pmatrix} \times \exp(\lambda_{1,n_v}x) \exp(\pi in); \quad (4.49)$$

$$A_{7,m_v} = \begin{pmatrix} 4D_{12}\pi^2 \frac{m^2}{a^2} - \\ - D_{22}\lambda_{2,m_v}^2 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{1}{2}\lambda_{2,m_v}b\right) \times \exp\left(2i\pi m \frac{x}{a}\right); \quad (4.50)$$

$$B_7 = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left[ \begin{array}{l} -4\pi^2 A_{m,n} \left( D_{12} \frac{m^2}{a^2} + D_{22} \frac{n^2}{b^2} \right) \times \\ \times \exp\left(2i\pi \left( \frac{x}{a}m + n \frac{1}{2} \right)\right) \end{array} \right]; \quad (4.51)$$

$$A_{8,n_v} = 2i\pi \frac{n}{b} \begin{pmatrix} 4D_{22}\pi^2 \frac{n^2}{b^2} - \\ - (D_{12} + 4D_{66})\lambda_{1,n_v}^2 \end{pmatrix} \times \exp\left(\frac{1}{2}\lambda_{1,n_v}x\right) \exp(\pi in); \quad (4.52)$$

$$A_{8,m_v} = \begin{pmatrix} -D_{22}\lambda_{2,m_v}^2 + \\ + 4(D_{12} + 4D_{66})\pi^2 \frac{m^2}{a^2} \end{pmatrix} \lambda_{2,m_v} \times \exp\left(\frac{1}{2}\lambda_{2,m_v}b\right) \exp\left(2i\pi m \frac{x}{a}\right); \quad (4.53)$$

$$B_8 = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left[ \begin{array}{l} -8i\pi^3 A_{m,n} \frac{n}{b} \left( D_{22} \frac{n^2}{b^2} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{m^2}{a^2} \right) \times \\ \times \exp\left(2i\pi \left( \frac{x}{a}m + n \frac{1}{2} \right)\right) \end{array} \right]. \quad (4.54)$$

Матриця А та вектор вільних членів В виглядатимуть так:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,n_v}}{A_{2,n_v}} & \frac{A_{1,m_v}}{A_{2,m_v}} \\ \frac{A_{3,n_v}}{A_{4,n_v}} & \frac{A_{3,m_v}}{A_{4,m_v}} \\ \frac{A_{5,n_v}}{A_{6,n_v}} & \frac{A_{5,m_v}}{A_{6,m_v}} \\ \frac{A_{7,n_v}}{A_{8,n_v}} & \frac{A_{7,m_v}}{A_{8,m_v}} \end{pmatrix} - \text{матриця системи, } \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{B_1}{B_2} \\ \frac{B_3}{B_4} \\ \frac{B_5}{B_6} \\ \frac{B_7}{B_8} \end{pmatrix} - \text{вектор.} \quad (4.55)$$

$$\bar{A} = \left( A \mid \vec{B} \right) - \text{розширена матриця системи.} \quad (4.56)$$

Нами доведено, що ранг матриці  $A$  дорівнює рангу розширеної матриці  $\bar{A}$  та кількості крайових умов, а отже кількості рівнянь системи, зокрема восьми. Таким чином система має єдиний розв'язок.

Розглянемо питання адекватності математичної моделі ортотропної плити, диференціальне рівняння (4.1) та модельованого об'єкта, конструктивного елемента мостової конструкції, ортотропної залізобетонної плити. Підставивши у формулу (4.22) математичні вирази циліндричних жорсткостей  $D_{ij}$  і врахувавши співвідношення (4.8) та (4.9), одержимо

$$\lambda_{1,n,v} = f_{1,v} \frac{\pi n}{b} \lambda_1 \quad \text{та} \quad \lambda_{2,b,v} = f_{1,v} \frac{\pi n}{a} \lambda_2, \quad \text{де}$$

$$\lambda_1 = 2\sqrt{3} \sqrt{\left( \frac{\nu_{12}}{12} \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} + \frac{G}{6} + \frac{1}{12} \sqrt{144 \left( \frac{\nu_{12}}{12} \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} + \frac{G}{6} \right)^2 - \frac{E_1^3 E_2}{(\nu_{12}^2 E_2 - E_1)^2}} \right) E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ E_1 E_2 \\ -\frac{\nu_{12}^2}{E_1} \end{pmatrix}} \quad (4.57)$$

;

$$\lambda_2 = 2\sqrt{3} \sqrt{\left( \frac{\nu_{12}}{12} \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} + \frac{G}{6} - \frac{1}{12} \sqrt{144 \left( \frac{\nu_{12}}{12} \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} + \frac{G}{6} \right)^2 - \frac{E_1^3 E_2}{(\nu_{12}^2 E_2 - E_1)^2}} \right) E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ E_1 E_2 \\ -\frac{\nu_{12}^2}{E_1} \end{pmatrix}} \quad (4.58)$$

Значення знакової функції  $f_{1,v}$  у формулі (4.57) прийнято рівним «+», а у формулі (4.57) відповідно «-». Останні вирази можуть набувати як дійсних, так і комплексних значень. На рис. 4.37 (а, б) зображено уявні частини  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  як функції двох змінних  $E_1$  та  $E_2$  при  $\nu_{12} = 0,2$  та

$G = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}$ , на рис. 4.38 (а, б) зображено уявні частини  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  як функції двох змінних  $E_1$  та  $E_2$  при  $G = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{12})}$ . Як бачимо з рисунків, уявні частини  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  дорівнюють нулю не при всіх значеннях змінних  $E_1$  та  $E_2$ .

Параметри  $\lambda_{1,n,v}$  та  $\lambda_{2,b,v}$  входять у співвідношення (4.28), що є розв'язком диференціального рівняння (4.1), і описують поперечну деформацію ортотропної залізобетонної мостової плити. При реальних значеннях  $\lambda_{1,n,v}$  та  $\lambda_{2,b,v}$  поперечна деформація  $w(x, y)$ , за будь-якого розв'язку – у вигляді тригонометричного чи комплексного ряду з виділенням реальної частини, матиме реальні значення, а при комплексних значеннях  $\lambda_{1,n,v}$  та  $\lambda_{2,b,v}$  поперечний прогин  $w(x, y)$  визначатиметься комплексними числами.



Як видно з рис. 4.37 та 4.38, диференціальне рівняння (4.1) має дійсні розв'язки у двох випадках: при  $G=E_1/2/(1+\nu_{12})$  та  $E_1 > kE_2$  і при  $G=E_2/2/(1+\nu_{12})$  та  $E_2 > kE_1$  ( $k$  – безрозмірний коефіцієнт, що має певне значення).

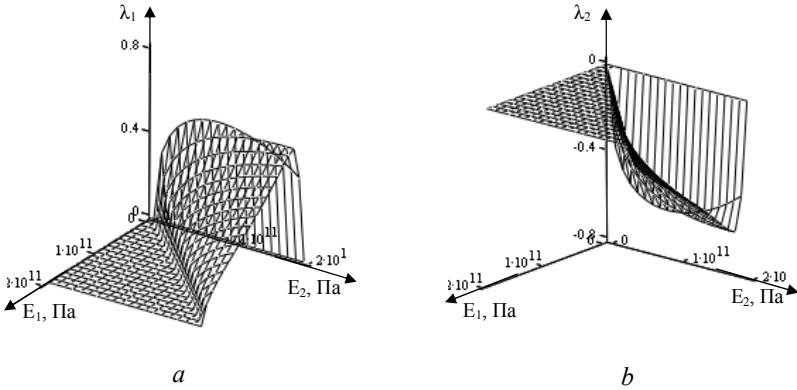


Рис. 4.37 а – уявна частина  $\lambda_1$  (випукла поверхня), функції двох змінних  $E_1$  та  $E_2$  при  $G=E_1/2/(1+\nu_{12})$ ,  
 б – уявна частина  $\lambda_2$  (увігнута поверхня), функції двох змінних  $E_1$  та  $E_2$  при  $G=E_1/2/(1+\nu_{12})$ .

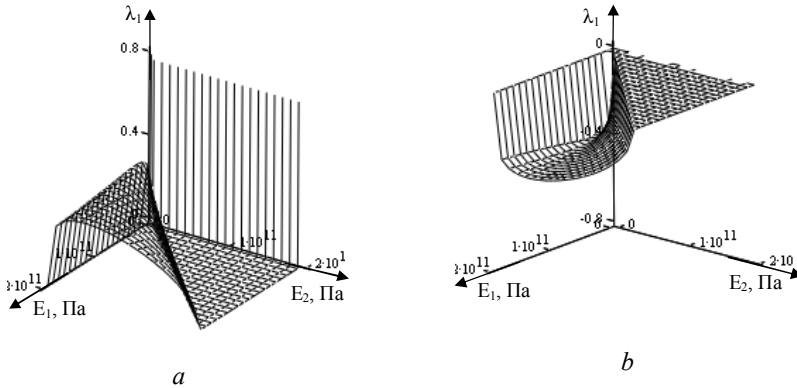


Рис. 4.38 а – уявна частини  $\lambda_1$  (випукла поверхня), функції двох змінних  $E_1$  та  $E_2$  при  $G=E_2/2/(1+\nu_{12})$ ,  
 б – уявна частини  $\lambda_2$  (увігнута поверхня), функції двох змінних  $E_1$  та  $E_2$  при  $G=E_2/2/(1+\nu_{12})$ .

Отже, з результату проведених нами досліджень випливає, що модель ортотропної тонкої плити, представлена диференціальним рівнянням (4.1), у математичному плані є ширшою, оскільки має як дійсні, так і комплекс-

ні розв'язки. Саме тому, щоб розширити математичну модель максимально, нами було вибрано комплексний ряд для представлення розв'язку.

На рис. 4.39 і 4.40 зображено поверхневі гафіки двох дійсних розв'язків диференціального рівняння ортотропної плити.

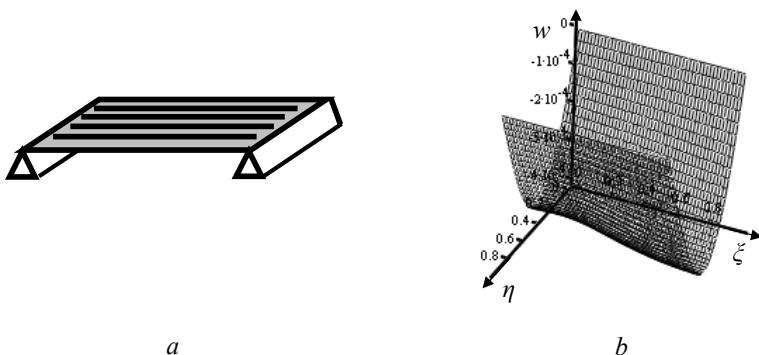


Рис. 4.39. Ортотропна вільно оперта плита  $E_1 > E_2$  (а – поздовжнє армування, б – прогин плити,  $E_1$  – модуль пружності вздовж плити,  $E_2$  – модуль пружності поперек плити).

На рис. 4.39 зображено прогин плити:

$$w(\eta, \xi) = \sin(m\pi\eta) [A_m \operatorname{sh}(\lambda_1 m \xi) + B_m \operatorname{ch}(\lambda_2 m \xi) + C_m \sin(\lambda_3 m \xi) + D_m \cos(\lambda_4 m \xi) + \varphi_1(\xi)] \quad (4.59)$$

за результатами статичних випробовувань моста через р. Стара ріка [19].

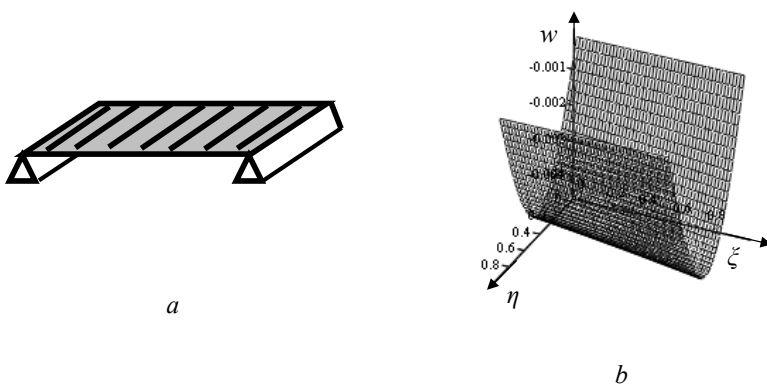


Рис. 4.40. Ортотропна вільно оперта плита  $E_1 < E_2$  (а – поздовжнє армування, б – прогин плити,  $E_1$  – модуль пружності вздовж плити,  $E_2$  – модуль пружності поперек плити).

На рис. 4.40 зображено, яким би був прогин плити:

$$w(\eta, \xi) = \sin(m\pi\eta) \left[ e^{\operatorname{Re}(\lambda_1 m \xi)} (A_m \sin(\operatorname{Im}(\lambda_1) m \xi) + B_m \cos(\operatorname{Im}(\lambda_1) m \xi)) + e^{\operatorname{Re}(\lambda_3 m \xi)} (C_m \sin(\operatorname{Im}(\lambda_3) m \xi) + D_m \cos(\operatorname{Im}(\lambda_3) m \xi)) + \varphi_2(\xi) \right] \quad (4.60)$$

за поперечного армування і за того ж навантаження. Результати розрахунків наступні. Прогин 4,48 мм., модулі пружності відповідно  $E_1 = 2 \times 10^{10}$  Па та  $E_2 = 2 \times 10^{11}$  Па, циліндричні жорсткості  $D_{11} = 2,608 \times 10^9$  Нм;  $D_{22} = 2,608 \times 10^{10}$  Нм;  $D_{12} = 1,043 \times 10^9$  Нм;  $D_{66} = 1,234 \times 10^9$  Нм. Отже, прогин був би набагато більшим. Останній розв'язок містить суто теоретичний інтерес, оскільки на практиці застосовується поздовжнє армування мостової плити.

Прогин моста становив 0,41 мм. Модулі пружності відповідно  $E_1 = 2 \times 10^{11}$  Па та  $E_2 = 2 \times 10^{10}$  Па. Розраховані циліндричні жорсткості  $D_{11} = 2,608 \times 10^{10}$  Нм;  $D_{22} = 2,608 \times 10^9$  Нм;  $D_{12} = 1,043 \times 10^9$  Нм;  $D_{66} = 9,167 \times 10^9$  Нм.

Окреслимо наші подальші дослідження і перейдемо до іншої моделі тонкої плити, що не містить комплексних параметрів, залежних від реальних характеристик фізичного об'єкта, моделі, що надасть можливість пов'язати результати статичних випробувань з інтегральними фізичними характеристиками мостової ортотропної плити.

### 4.3. Визначення напружено-деформованого стану вільно опертої мостової плити під дією рівномірно розподіленого навантаження

У цьому параграфі отримаємо співвідношення, що пов'язують результати статичних та динамічних випробувань з інтегральною циліндричною жорсткістю мостової плити, ефективним значенням модуля пружності, ефективною товщиною та густиною матеріалу плити. Отримані співвідношення застосовуємо на практиці для обробки результатів натурального експерименту.

Диференціальне рівняння Софі Жермен [36], що описує деформацію тонкої пластини (плити), можна записати так:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q. \quad (4.61)$$

де  $D$  – циліндрична жорсткість плити,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа,  $w$  – поперечна деформація плити,  $q$  – питоме навантаження.

Диференціальне рівняння (4.61) за певних крайових умов можна застосувати для моделювання деформації проїзної частини моста.

Об'єктом дослідження є статично навантажений міст.

Представимо статично навантажений міст як ізотропну залізобетонну плиту ефективною товщиною  $h$ . Запишемо диференціальне рівняння (1) у змінних  $(\eta, \xi)$  –

$$\eta = \frac{x}{a}, \quad \xi = \frac{y}{b}, \quad (4.62)$$

де  $a$  – довжина плити,  $b$  – ширина плити, що дозволяють компактно представити результати.

Диференціальне рівняння деформації плити:

$$\frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + 2 \frac{1}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial^2 \eta \partial^2 \xi} + \frac{1}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = \frac{1}{D} q(\eta, \xi). \quad (4.63)$$

Розв'язок знайдемо, розділивши змінні  $\eta$  та  $\xi$ :

$$w(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(\xi) \sin(i\pi\eta), \quad (4.64)$$

де

$$Y_i(\xi) = A_i \operatorname{sh}(\alpha\xi) + B_i \operatorname{ch}(\alpha\xi) + C_i \xi \operatorname{sh}(\alpha\xi) + D_i \xi \operatorname{ch}(\alpha\xi) + \varphi_i(\xi) \quad (4.65)$$

та

$$\alpha = \frac{b}{a} i\pi. \quad (4.66)$$

При  $q = \operatorname{const}$  частковий розв'язок неоднорідного рівняння щодо змінної  $\xi$ , що утворюється з (4.63) при розділенні змінних:

$$\varphi_i(\xi) = \frac{2q}{D} \frac{a^4}{(i\pi)^5} (1 - \cos(i\pi)) = \frac{2q}{D} \frac{a^4}{(i\pi)^5} (1 - (-1)^i) = \operatorname{const}. \quad (4.67)$$

Крайові умови для плити, вільно опертої на краях  $\eta=0;1$  та вільної на інших:

$$w(0, \xi) = w(1, \xi) = 0; \quad M_1(0, \xi) = M_1(1, \xi) = 0; \quad (4.68)$$

$$M_2(\eta, 0) = M_2(\eta, 1) = 0; \quad V_2(\eta, 0) = V_2(\eta, 1) = 0, \quad (4.69)$$

де

$$M_1 = -D \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right); \quad (4.70)$$

$$M_2 = -D \left( \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right); \quad V_2 = -D \left( \frac{1}{b^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2 - \nu) \frac{1}{a^2 b} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right). \quad (4.71)$$

Розв'язок (4.66) побудований так, що задовольняє крайові умови (4.66).

Із крайових умов (4.68, 4.69) впливає система чотирьох рівнянь для знаходження констант  $A_i, B_i, C_i, D_i$ .

У матричному варіанті система рівнянь має вигляд:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Елементи матриці:

$$\begin{aligned} M_{11} = M_{14} = M_{32} = M_{33} = 0; \quad M_{12} = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 - \nu \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2; \quad M_{13} = 2\frac{\alpha}{b^2}; \\ M_{21} = M_{12}sh(\alpha); \quad M_{22} = M_{12}ch(\alpha); \quad M_{23} = M_{12}sh(\alpha) + M_{13}ch(\alpha); \\ M_{24} = M_{13}sh(\alpha) + M_{12}ch(\alpha); \quad M_{31} = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^3 - (2-\nu)\frac{\alpha}{b}\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2; \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$M_{34} = 3\frac{\alpha^2}{b^3} - (2-\nu)\frac{1}{b}\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2; \quad M_{41} = M_{31}ch(\alpha), \quad M_{42} = M_{31}sh(\alpha);$$

$$M_{43} = M_{34}sh(\alpha) + M_{31}ch(\alpha); \quad M_{44} = M_{31}sh(\alpha) + M_{34}ch(\alpha).$$

Елементи правої частини системи:

$$V = 2\frac{\nu}{(i\pi)^3}\frac{a^2q}{D}[1 - (-1)^i]. \quad (4.74)$$

Розв'язок системи (4.72):

$$A_i = -\frac{1+\nu}{i\pi}a^3b \frac{V \left[ \frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)}\frac{a}{b}sh\left(i\pi\frac{b}{a}\right) + 1 \right] \left[ ch\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - 1 \right]}{\left\{ [(3+\nu)a]^2 + [(1-\nu)i\pi b]^2 \right\} sh^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - \left\{ [(1-\nu)i\pi b]ch\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right\}^2}, \quad (4.75.1)$$

$$B_i = -\frac{1+\nu}{i\pi}a^3b \frac{V \frac{2}{1+\nu} \left\{ sh\left(i\pi\frac{b}{a}\right) + \frac{(\nu-1)i\pi}{2}\frac{b}{a} \left[ \frac{(3+4\nu+\nu^2)a^2 + [(1-\nu)i\pi b]^2}{[(1-\nu)i\pi b]^2} sh^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - ch^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right] \right\}}{\left\{ [(3+\nu)a]^2 + [(1-\nu)i\pi b]^2 \right\} sh^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - \left\{ [(1-\nu)i\pi b]ch\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right\}^2}. \quad (4.75.2)$$

$$C_i = -\frac{1+\nu}{i\pi} a^3 b \frac{V \frac{b}{a} \frac{i\pi(\nu-1)}{1+\nu} \operatorname{sh}\left(i\pi \frac{b}{a}\right) \left[1 - \frac{3+\nu}{i\pi(\nu-1)} \frac{a}{b} \operatorname{sh}\left(i\pi \frac{b}{a}\right)\right]}{\left\{[(3+\nu)a]^2 + [(1-\nu)i\pi b]^2\right\} \operatorname{sh}^2\left(i\pi \frac{b}{a}\right) - \left\{[(1-\nu)i\pi b] \operatorname{ch}\left(i\pi \frac{b}{a}\right)\right\}^2}, \quad (4.75.3)$$

$$D_i = -\frac{1+\nu}{i\pi} a^3 b \frac{V \frac{b}{a} \frac{i\pi(1-\nu)}{1+\nu} \left[\frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)} \frac{a}{b} \operatorname{sh}\left(i\pi \frac{b}{a}\right) + 1\right] \left[\operatorname{ch}\left(i\pi \frac{b}{a}\right) - 1\right]}{\left\{[(3+\nu)a]^2 + [(1-\nu)i\pi b]^2\right\} \operatorname{sh}^2\left(i\pi \frac{b}{a}\right) - \left\{[(1-\nu)i\pi b] \operatorname{ch}\left(i\pi \frac{b}{a}\right)\right\}^2}, \quad (4.75.4)$$

Використовуючи співвідношення (4.76), запишемо формулу для визначення жорсткості плити, що пов'язана з експериментально визначеною деформацією плити, наприклад, у точці  $\eta_p, \xi_p$  (4.77).

Дані статичних випробувань можна застосувати як вихідні і пов'язати їх через математичну модель із механічною характеристикою конструкції, котру назвемо інтегральною циліндричною жорсткістю моста.

Для прикладу ми застосували результати статичних випробувань моста через р. Стара ріка, що розташований на автомобільній дорозі Мукачєво-Рогатин, після реконструкції [19]. Загальна довжина моста  $a = 24,3$  м, ширина  $b = 8,3$  м. Як випробувальне навантаження використовували завантажений баластом автомобіль КраЗ вагою 22 т та стріловий колісний кран КС вагою 24 т (максимальна загальна вага навантаження 46 тонн). Максимальний прогин моста становив 0,41 мм. За формулою (4.77) було розраховано інтегральну циліндричну жорсткість прогонової будови моста – вона становить  $D = 3,048 \cdot 10^{10}$  Нм. Оскільки у процесі експлуатації конструкції в мостових плитах утворюються тріщини й циліндрична жорсткість зменшується, важливо знати відносну зміну циліндричної жорсткості, а не абсолютну.

Розв'язком рівняння (4.63) буде співвідношення (4.76).

Числове значення інтегральної циліндричної жорсткості мостової плити, отримане за формулою (4.77), є наближеним, оскільки ми вважали, що навантаження розподілене рівномірно. Такий розподіл має місце, наприклад, при деформації плити під дією власної ваги. Розподіл силових факторів, що зображені на графіках і виникають у процесі статичних випробувань, також є наближеним. У наступних дослідженнях ми зробимо послідовні кроки з уточнення моделі розподілу навантаження, отримаємо більш точні формули для розрахунку циліндричної жорсткості мостової плити і порівняємо моделі. Це дозволить зробити висновок

стосовно того, які параметри, що характеризують напружено-деформований стан, сильно, а які слабкіше залежать від того, наскільки точно математична модель наближена до модельованого об'єкта, мостової залізобетонної плити.

$$\begin{aligned}
 w(\eta, \xi) = & \frac{2(1+\nu)\nu qa^5}{\pi^4 Db} \times \\
 & \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^i}{i^4 \left\{ \left[ \left( (3+\nu)\frac{a}{b} \right)^2 + [(1-\nu)i\pi]^2 \right] \text{sh}^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - [(1-\nu)i\pi]^2 \text{ch}^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right\}} \times \\
 & \left[ \begin{aligned}
 & \left[ \frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)} \frac{a}{b} \text{sh}\left(i\pi\frac{b}{a}\right) + 1 \right] \left[ \text{ch}\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - 1 \right] \text{sh}(\alpha\xi) + \\
 & \frac{2}{1+\nu} \times \left\{ \text{sh}\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - \frac{i\pi(1-\nu)a}{2b} \left[ \frac{\nu^2 + 4\nu + 3^2}{\left[ (1-\nu)i\pi\frac{b}{a} \right]^2} + 1 \right] \text{sh}^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - \right. \\
 & \left. - \text{ch}^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right\} \times \\
 & \times \text{ch}(\alpha\xi) - \\
 & - \frac{b}{a} \frac{i\pi(1-\nu)}{1+\nu} \text{sh}\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \left[ 1 + \frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)} \frac{a}{b} \text{sh}\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right] \xi \cdot \text{sh}(\alpha\xi) + \\
 & + \frac{b}{a} \frac{i\pi(1-\nu)}{1+\nu} \left[ 1 + \frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)} \frac{a}{b} \text{sh}\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right] \left[ \text{ch}\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - 1 \right] \xi \cdot \text{ch}(\alpha\xi) + \\
 & + \frac{a}{b} \frac{(\nu+3)^2}{i\pi(1+\nu)\nu} \left( 1 - \text{ch}^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right) + \frac{b}{a} \frac{i\pi(1-\nu)}{(1+\nu)\nu} \\
 & \times \sin(i\pi\eta).
 \end{aligned} \right] \times \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

На рис. 4.41 зображено розклад у ряд Фур'є рівномірно розподіленого, по поверхні мостової плити, навантаження. На рис. 4.42 графічно зображено функцію двох змінних  $w(\eta, \xi)$  (поперечний прогин мостової плити), що задана аналітичним виразом (4.76), котрий ми отримали у результаті розв'язку диференціального рівняння (4.1).

За розрахованими нами значеннями циліндричної жорсткості та ефективною товщиною, використовуючи спрощену модель навантаження – рівномірний розподіл сили по поверхні плити, маємо поверхневі та контурні графіки поперечного прогину  $w$  (рис.4.42), згинальних моментів  $M_1$  та  $M_2$  (рис. 4.43, 4.44), крутного моменту  $H$  (рис. 4.45), зрі-

заючих сил  $Q_1$  та  $Q_2$  (рис. 4.46, 4.47), а також максимальні напруження в поперечному перерізі плити.

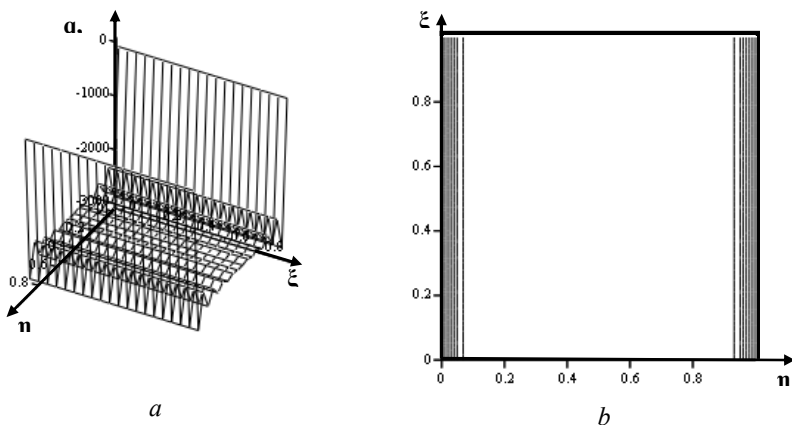


Рис. 4.41. Розклад у ряд Фур'є рівномірно розподіленого по поверхні плити навантаження: *a* – поверхневий графік, *b* – контурний графік.

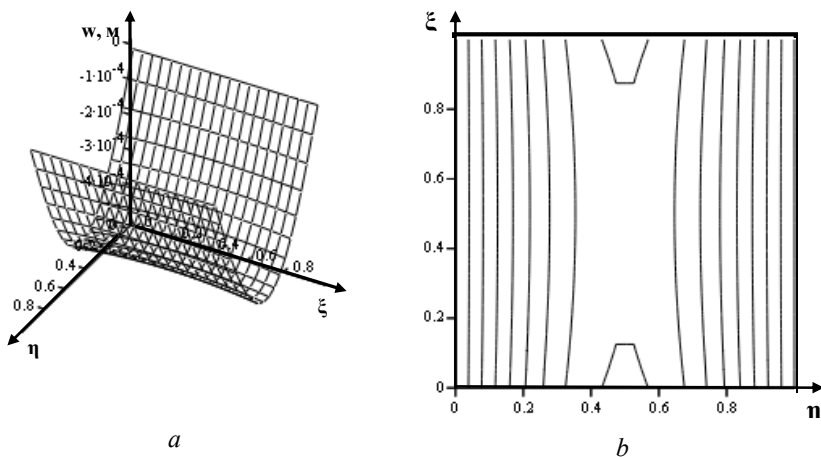


Рис. 4.42. Поперечна деформація в моста через *p*.  
 Стара: *a* – поверхневий графік,  
*b* – контурний графік.



$$\begin{aligned}
D &= \frac{2(1+\nu)\nu}{\pi^4} \frac{qa^5}{w(\eta_p, \xi_p)b} \times \\
&\times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^i}{i^4 \left\{ \left[ \left( (3+\nu)\frac{a}{b} \right)^2 + [(1-\nu)i\pi]^2 \right] sh^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - [(1-\nu)i\pi]^2 ch^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right\}} \times \\
&\left[ \begin{aligned}
&\left[ \frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)} \frac{a}{b} sh\left(i\pi\frac{b}{a}\right) + 1 \right] \left[ ch\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - 1 \right] sh(\alpha\xi) + \\
&\frac{2}{1+\nu} \times \left\{ sh\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - \frac{i\pi(1-\nu)a}{2b} \left[ \frac{\nu^2 + 4\nu + 3^2}{\left[ (1-\nu)i\pi\frac{b}{a} \right]^2} + 1 \right] sh^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - \right. \\
&\quad \left. - ch^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right\} \times \\
&\quad \times ch(\alpha\xi) - \\
&\quad - \frac{b}{a} \frac{i\pi(1-\nu)}{1+\nu} sh\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \left[ 1 + \frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)} \frac{a}{b} sh\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right] \xi \cdot sh(\alpha\xi) + \\
&\quad + \frac{b}{a} \frac{i\pi(1-\nu)}{1+\nu} \left[ 1 + \frac{3+\nu}{i\pi(1-\nu)} \frac{a}{b} sh\left(i\pi\frac{b}{a}\right) \right] \left[ ch\left(i\pi\frac{b}{a}\right) - 1 \right] \xi \cdot ch(\alpha\xi) + \\
&\quad + \frac{a}{b} \frac{(\nu+3)^2}{i\pi(1+\nu)\nu} \left( 1 - ch^2\left(i\pi\frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a} i\pi \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)\nu} \right) \\
&\quad \times \sin(i\pi\eta).
\end{aligned} \right] \times \tag{4.77}
\end{aligned}$$

Аналітичні вирази для інших функцій отримуються дією на функцію  $w(\eta, \xi)$  диференціальних операторів згинальних моментів, крутного моменту, зрізаючих сил  $-M_1, M_2, H, Q_1, Q_2$  відповідно. Одержані результати зображені на рис. 4.44-4.47 у вигляді поверхневих та контурних графіків.

Як бачимо, поверхневі та контурні графіки (рис. 4.42-4.47) мають високу ступінь симетричності, що зумовлено рівномірним розподілом навантаження по поверхні плити.

Застосовуючи співвідношення, що пов'язує модуль пружності  $E = 2 \times 10^{11} \text{Н/м}^2$  (згідно з національними нормами Західної Європи, вважається, що прогінна будова моста сталевий [11]), циліндричну жорсткість  $D$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,4$  та товщину плити  $h$ :

$$h = \sqrt[3]{12(1-\nu^2) \frac{D}{E}}, \tag{4.78}$$

ми розраховували ефективну товщину мостової плити. Вона становить  $h = 1,154$  м. Ефективна товщина плити не є її геометричним параметром, а умовною величиною, що пов'язана з циліндричною жорсткістю. Ми стверджуємо, що зменшення відносної ефективної товщини вказує на появу тріщин у мостовій плиті. Тому важливо проводити розрахунки ефективної товщини мостової плити за результатами статичних випробувань. Ефективну товщину важливо знати ще й тому, що від неї залежить величина напруження, що виникає в перерізі навантаженої плити.

Визначення власної частоти коливань мостової плити.

Співвідношення (2.36) утворюють частотне рівняння, розв'язки якого  $\alpha$  дають власні частоти коливань плити  $f$ :

$$f = \frac{\alpha^2}{4\pi} h \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}}. \quad (4.79)$$

Вихідні дані для розрахунку частоти  $f$ :  $\alpha$  – знаходиться з розв'язку нелінійного рівняння (2.36),  $\rho$  – приймається рівною густині залізобетону,  $\nu$  – приймається такою, що дорівнює коефіцієнту Пуассона для залізобетону,  $E$  – модуль пружності  $E = 2 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup> згідно з [11],  $h$  – ефективна товщина мостової плити.

*Приклад 1.* Вихідні дані:  $\alpha = 0,374676030203$  м<sup>-1</sup>,  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0,4$ ,  $E = 2 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $h = 1,154$  м. Результат:  $f = 72,636$  Гц.

Визначення модуля пружності мостової плити.

Модуль пружності мостової плити:

$$E = 48\pi^2(1-\nu^2) \frac{\rho}{\alpha^4} \left(\frac{f}{h}\right)^2 \quad (4.80)$$

Вихідні дані для розрахунку модуля пружності мостової плити  $E$ :  $\alpha$  – знаходиться з розв'язку нелінійного рівняння (2.36),  $f$  – визначається експериментально з динамічних випробувань,  $\nu$  – приймається такою, що дорівнює коефіцієнту Пуассона для залізобетону,  $h$  – ефективна товщина мостової плити.

*Приклад 2.* Вихідні дані:  $\alpha = 0,374676030203$  м<sup>-1</sup>,  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0,4$ ,

$f = 1,8$  Гц,  $h = 1,154$  м. Результат:  $E = 1,228 \times 10^8$  Н/м<sup>2</sup>

Визначення ефективної густини мостової плити.

Ефективна густина мостової плити:

$$\rho = \frac{E}{48\pi^2(1-\nu^2)} \alpha^4 \left(\frac{h}{f}\right)^2 \quad (4.81)$$

Вихідні дані для розрахунку густини мостової плити  $\rho$ :  $\alpha$  – знаходиться з розв'язку нелінійного рівняння (2.36),  $f$  – визначається експериментально з динамічних випробувань,  $\nu$  – приймається такою, що до-

рівнює коефіцієнту Пуассона для залізобетону,  $E$  – модуль пружності  $E = 1,228 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $h$  – ефективна товщина мостової плити.

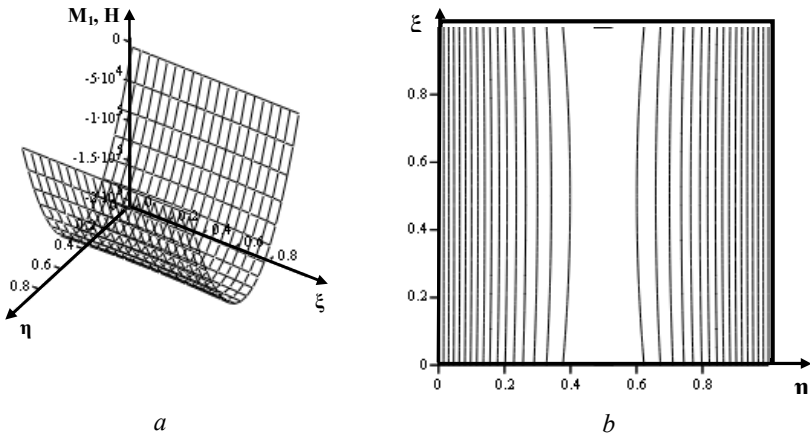


Рис. 4.43. Згинальний момент  $M_1$  при  $\zeta = const$ : а – поверхневий графік, б – контурний графік.

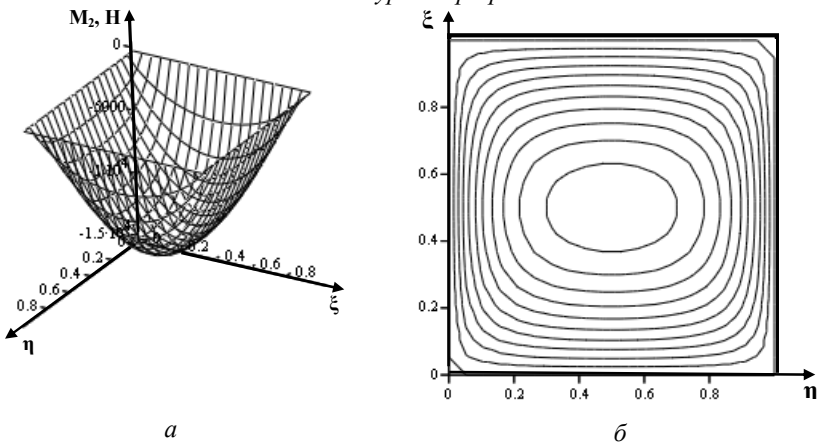


Рис. 4.44. Згинальний момент  $M_2$  при  $\eta = const$ : а – поверхневий графік, б – контурний графік.

Приклад 3. Вихідні дані:  $\alpha = 0,374676030203 \text{ м}^{-1}$ ,  $f = 1,8 \text{ Гц}$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $E = 1,228 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $h = 1,154 \text{ м}$ . Результат:  $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$ .

Отже, провівши теоретичне дослідження математичної моделі залізобетонної мостової плити, ми отримали зображення деформації мостової плити за рівномірного розподілу навантаження у вигляді збіжного функціонального ряду гіперболічних і тригонометричних функцій. Таке

представлення має перевагу над числовими методами розрахунку, тому що є найбільш адекватним, інформаційно містким. Завдяки цьому ми отримали теоретично обґрунтовані співвідношення, що пов'язують результати статичних випробувань із механічними параметрами плити.

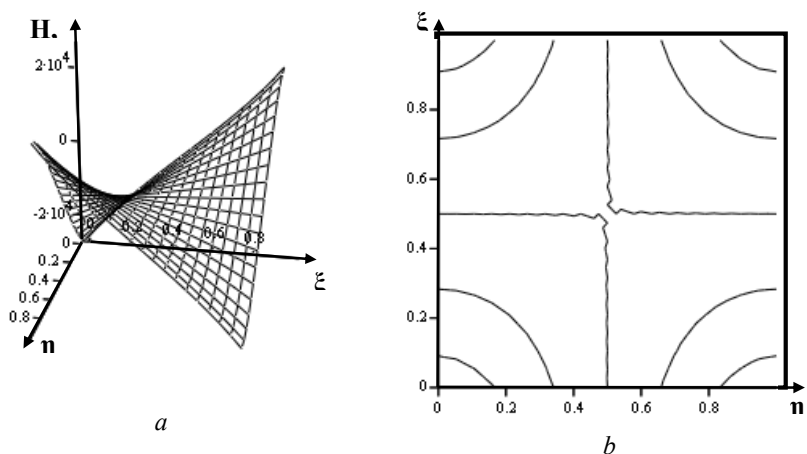


Рис. 4.45. Крутний момент  $H$ :  $a$  – поверхневий графік,  $b$  – контурний графік.

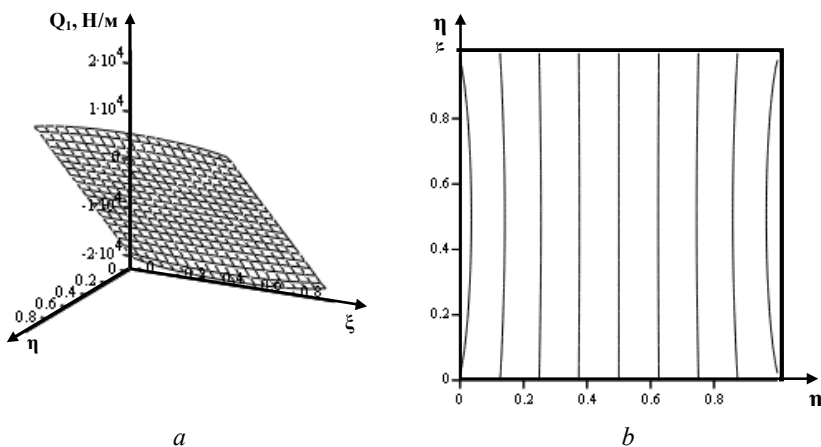


Рис. 4.46. Зрізуюча сила  $Q_1$  при  $\eta = \text{const}$ :  $a$  – поверхневий графік,  $b$  – контурний графік.

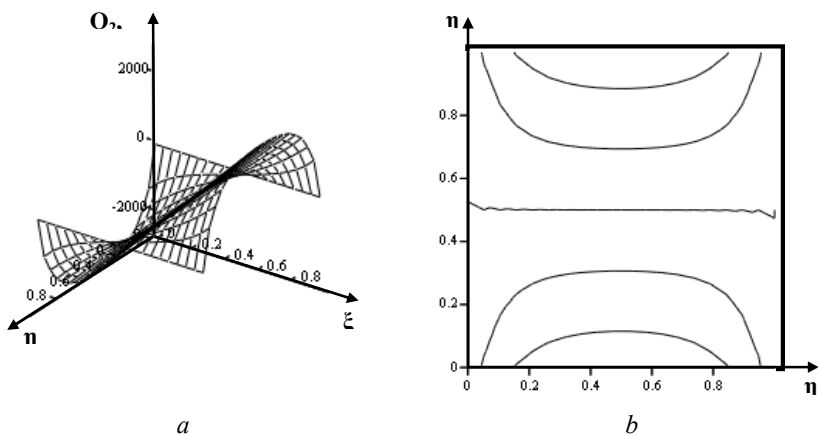


Рис. 4.47. Зрізаюча сила  $Q_2$  при  $\eta = const$ :  $a$  – поверхневий графік,  $b$  – контурний графік.

Аналізуючи наведені вище приклади, приходимо до висновку, що за результатами динамічних випробувань слід прийняти модуль пружності залізобетонної мостової плити рівним  $E = 1,228 \times 10^8$  Н/м<sup>2</sup> за динамічних навантажень.

#### 4.4. Визначення напружено-деформованого стану вільно опертої мостової плити під дією навантаження, розподіленого на площадку прямокутної форми

У цьому параграфі розглянемо модель розподілу навантаження на площадку прямокутної форми, що є проекцією автомобіля і крана, розміщених по-руч, на поверхню мостової плити. Ця модель є кращим наближенням навантаження моста під час статичних випробувань. Локальне навантаження силою  $F$  представимо як добуток двох ступінчатих функцій (рис. 4.48):

$$q(\eta, \xi) = \lambda_0(\eta) \mu_0(\xi) F / ab \Delta \eta_0 \Delta \xi_0, \quad (4.82)$$

де

$$\lambda_0(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \eta_0 \leq \eta \leq \eta_0 + \Delta \eta_0 \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}, \quad \mu_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + \Delta \xi_0 \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}, \quad (4.83)$$

$\eta_0, \xi_0, \Delta\eta_0, \Delta\xi_0$ , – положення та розміри площадки.

Функцію  $\mu(\xi)$  розкладемо у ряд Фур'є:

$$\mu(\xi) = \Delta\xi_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \sin(\pi j \Delta\xi_0) \left\{ \frac{\cos(2\pi j(\xi_0 + \Delta\xi_0/2))\cos(2\pi j\xi) + \sin(2\pi j(\xi_0 + \Delta\xi_0/2))\sin(2\pi j\xi)}{\cos(2\pi j(\xi_0 + \Delta\xi_0/2))\cos(2\pi j\xi) + \sin(2\pi j(\xi_0 + \Delta\xi_0/2))\sin(2\pi j\xi)} \right\} - \quad (4.84)$$

де  $q(\eta, \xi)$  повинна бути інтегровна по змінній  $\eta$  та диференційовна по змінній  $\xi$ .

Ступінчате навантаження після розкладу в ряд Фур'є по змінній  $\xi$  (рис. 4.49).

Аналогічно 4.67, частковий розв'язок матиме вигляд:

$$\varphi_i(\xi) = 4b^3 F / \pi D a i \times \frac{\sin[\pi(\eta_0 + \Delta\eta_2/2)]\sin(\pi\Delta\eta_2/2)}{\Delta\eta_0\Delta\xi_0} \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0 + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_j \frac{1}{j} \sin(\pi j \Delta\xi_0) \left[ \Psi_{0,j} \cos(2\pi j) + \Omega_{0,j} \sin(2\pi j) \right] \end{array} \right\} \quad (4.85)$$

де

$$\Phi_0 = \frac{\Delta\xi_0}{\alpha^4}; \quad \Psi_{j,0} = \frac{\cos[2\pi j(\xi_0 + \Delta\xi_0/2)]}{[(2\pi j)^2 + \alpha^2]}; \quad \Omega_{j,0} = \frac{\sin[2\pi j(\xi_0 + \Delta\xi_0/2)]}{[(2\pi j)^2 + \alpha^2]}. \quad (4.86)$$

Аналогічно 4.68-4.71, крайові умови будуть такими:

$$w(0, \xi) = w(1, \xi) = 0; \quad M_1(0, \xi) = M_1(1, \xi) = 0; \quad (4.87)$$

$$M_2(\eta, 0) = M_2(\eta, 1) = 0; \quad V_2(\eta, 0) = V_2(\eta, 1) = 0; \quad (4.88)$$

де

$$M_1 = -D \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right); \quad M_2 = -D \left( \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right); \quad (4.89)$$

$$V_2 = -D \left( \frac{1}{b^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2 - \nu) \frac{1}{a^2 b} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right). \quad (4.90)$$

Із крайових умов (4.87, 4.88) впливає система чотирьох рівнянь для знаходження констант  $A_i, B_i, C_i, D_i$ . Елементи матриці (4.73). Елементи правої частини системи (4.72):

$$V_1 = \frac{4}{\pi^3} \frac{b}{Dai} \times \left( \frac{F \sin \left[ \pi \left( \eta_0 + \frac{\Delta \eta_0}{2} \right) \right] \times \sin \left( \pi \frac{\Delta \eta_0}{2} \right)}{\Delta \eta_0 \Delta \xi_0} \right) \times \left( \begin{aligned} & \nu \left( \frac{a}{ib} \right)^2 \Delta \xi_0 + \\ & \frac{\sin(\pi j \Delta \xi_0)}{j} \frac{(2j)^2 + \nu \left( i \frac{b}{a} \right)^2}{\left[ (2j)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]^2} \times \\ & \times \cos \left[ 2\pi j \left( \xi_0 + \frac{\Delta \xi_0}{2} \right) \right] \end{aligned} \right); \quad (4.91.1)$$

та

$$V_2 = \frac{16}{\pi^3} \frac{1}{Dai} \times \left( \frac{F \sin \left[ \pi \left( \eta_0 + \frac{\Delta \eta_0}{2} \right) \right] \times \sin \left( \pi \frac{\Delta \eta_0}{2} \right)}{\Delta \eta_0 \Delta \xi_0} \right) \sum_j \left( \begin{aligned} & \frac{\sin(\pi j \Delta \xi_0)}{j} \frac{(2j)^2 + (2-\nu) \left( i \frac{b}{a} \right)^2}{\left[ (2j)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]^2} \times \\ & \times \sin \left[ 2\pi j \left( \xi_0 + \frac{\Delta \xi_0}{2} \right) \right] \end{aligned} \right). \quad (4.91.2)$$

Розв'язок системи 4.72 та частковий розв'язок 4.85 підставимо в 4.65, далі 4.65 – у 4.66 й одержимо розв'язок диференціального рівняння 4.65:

$$w(\eta_p; \xi_p) = \frac{4}{\pi^3} \frac{b^2}{D} F \sum_{i=1}^N f(i; \nu; \eta_p; \xi_p; \eta_0; \xi_0; \Delta \eta_0; \Delta \xi_0; a; b). \quad (4.92)$$

Використовуючи співвідношення (4.92), запишемо формулу для визначення циліндричної жорсткості плити, що пов'язана з експериментально визначеною де-формацією плити:

$$D = \frac{4}{\pi^3} \frac{b^2}{w(\eta_p; \xi_p)} F_0 \sum_{i=1}^N f(i; \nu; \eta_p; \xi_p; \eta_0; \xi_0; \Delta \eta_0; \Delta \xi_0; a; b), \quad (4.92)$$

де  $\eta_p; \xi_p$  – координати точки вимірювання прогину моста.

Дані статичних випробувань можна застосувати як вихідні і пов'язати їх через математичну модель із механічною характеристикою конструкції, котру назовемо інтегральною циліндричною жорсткістю моста.

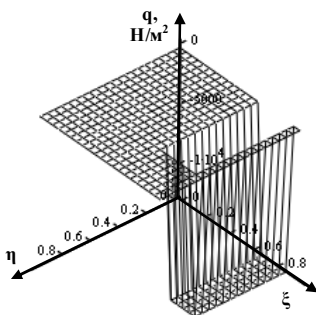


Рис. 4.48. Ступінчате навантаження.

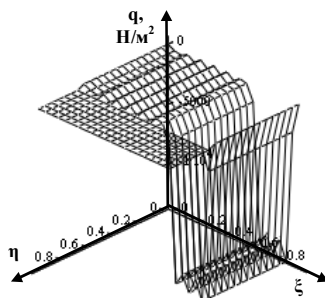
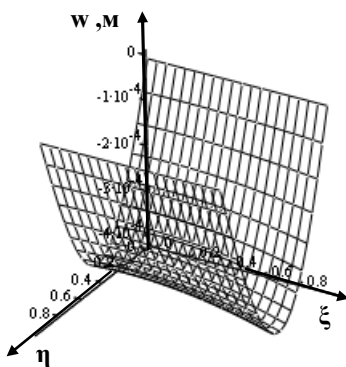
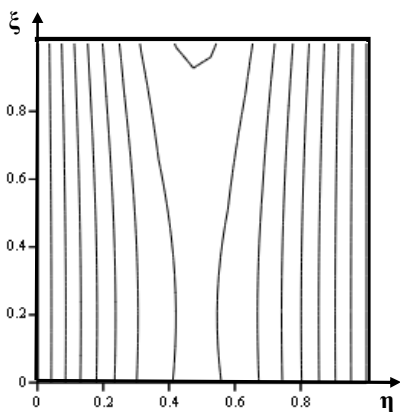


Рис. 4.49. Ступінчате навантаження, розкладене в ряд Фур'є по  $\xi$ .



*a*



*b*

Рис. 4.50. Поперечна деформація  $w$  моста через р. Стара:  
*a* – поверхневий графік,  
*b* – контурний графік.

Скористаємось результатами статичних випробувань моста через р. Стара, що вказані в попередньому параграфі. Циліндрична жорсткість та ефективна товщина мостової плити будуть такими:  $D = 3,72 \cdot 10^{10}$  Нм,  $h = 1,233$  м.

За уточненими значеннями циліндричної жорсткості, ефективною товщиною та двомірною функцією поперечного прогину мостової плити



ти  $w(\eta, \xi)$  (4.88), використовуючи модель навантаження, розподіленого на прямокутну площадку, ми отримали нові поверхневі та контурні графіки поперечного прогину  $w$  (рис. 4.50), згинальних моментів  $M_1$  та  $M_2$  (рис. 4.51, 4.52), крутного моменту  $H$  (рис. 4.53), зрізуючих сил  $Q_1$  та  $Q_2$  (рис. 4.54, 4.55), а також максимальні напруження в поперечному перерізі плити.

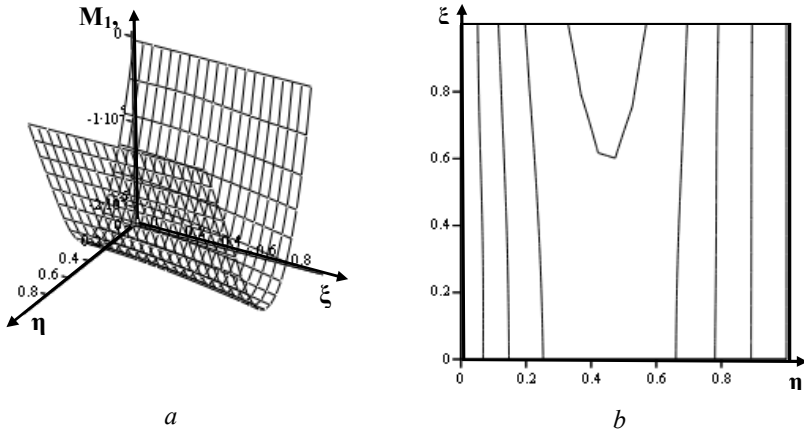


Рис. 4.51. Згинальний момент  $M_1$  при  $\xi = const$ :  $a$  – поверхневий графік,  $b$  – контурний графік.

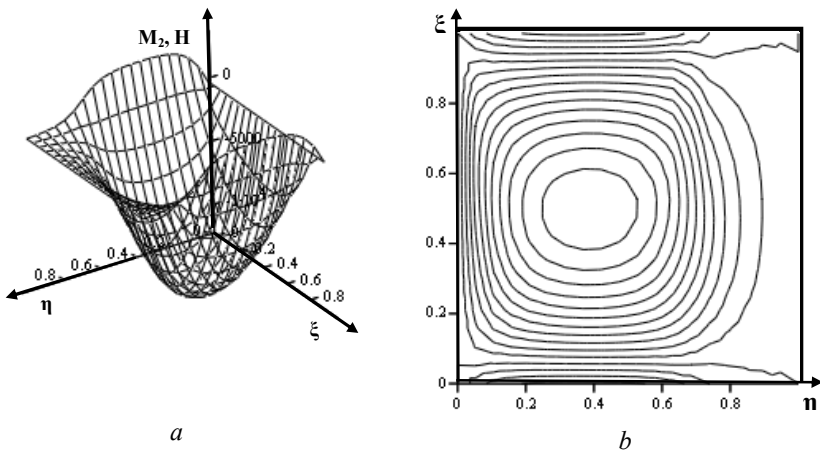


Рис. 4.52. Згинальний момент  $M_2$  при  $\eta = const$ :  $a$  – поверхневий графік,  $b$  – контурний графік.

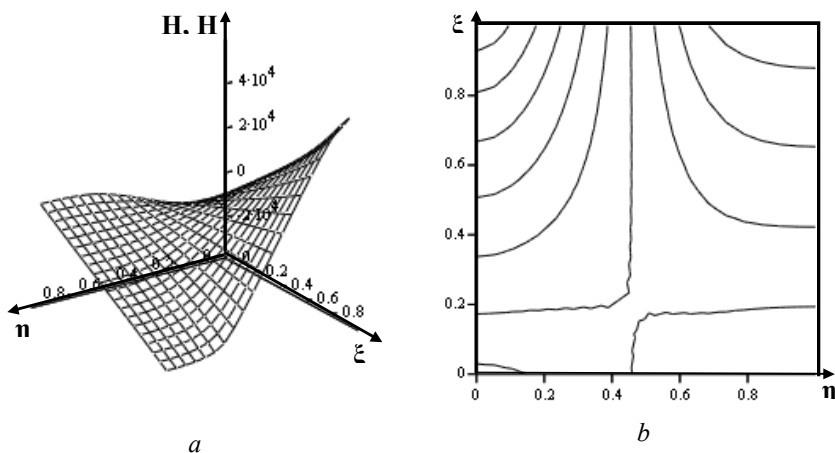


Рис. 4.53. Крутний момент  $H$ :  $a$  – поверхневий графік,  $b$  – контурний графік.

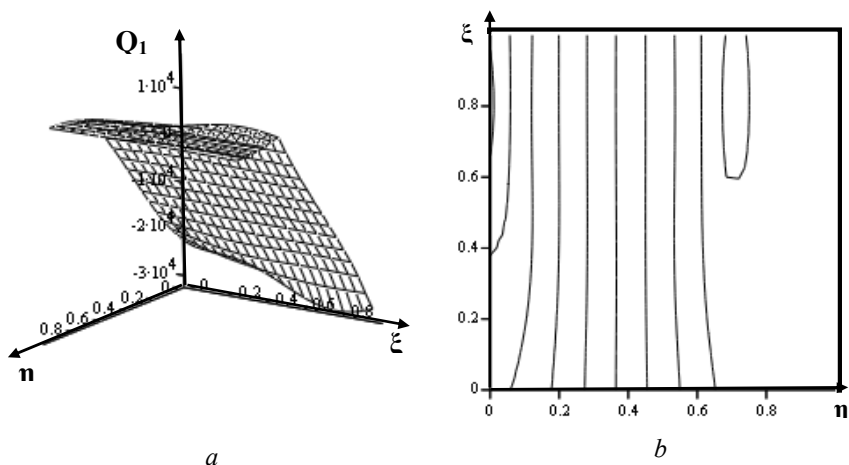


Рис. 4.54. Зрізуюча сила  $Q_1$  при  $\eta = \text{const}$ :  $a$  – поверхневий графік,  $b$  – контурний графік.

Інтегральна циліндрична жорсткість та її відносна зміна у часі, яку можна виявити за повторного статичного випробування, є корисною інформацією про залишковий ресурс експлуатації моста. Зростання інтегральної циліндричної жорсткості з часом вказуватиме на зростання силових факторів, що діють у середині конструкції. Спадання інтегральної циліндричної жорсткості з часом показуватиме появу тріщин.

Отже, провівши теоретичне дослідження математичної моделі залізобетонної мостової плити, ми отримали зображення деформації мостової плити, за розподілу навантаження на прямокутну площадку, у вигляді збіжного функціонального ряду гіперболічних та тригонометричних функцій.

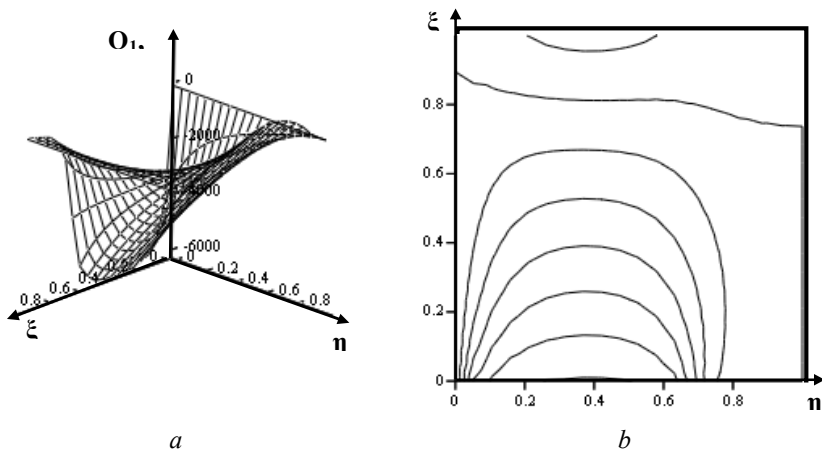


Рис. 4.55. Зрізаюча сила  $Q_2$  при  $\eta = \text{const}$ :  $a$  – поверхневий графік,  $b$  – контурний графік.

У наступному параграфі ми зробимо третій крок у напрямку уточнення математичної моделі статичних випробувань моста й порівняємо всі три випадки моделювання.

Як бачимо, поверхневі та контурні графіки (рис. 4.50-4.55) мають порушену симетричність, що зумовлено несиметричним розміщенням навантаження на поверхні плити. Форма отриманих поверхневих та контурних графіків відрізняється від зображених на рис. 4.6-4.11, відмінність графіків вказує на місце розміщення автомобіля та підйомного крана на мостовій плиті.

Зробимо розрахунки за результатами динамічних випробувань, скориставшись формулами 4.79-4.81.

Визначення власної частоти коливань мостової плити.

*Приклад 1.* Вихідні дані:  $\alpha = 0,374676030203 \text{ м}^{-1}$ ,  $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $E = 2 \times 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $h = 1,233 \text{ м}$ . Результат:  $f = 77,609 \text{ Гц}$  – власна частота коливань мостової плити

Визначення модуля пружності мостової плити.

*Приклад 2.* Вихідні дані:  $\alpha = 0,374676030203 \text{ м}^{-1}$ ,  $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $f = 1,8 \text{ Гц}$ ,  $h = 1,233 \text{ м}$ . Результат:  $E = 1,076 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$

Визначення ефективної густини мостової плити.

Приклад 3. Вихідні дані:  $\alpha = 0,374676030203 \text{ м}^{-1}$ ,  $f = 1,8 \text{ Гц}$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $E = 1,076 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $h = 1,233 \text{ м}$ . Результат:  $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$ .

Отже, провівши теоретичне дослідження уточненої математичної моделі статичного випробування залізобетонної мостової плити, ми отримали, за розподіленого на прямокутну площадку навантаження, складнішу формулу (4.90) зображення деформації мостової плити у вигляді збіжного функціонального ряду гіперболічних та тригонометричних функцій.

Аналізуючи наведені вище приклади, ми уточнили, що за результатами динамічних випробувань слід прийняти модуль пружності залізобетонної мостової плити таким, що дорівнює  $E = 1,076 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$  за динамічних навантажень.

#### 4.5. Визначення напружено-деформованого стану вільно опертої мостової плити під дією навантаження, розподіленого на систему площадок прямокутної форми

Розглянемо модель розподілу навантаження на систему площадок прямокутної форми, що є площадками дотику коліс автомобіля й крана до поверхні мостової плити.

Локальне навантаження представимо як суму добутоків двох  $k$  ступінчатих функцій (рис. 4.56):

$$q(\eta, \xi) = \frac{1}{ab} \sum_k \frac{F_k}{\Delta \eta_k \Delta \xi_k} \lambda_k(\eta) \mu_k(\xi), \quad (4.94)$$

де  $F_k$  – сила тиску колеса на мостову плиту,

$$\lambda_k(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \eta_k \leq \eta \leq \eta_k + \Delta \eta_k \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}; \quad \mu_k(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \xi_k \leq \xi \leq \xi_k + \Delta \xi_k \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}, \quad (4.95)$$

$\eta_k, \xi_k, \Delta \eta_k, \Delta \xi_k$  – положення та розміри площадок коліс.

Функцію  $\mu(\xi)$  розкладемо у ряд Фур'є (4.84).

Позначимо:

$$\Phi_k = \frac{\Delta \xi_k}{\alpha^4}, \quad \Psi_{j,k} = \frac{\cos \left[ 2\pi j \left( \xi_k + \frac{\Delta \xi_k}{2} \right) \right]}{\left[ (2\pi j)^2 + \alpha^2 \right]^2}, \quad \Omega_{j,k} = \frac{\sin \left[ 2\pi j \left( \xi_k + \frac{\Delta \xi_k}{2} \right) \right]}{\left[ (2\pi j)^2 + \alpha^2 \right]^2}. \quad (4.96)$$

Тоді частковий розв'язок буде таким:

$$\varphi_{i,j}(\xi) = \frac{4}{\pi} \frac{b^3 F}{Da} \frac{1}{i} \times \sum_k \frac{\sin \left[ \pi i \left( \eta_k + \frac{\Delta \eta_k}{2} \right) \right] \sin \left( \pi i \frac{\Delta \eta_k}{2} \right)}{\Delta \eta_k \Delta \xi_k} \left\{ \begin{array}{l} \Phi_k + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_j \frac{1}{j} \sin(\pi j \Delta \xi_k) \left[ \Psi_{k,j} \cos(2\pi j) + \right. \\ \left. + \Omega_{k,j} \sin(2\pi j) \right] \end{array} \right\}. \quad (4.97)$$

Елементи правої частини системи:

$$V_1 = \frac{4}{\pi^3} Ab / \pi^3 Dai \times \sum_k \frac{\left( F_k \sin \left[ \pi i \left( \eta_k + \frac{\Delta \eta_k}{2} \right) \right] \times \sin \left( \pi i \frac{\Delta \eta_k}{2} \right) \right)}{\Delta \eta_k \Delta \xi_k} \left\{ \begin{array}{l} v(a/ib)^2 \Delta \xi_k + \\ \frac{\sin(\pi j \Delta \xi_k)}{j} \frac{(2j)^2 + v(ib/a)^2}{[(2j)^2 + (ib/a)^2]} \times \\ \times \cos[2\pi j(\xi_k + \Delta \xi_k/2)] \end{array} \right\}; \quad (4.98)$$

$$V_2 = \frac{16}{\pi^3} \frac{1}{Dai} \times \sum_k \frac{\left( F_k \sin \left[ \pi i \left( \eta_k + \frac{\Delta \eta_k}{2} \right) \right] \times \sin \left( \pi i \frac{\Delta \eta_k}{2} \right) \right)}{\Delta \eta_k \Delta \xi_k} \sum_j \left( \frac{\sin(\pi j \Delta \xi_k)}{j} \frac{(2j)^2 + (2-v)(ib/a)^2}{[(2j)^2 + (ib/a)^2]} \times \right. \\ \left. \times \sin[2\pi j(\xi_k + \Delta \xi_k/2)] \right).$$

Розв'язок системи 4.72 та частковий розв'язок 4.96 підставимо у 4.65, далі 4.65 – у 4.66 і матимемо розв'язок диференціального рівняння (4.65):

$$w(\eta; \xi) = \frac{4}{\pi^3} \frac{b^2}{D} \sum_{k=1}^K F_k \sum_{i=1}^N f(i; v; \eta; \xi; \eta_k; \xi_k; \Delta \eta_k; \Delta \xi_k; a; b). \quad (4.99)$$

Використовуючи співвідношення (4.99), запишемо формулу для визначення циліндричної жорсткості плити, що пов'язана з експериментально визначеною де-формацією плити:

$$D = \frac{4}{\pi^3} \frac{b^2}{w(\eta_p; \xi_p)} \sum_{k=1}^K F_k \sum_{i=1}^N f(i; v; \eta_p; \xi_p; \eta_k; \xi_k; \Delta \eta_k; \Delta \xi_k; a; b), \quad (4.100)$$

де  $\eta_p; \xi_p$  – координати точки вимірювання прогину моста, що рівні відповідно.

Дані статичних випробувань можна застосувати як вихідні і пов'язати їх через математичну модель із механічною характеристикою конструкції, котру назвемо інтегральною циліндричною жорсткістю моста.

На рисунку 4.57 зображено розміщення та площини контакту коліс крана й автомобіля на поверхні моста.

За загальної величини навантаження 46 тонн (кран – 26 т, КрА3 – 22 т), площадки контакту ( $\Delta x_i \times \Delta y_i$ ), координати розміщення коліс ( $x_i, y_i$ ) на поверхні моста та розподіл навантаження ( $F_i$ ) наведено в таблиці 4.1.

Інтегральна циліндрична жорсткість проїзної частини моста за формулою (4.102)  $D = 3,777 \cdot 10^{10}$  Н·м, а ефективна товщина  $h = 1,239$  м.

Отримана шляхом непрямого вимірювання, циліндрична жорсткість використана для розрахунку прогину та силових факторів у будь-якій точці моста.

Нижче наведено графіки поверхонь та контурні графіки, що описують поперечний прогин і силові фактори, що діють у проїзній частині моста (рис. 4.58.-4.63).

Отже, провівши теоретичне дослідження математичної моделі залізобетонної мостової плити, ми отримали деформацію мостової плити при розподілі навантаження на систему площадок прямокутної форми у вигляді збіжного функціонального ряду гіперболічних і тригонометричних функцій. Таке представлення має перевагу над числовими методами розрахунку тому, що є найбільш адекватним, інформаційно містким. Завдяки цьому ми отримали теоретично обґрунтовані співвідношення, що пов'язують результати статичних випробувань із механічними параметрами плити.

Таблиця 4.1.

#### **Координати і розподіл навантаження автомобіля та крана на поверхні моста**

<b>i</b>	<b><math>\Delta x_i</math>, м</b>	<b><math>\Delta y_i</math>, м</b>	<b><math>x_i</math>, м</b>	<b><math>y_i</math>, м</b>	<b><math>F_i</math>, Н</b>
1	0,14	0,26	-0,02	5,56	-24000
2	0,14	0,26	-0,02	7,50	-24000
3	0,14	0,52	5,03	5,56	-48000
4	0,14	0,52	5,03	7,24	-48000
5	0,14	0,52	6,49	5,56	-48000
6	0,14	0,52	6,49	7,24	-48000
7	0,14	0,52	10,69	5,56	-44000
8	0,14	0,52	10,69	7,24	-44000
9	0,14	0,52	12,15	5,56	-44000
10	0,14	0,52	12,15	7,24	-44000
11	0,14	0,26	16,79	5,56	-22000
12	0,14	0,26	16,79	7,50	-22000

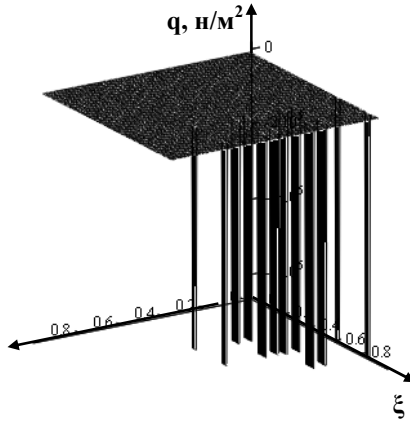


Рис. 4.56. Локальне навантаження 12-коліс.

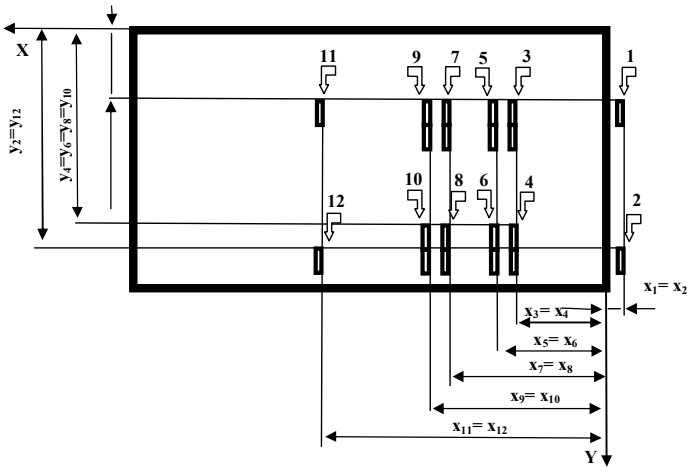


Рис. 4.57. Розміщення коліс на поверхні моста. Колеса крана –  $i = 1-6$ , колеса автомобіля  $i = 7-12$ .

Максимальний прогин моста з боку розміщення навантаження в точці  $x_p=12,15$  м,  $y_p=8,3$  м, рівний  $0,41$  мм =  $4,1 \cdot 10^{-4}$  м.

У таблиці 4.2 вказано максимальні значення силових факторів, що діють на міст, та їх координати.

Як бачимо, поверхневі та контурні графіки рис. 4.58-4.63 відрізняються від відповідних графіків рис. 4.6-4.11 та рис. 4.14-4.55, що зумовлено несиметричним розміщенням навантаження на поверхню плити та застосуванням точнішої математичної моделі. Форма отриманих поверхневих та контурних графіків вказує на місце розміщення автомобіля та підйомного крана на мостовій плиті й розподіл навантаження на окремі колеса.

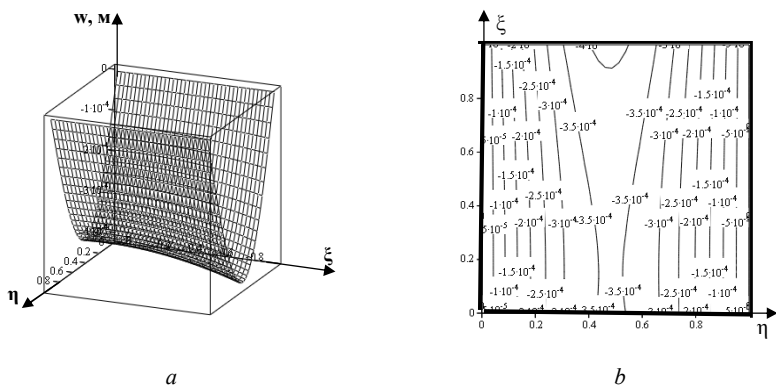


Рис. 4.58. Поверхні та контурні графіки прогину: а – поверхня, що описує деформацію проїзної частини залізобетонного моста під дією статичних випробувань; б – контурний графік, що описує деформацію проїзної частини залізобетонного моста під дією статичних випробувань, розмірність контурних ліній, м.

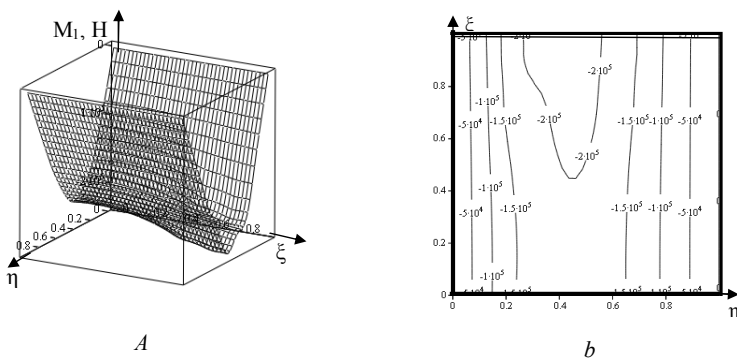
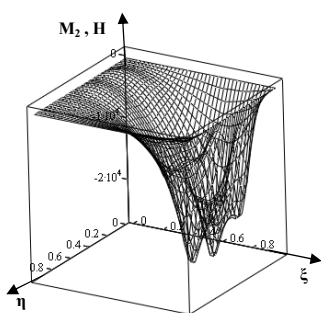
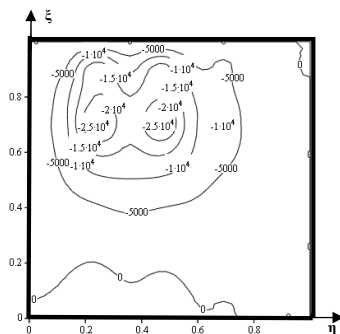


Рис. 4.59. Поверхні та контурні графіки згинального моменту: а – питомий згинальний момент  $M_1$ , у площині  $\eta = const$ , поверхневий графік; б – питомий згинальний момент  $M_1$  у площині  $\xi = const$ , контурний графік, розмірність контурних ліній, Н.



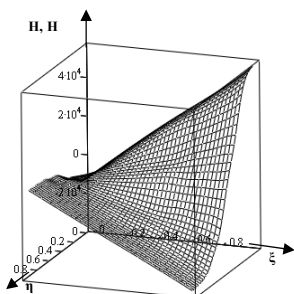


a

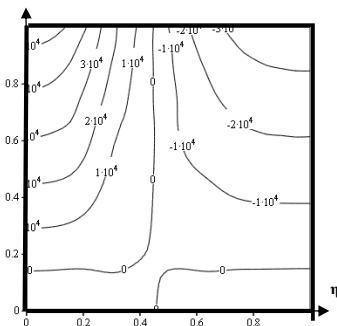


b

Рис. 4.60. Поверхні та контурні графіки згинального моменту: а – питомий згинальний момент  $M_2$ , у площині  $\xi = \text{const}$ , поверхневий графік; б – питомий згинальний момент  $M_2$  у площині  $\xi = \text{const}$ , контурний графік, розмірність контурних ліній, Н.



a



b

Рис. 4.61. Поверхні та контурні графіки крутного моменту: а – питомий крутний момент  $H$ , поверхневий графік; б – питомий крутний момент  $H$ , контурний графік, розмірність контурних ліній, Н.

У таблиці 4.3. наведено результати порівняння різних рівнів точності математичного обчислення статичного навантаження на мостову залізобетонну плиту, а також значення згинальних та крутних моментів, зрізаючих поперечних сил, координат максимумів силових факторів та інтегральних характеристик навантаженої плити. Більш точним представленням статичного навантаження слід вважати модель розподілу сил на систему прямокутних площадок (Модель 3).

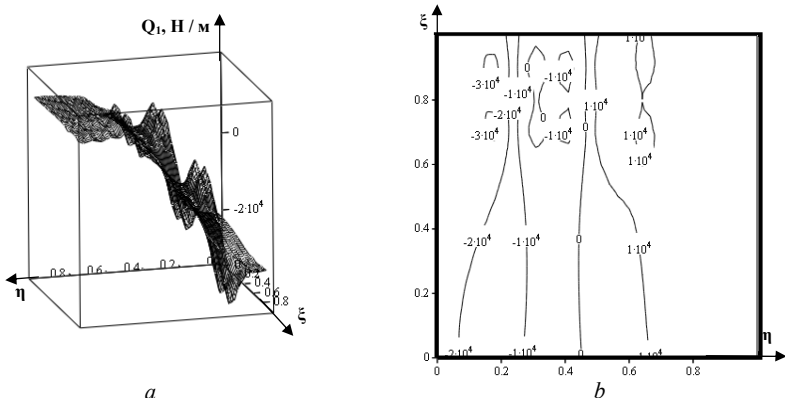


Рис. 4.62. Поверхні та контурні графіки поперечної сили: а – питомі поперечна сила  $Q_1$  у площині  $\eta = \text{const}$ , поверхневий графік; б – питомі поперечна сила  $Q_1$  у площині  $\eta = \text{const}$ , контурний графік, розмірність контурних ліній, Н/м.

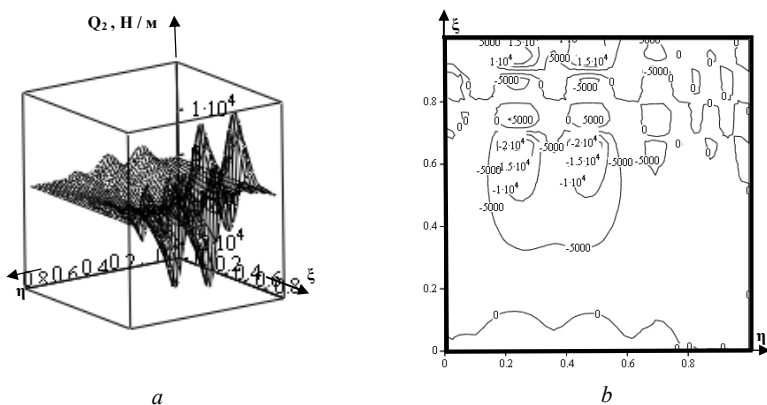


Рис. 4.63. Поверхні та контурні графіки поперечної сили: а – питомі поперечна сила  $Q_2$  у площині  $\xi = \text{const}$ , поверхневий графік; б – питомі поперечна сила  $Q_2$  у площині  $\xi = \text{const}$ , контурний графік, розмірність контурних ліній, Н/м.

Зробимо розрахунки за результатами динамічних випробувань, скориставшись формулами 4.79-4.81 та рекомендаціями [82].

Визначення власної частоти коливань мостової плити.

Приклад 1. Вихідні дані:  $\alpha = 0,374676030203 \text{ м}^{-1}$ ,  $\rho = 2500 \text{ кг/м}^{-3}$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $E = 2 \times 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $h = 1,239 \text{ м}$ . Результат:  $f = 77,986 \text{ Гц}$  – власна частота коливань мостової плити

Визначення модуля пружності мостової плити.

Приклад 2. Вихідні дані:  $\alpha = 0,374676030203 \text{ м}^{-1}$ ,  $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $f = 1,8 \text{ Гц}$ ,  $h = 1,239 \text{ м}$ . Результат:  $E = 1,065 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$

Визначення ефективної густини мостової плити.

Приклад 3. Вихідні дані:  $\alpha = 0,374676030203 \text{ м}^{-1}$ ,  $f = 1,8 \text{ Гц}$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $E = 1,065 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $h = 1,239 \text{ м}$ . Результат:  $\rho = 2499 \text{ кг/м}^3$ .

Отже, за результатами випробувань та уточненими розрахунками слід прийняти модуль пружності залізобетонної мостової плити, що дорівнює  $E = 1,065 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$  за динамічних навантажень.

Оцінимо інтегральну точність отриманого розв'язку (4.92), підставивши його у вихідне диференціальне рівняння (4.63) та проінтегрувавши по всій поверхні. Значення отриманого інтегралу має наближатись до сумарного навантаження (у розглянутому випадку 46 тонн) тим ближче, чим більшу кількість гармонік матиме розв'язок (4.92).

Таблиця 4.2

**Максимальні значення силових факторів,  
що діють на міст, та їх координати**

Назва показника	Максимальне значення за модулем	Координати максимуму	
		$x_0, \text{ м}$	$y_0, \text{ м}$
Питомий згинальний момент $M_1$ у площині $\eta = const$ , Н	$2,322 \times 10^5$	11,199	8,3
Питомий згинальний момент $M_2$ у площині $\xi = const$ , Н	$2,672 \times 10^4$	5,979	5,855
Питомий кругний момент $N$ , Н	$6,209 \times 10^4$	0	8,3
Питома поперечна сила $Q_1$ у площині $\eta = const$ Н/м	$3,233 \times 10^4$	4,129	5,893
Питома поперечна сила $Q_2$ у площині $\xi = const$ , Н/м	$2,234 \times 10^4$	5,865	5,481
Максимальне напруження $\sigma$ , Н/м <sup>2</sup>	$9,076 \times 10^5$	11,199	8,3

Для розрахунку застосовано двадцять гармонік розкладу розв'язку диференціального рівняння у ряд. На рис. 4.58, 4.59 та 4.60 (а,b) чітко видно максимуми у місцях розміщення вантажу та коліс автомобіля. Рис. 4.63 (а,b), крім максимумів у місцях розміщення коліс, містить максимуми вищих гармонік розкладу розв'язку диференціального рівняння. Отже, для розрахунку питомої поперечної сили при  $\xi = const$  варто застосувати більшу кількість гармонік, тобто у формулі (4.97) застосувати  $N > 20$ .

## Порівняння моделей представлення навантаження плити

Модель	Назва показника	Значення показника
Модель 1. Рівномірний розподіл сили	Максимальний питомий згинальний момент $M_1(H)$ та напруження $\sigma(H/m^2)$ в площині $\eta = const$ , (координати, м)	$1,705 \times 10^5$ ; $0,768 \times 10^6$ ; (12,15; 8,3)
	Питомий згинальний момент $M_2(H)$ в площині $\xi = const$ , (координати максимуму, м)	$1,074 \times 10^4$ ; (12,15; 4,15)
	Питомий крутний момент $H$ , (координати максимуму, м)	$2,553 \times 10^4$ ; (24,3; 8,3)
	Питома поперечна сила $Q_1(H/m)$ в площині $\eta = const$ (координати максимуму, м)	$2,148 \times 10^4$ ; (0,00; 4,15)
	Питома поперечна сила $Q_2(H/m)$ в площині $\xi = const$ (координати максимуму, м)	$2,605 \times 10^3$ ; (12,15; 0,00)
	Циліндрична жорсткість, $D(H/m)$	$3,048 \times 10^{10}$
	Ефективна товщина, $h(m)$	1,154
Модель 2. Розподіл сили на прямокутну площадку	Максимальний питомий згинальний момент $M_1(H)$ та напруження $\sigma(H/m^2)$ в площині $\eta = const$ , (координати, м)	$2,168 \times 10^5$ ; $0,856 \times 10^6$ ; (10,92; 8,3)
	Питомий згинальний момент $M_2(H)$ в площині $\xi = const$ , (координати максимуму, м)	$1,332 \times 10^4$ ; (9,41; 4,13)
	Питомий крутний момент $H(H)$ , (координати максимуму, м)	$5,854 \times 10^4$ ; (0,00; 8,3)
	Питома поперечна сила $Q_1(H/m)$ в площині $\eta = const$ , (координати максимуму, м)	$3,232 \times 10^4$ ; (0,00; 6,79)
	Питома поперечна сила $Q_2(H/m)$ в площині $\xi = const$ , (координати максимуму, м)	$6,361 \times 10^3$ ; (8,60; 0,00)
	Циліндрична жорсткість, $D(H/m)$	$3,72 \times 10^{10}$
	Ефективна товщина, $h(m)$	1,233
Модель 3. Розподіл сили на систему прямокутних площадок	Максимальний питомий згинальний момент $M_1(H)$ та напруження $\sigma(H/m^2)$ в площині $\eta = const$ , (координати, м)	$2,322 \times 10^5$ ; $0,908 \times 10^6$ ; (11,2; 8,3)
	Питомий згинальний момент $M_2(H)$ в площині $\xi = const$ , (координати максимуму, м)	$2,672 \times 10^4$ ; (6,0; 5,8)
	Питомий крутний момент $H(H)$ , (координати максимуму, м)	$6,209 \times 10^4$ ; (0,00; 8,3)
	Питома поперечна сила $Q_1(H/m)$ в площині $\eta = const$ , (координати максимуму, м)	$3,233 \times 10^4$ ; (4,1; 5,9)
	Питома поперечна сила $Q_2(H/m)$ в площині $\xi = const$ , (координати максимуму, м)	$2,234 \times 10^3$ ; (5,9; 5,5)
	Циліндрична жорсткість, $D(H/m)$	$3,777 \cdot 10^{10}$
	Ефективна товщина, $h(m)$	1,239

У таблиці 4.4. наведено результати розрахунків похибки моделей 1 та 2 щодо базової моделі 3. Максимальна похибка, 105,93%, має місце при визначенні координат максимумів силових факторів. Максимальне значення похибки при визначенні питомого згинального моменту  $M_2$  становить 102,5 % (модель 1). По-хибка у визначенні інтегральних характеристик мостової плити  $D$  і  $h$  є найменшою: від 0,48% (модель 2) до 19,3% (модель 1).

Таблиця 4.4.

**Порівняння моделей представлення навантаження плити у відсотках**

Назва показника	Модель 1	Модель 2	Модель 3	Похибка, %	
				Модель 1	Модель 2
Питомий згинальний момент $M_1$ (Н) у площині	$1,705 \times 10^5$	$2,168 \times 10^5$	$2,322 \times 10^5$	-26,57	-6,63
Напруження $\sigma$ (Н/м <sup>2</sup> )	$0,768 \times 10^6$	$0,856 \times 10^6$	$0,91 \times 10^6$	-15,6	-5,93
координати максимуму, м	12,15	10,92	11,2	8,48	-2,5
	8,3	8,3	8,3	0	0
Питомий згинальний момент $M_2$ (Н) у площині	$1,074 \times 10^4$	$1,332 \times 10^4$	$2,672 \times 10^4$	-59,81	-50,15
координати максимуму, м	12,15	9,41	6	102,5	56,83
	4,15	4,13	5,8	-28,45	-28,79
Питомий крутний момент $H$ (Н)	$2,553 \times 10^4$	$5,854 \times 10^4$	$6,209 \times 10^4$	-58,88	-5,72
координати максимуму, м	24,3	0	0	-	-
	8,3	8,3	8,3	0	0
Питома поперечна сила $Q_1$ (Н/м)	$2,148 \times 10^4$	$3,232 \times 10^4$	$3,233 \times 10^4$	-93,36	-0,03
координати максимуму, м	0	0	4,1	-100	-100
	4,15	6,79	5,9	-29,66	15,08
Питома поперечна сила $Q_2$ (Н/м)	$2,605 \times 10^3$	$6,361 \times 10^3$	$2,234 \times 10^4$	-88,34	-71,53
координати максимуму, м	12,15	8,6	5,9	105,93	45,76
	0	0	5,5	-100	-100
Циліндрична жорсткість, $D$ (Н/м)	$3,048 \times 10^{10}$	$3,72 \times 10^{10}$	$3,777 \times 10^{10}$	-19,3	-1,51
Ефективна товщина, $h$ (м)	1,154	1,233	1,239	-6,86	-0,48

Відносна похибка розв'язку обчислюється за формулою:

$$\varepsilon(\%) = \frac{\left| D \int_0^a \int_0^b \nabla^2 \nabla^2 w dx dy - \int_0^a \int_0^b q dx dy \right|}{\int_0^a \int_0^b q dx dy} 100\%.$$

Диференціальна похибка обчислюватиметься відповідно:

$$\varepsilon(x, y) = \frac{|D\nabla^2\nabla^2w - q|}{q} 100\%.$$

Отже, при 20 гармоніках ми отримали інтегральну похибку розв'язку диференціального рівняння деформації мостової плити прямокутної форми за моделлю 3 з точністю  $\varepsilon(\%) = 3\%$ . Математично змодельємо максимальне навантаження моста. «Розмістимо» умовно на ньому 5 автомобілів загальною вагою 116 тонн ( $2 \times 22 + 3 \times 24$ ). На рис. 4.64, 4.65 зображено контурні графіки розміщення сил тиску коліс 5-ти автомобілів та згинального моменту  $M_1$ .

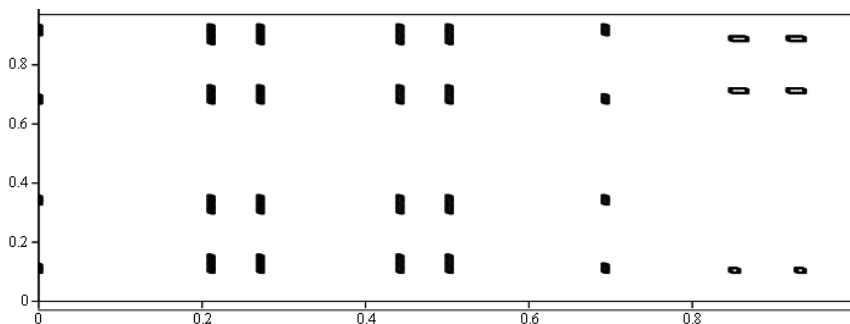


Рис. 4.64. Контурний графік розміщення сил тиску коліс 5-ти автомобілів

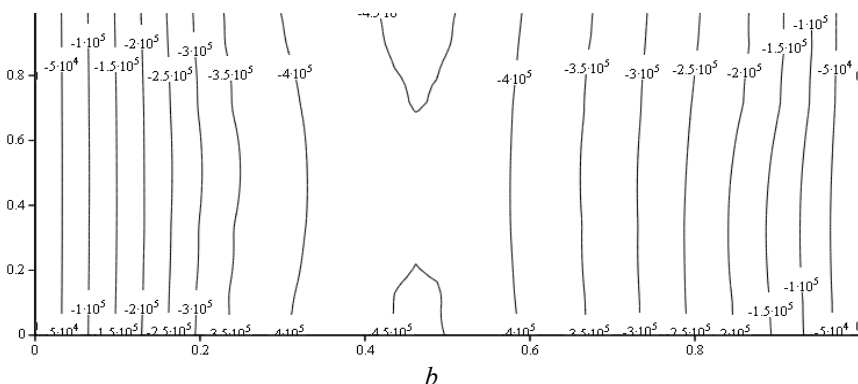


Рис. 4.65. Контурні графіки: *a* – розміщення сил тиску коліс 5-ти автомобілів; *b* – питомий згинальний момент  $M_1$ , Н.

Розраховано максимальні значення питомого згинального моменту  $M_1$ , нормального напруження  $\sigma_1$  та координати максимуму цих силових

факторів:  $M_1 = 4,615 \times 10^5$  Н,  $\sigma_1 = 1,804$  МПа,  $x = 11,3$  м,  $y = 8,3$  м. Розрахунки базуються на визначених вище інтегральних характеристиках залізобетонної плити проїзної частини моста:  $D = 3,777 \times 10^{10}$ ;  $h = 1,239$  м.

#### 4.6. Висновки до розділу 4

Розрахунок деформації силових факторів методом скінченних елементів для плити у формі паралелограма шляхом побудови ряду моделей від меншої ступені розбиття на скінченні елементи до більшої, від моделі, що не враховує балки жорсткості, до моделі, що враховує їх, вказує на спрямування результату до оптимального значення.

Математична модель ортотропної тонкої плити, представлена диференціальним рівнянням (4.1), є ширшою в пізнавальному плані, оскільки має як дійсні, корисні з практичної точки зору, розв'язки, так і комплексні, що описують залізобетонну плиту з поперечним армуванням (на практиці не застосовується).

Математична модель ортотропної плити має дійсні розв'язки за певних значень механічних параметрів – модулів пружності ( $E_1$ ,  $E_2$ ) та зсуву ( $G$ ). Дійсні розв'язки матимемо у двох випадках: за  $G = E_1/2/(1 + \nu_{12})$  та  $E_1 > kE_2$  і за  $G = E_2/2/(1 + \nu_{12})$  та  $E_2 > kE_1$ .

Зображення деформації мостової плити у вигляді збіжного функціонального ряду гіперболічних і тригонометричних функцій має перевагу над числовими методами розрахунку тому, що є найбільш адекватним й інформаційно містким. Завдяки цьому ми отримали теоретично обгрунтовані співвідношення, що пов'язують результати статичних і динамічних випробувань із механічними параметрами плити і призначені для обробки результатів натурного експерименту. Дослідження проведено для трьох випадків, що мають практичне значення:

- рівномірно розподілене навантаження на мостову плиту (має місце при моделюванні напружено-деформованого стану, що виникає під дією власної ваги плити і застосовується в нормах рухомих навантажень країн Західної Європи, зокрема у Бельгії, Великобританії, Німеччині, Іспанії, Нідерландах, Норвегії, Швеції, Франції, та Україні);

- навантаження, розподілене на прямокутну площадку (застосовується в моделях навантажень Єврокоду);

- навантаження, розподілене на систему площадок (застосовується в Західній Європі та Україні для моделювання зосереджених сил, що діють на мостову плиту з боку автомобільних коліс).

Ефективна інтегральна циліндрична жорсткість та ефективна товщина плити прогонової будови моста через р. Стара Ріка для трьох рів-

нів моделювання мало залежить від точності математичного моделювання. У порядку зростання точності моделей:

– рівномірно розподілене навантаження: циліндрична жорсткість –  $D = 3,048 \cdot 10^{10}$  Нм, ефективна товщина плити –  $h = 1,154$  м;

– навантаження, розподілене на прямокутну площадку: циліндрична жорсткість –  $D = 3,72 \cdot 10^{10}$  Нм, ефективна товщина плити –  $h = 1,233$  м;

– навантаження, розподілене на систему прямокутних площадок: циліндрична жорсткість –  $D = 3,777 \cdot 10^{10}$  Нм, ефективна товщина плити –  $h = 1,239$  м.

Поверхневі та контурні графіки поперечного прогину  $w$ , згинальних моментів  $M1$  та  $M2$ , крутного моменту  $H$ , зрізуючих сил  $Q1$  та  $Q2$  значно залежать від точності математичного моделювання.

Ефективна товщина плити не є її конструктивним параметром, а умовною величиною, що пов'язана з циліндричною жорсткістю. Ми стверджуємо, що зменшення відносної ефективної товщини вказує на появу тріщин у мостовій плиті. Тому важливо проводити розрахунки ефективної товщини мостової плити за результатами статичних випробувань.

Інтегральна циліндрична жорсткість та її відносна зміна у часі, яку можна виявити за повторного статичного випробування, є корисною інформацією про залишковий ресурс експлуатації моста.

Інтегральна похибка розв'язку диференціального рівняння при 20-ти гармоніках становить 3 %.

Використавши значення циліндричної жорсткості, отримане описаним вище методом, математично змодельовано затоп мосту на р. Стара Ріка й отримано всі деформаційні та силові характеристики напружено-деформованого стану мостової споруди. Встановлено, що напруження на виходять за межі допустимих значень.



## РОЗДІЛ 5

# ЕКОНОМІЧНА ЕФЕКТИВНІСТЬ З'ЄДНАННЯ АРМАТУРНИХ СТЕРЖНІВ ТА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СТАТИЧНОГО ВИПРОБУВАННЯ МОСТА

### 5.1. Розрахунок економічної ефективності з'єднання арматурних стержнів для балок

Базовим варіантом вважатимемо виготовлення залізобетонної балки, що армована арматурним стержнем із термозміцненої сталі класу AV 014 мм довжиною 22 м.

Економічну ефективність способу з'єднання обтискними втулками оцінимо на підставі наступних міркувань та розрахунків.

Для виготовлення балки необхідно в наявності арматурний стержень класу AV Ø 14 мм довжиною 22 м. Оскільки стержнів такої довжини немає, виготовляємо його двома способами:

зварювання на спеціальному зварювальному верстаті;  
опресування втулкою за запропонованою технологією.

Вихідними технічними даними є довжина арматурного стержня 6 м діаметром 14 мм. Для виготовлення стержня довжиною 22 м як за першим, так і другим способами необхідні 4 заготовки термозміцненої арматури довжиною 6 м кожна, а також провести підготовчі роботи і зробити 3 з'єднання. Оцінимо вартість з'єднання зваркою (варіант 1).

За даними заводу вартість виготовлення одного стикового з'єднання термозміцненої арматури на зварювальному верстаті становить 10,53 грн. Для виготовлення арматурного стержня довжиною  $L = 22$  м із трьома з'єднаннями затрати складають 31,59 грн. Загальна вага стержня  $P = p \cdot L$ :

$$P = 1,22 \text{ кг} \cdot 22 = 26,65 \text{ кг}.$$

$$p = 1,22 \text{ кг} - \text{вага 1 пог. м}.$$

Площа поперечного перерізу арматури Ø 14 дорівнює  $154 \text{ мм}^2$ . Згідно з даними, вартість 1 кг термозміцненої арматури становить 6,80 грн. Отже, вартість заготовки довжиною 22 м дорівнюватиме:

$$6,80 \cdot 22 = 149,60 \text{ грн}.$$

Загальна вартість виготовлення стержня довжиною 22 м зі врахуванням трьох з'єднань стиковим зварюванням становить:

$$149,60 + 3 \cdot 10,53 = 181,19 \text{ грн.}$$

Проведемо оцінку вартості одного з'єднання арматурних стержнів обтискнуою (варіант 2) втулкою за наступною схемою. Вважатимемо, що обтискуну втулку виготовлено із суцільного металу зовнішнього діаметру 32 мм і довжиною 110 мм. Вага втулки дорівнює 0,6 кг, при вартості металу 5,67 грн. за кілограм ціна становить 3,40 грн. Виготовлення втулки складає 2,5 грн., ціна перехідної мідної втулки – 6,48 грн., а операції опресування – 1,62 грн. Загальна вартість виконання одного з'єднання двох арматурних стержнів обтискнуою втулкою – 16,20 грн.

Тоді загальна вартість арматурного стержня довжиною 22 м номінального діаметру 14 мм зі врахуванням трьох з'єднань становить:

$$Ц = Ц_1 + 3 \cdot Ц_2 + 3 \cdot Ц_3 + 3 \cdot Ц_4$$

де  $Ц_1$  – ціна термозміцненого стержня довжиною 22 м:

$$Ц_1 = P \cdot 6,80 = 149,60 \text{ грн.};$$

$Ц_2$  – ціна обтискунної втулки:  $Ц_2 = 4,05 \text{ грн.};$

$Ц_3$  – ціна перехідної\* мідної втулки:  $Ц_3 = 6,48 \text{ грн.};$

$Ц_4$  – ціна операції опресування:  $Ц_4 = 1,62 \text{ грн.}$

$$Ц = 149,60 + 3 \cdot 4,05 + 3 \cdot 6,48 + 3 \cdot 1,62 = 186,05 \text{ грн.}$$

Враховуючи дослідження на втомну міцність з'єднань арматурних стержнів стиковим зварним швом, встановлено, що границя втоми таких з'єднань знижується на 40%, порівняно із суцільною арматурою. При встановленні допустимих циклічних навантажень та прогнозуванні ресурсу балки довжиною 22 м, що армована термозміцненим арматурним стержнем зі стиковими зварними з'єднаннями, необхідно це врахувати. Отже, прогнозована довговічність такої балки буде становити 60 %, порівняно із армованою балкою суцільним арматурним стержнем. Це вказує на те, що при виготовленні балок, армованих стержнем зі зварним з'єднанням, збільшуються перевитрати металу на 40%.

Оцінімо в загальному вагу металу  $P_{екв}$ , що використовується при виготовленні балок еквівалентної міцності, що армовані стержнем за варіантом 1:

$$P_{екв} = P \cdot 1,4 = 26,65 \cdot 1,4 = 37,31 \text{ кг.}$$

Ціна металу  $Ц_m = 37,31 \cdot 6,80,2 = 253,71 \text{ грн.}$

Різниця вартості металу становить 104,11 грн. У результаті цього збільшиться вартість виготовлення стержня довжиною 22 м, з'єданого трьома стиковими швами для забезпечення еквівалентної міцності суцільного арматурного стержня:

$$Ц_{екв} = 181,28 + 104,11 = 285,39 \text{ грн.}$$

Отже, ціна арматурного стержня довжиною 22 м становить:

за першим варіантом –  $C^1=285,39$  грн.;

за другим варіантом –  $C^2= 186,05$  грн.

Різниця в ціні матеріалу за першим і другим варіантами становить 99,34 грн. Отже, при виготовленні армованої залізобетонної балки довжиною 22 м зі стержнем, з'єднаним обтисковою втулкою, економічна ефективність становить 99,34 грн., порівняно із тим, коли армування виконують зварним стержнем.

## 5.2. Розрахунок економічної ефективності комп'ютерного моделювання екстремального статичного навантаження моста

Екстремальне критичне навантаження може виникнути при утворенні затору і зупинки великої кількості машин на мості. Використавши значення циліндричної жорсткості, отримане описаним вище методом, можна змоделювати затор математично й отримати всі деформаційні та силові характеристики напружено-деформованого стану моста. Таке моделювання значно дешевше безпосереднього статичного випробування.

Розглянемо три варіанти статичного випробування на прикладі моста через р. Стара Ріка, що розташований на автомобільній дорозі Мукачєво-Рогатин.

*Варіант 1.* Тривалість випробування  $T = 8$  годин (тривалість робочого місяця  $T_m=160$  год.). Для випробування залучено  $I = 6$  працівників інженерно-наукового персоналу,  $B = 2$  – водіїв,  $A = 2$  – автомобілі.

Вихідні дані:

середня заробітна плата інженерно-наукового персоналу ЗПІ = 2700 грн./міс.,

середня заробітна плата водія ЗПВ = 2200 грн./міс.,

вартість оренди автомобіля ОА = 300 грн./год.

Вартість випробування  $ВВ = T \times (I \times \text{ЗПІ} + B \times \text{ЗПВ}) / T_m + A \times \text{ОА} \times T$ .

Отже,  $ВВ_1 = 8 \times (6 \times 2700 + 2 \times 2200) / 160 + 2 \times 300 \times 8 = 5830$  грн.

*Варіант 2* (статичне випробування за екстремального навантаження). Тривалість випробування  $T = 8$  годин (тривалість робочого місяця  $T_m=160$  год.). Для випробування необхідно залучити  $I = 12$  працівників інженерно-наукового персоналу,  $B = 5$  – водіїв,  $A = 5$  – автомобілів.

Вихідні дані:

середня заробітна плата інженерно-наукового персоналу ЗПІ = 2700 грн./міс.,

середня заробітна плата водія ЗПВ = 2200 грн./міс.,

вартість оренди автомобіля ОА = 300 грн./год.

Вартість випробування  $BB = T \times (I \times ЗПІ + V \times ЗПВ) / T_m + A \times OA \times T$ .

Отже,  $BB_2 = 8 \times (12 \times 2700 + 5 \times 2700) / 160 + 5 \times 300 \times 8 = 14170$  грн.

*Варіант 3* (статичне випробування за екстремального навантаження математично моделюється з використанням результатів випробування за варіантом 1). Тривалість випробування  $T = 8$  годин (тривалість робочого місяця  $T_m = 160$  год.). Для випробування необхідно залучити  $I = 6+1$  – працівників інженерно-наукового персоналу,  $V = 2$  – водіїв,  $A = 2$  – автомобілі.

Вихідні дані:

середня заробітна плата інженерно-наукового персоналу  $ЗПІ = 2700$  грн./міс.,

середня заробітна плата водія  $ЗПВ = 2200$  грн./міс.,

вартість оренди автомобіля  $OA = 300$  грн./год.

Вартість випробування  $BB = T \times (I \times ЗПІ + V \times ЗПВ) / T_m + A \times OA \times T$ .

Отже,  $BB_3 = 8 \times (7 \times 2700 + 2 \times 2200) / 160 + 2 \times 300 \times 8 = 5965$  грн.

У третьому варіанті до випробування необхідно залучити додатково одного інженерно-наукового працівника для виконання на комп'ютері моделювання екстремального статичного навантаження.

У результаті економічний ефект становить:

$E = BB_2 - BB_3 = 14170 - 5965 = 8205$  грн.

## 5.2. Висновки до розділу 5

1. При виготовленні армованої залізобетонної балки довжиною 22 м зі стержнем, з'єднаним обтисковою втулкою, економічна ефективність становить 99,34 грн., порівняно з тим, коли армування виконують зварним стержнем.

2. Продовження та розширення одного натурального статичного випробування шляхом математичного моделювання дає економічний ефект 8205 грн.

## ВИСНОВКИ

На основі проведених експериментальних і теоретичних досліджень у монографії вирішена актуальна науково-технічна задача розробки інженерної методики розрахунку напружено-деформованого стану та визначення механічних параметрів залізобетонних конструкцій мостів. Основні наукові результати та висновки наукової праці полягають у наступному.

Під час руйнування зразків вирішальне значення має ДКІН нормального відриву. Власні частоти не залежать від абсолютних розмірів зразка, а залежать від відношення довжини зразка до його висоти, відносної глибини тріщини та коефіцієнта Пуассона. Отримані в роботі формули можна використати для К-тарування балкових зразків із тріщиною, що не є перпендикулярною до поверхні зразка.

Отримано загальну частотну функцію, що описує поведінку під динамічним навантаженням залізобетонної плити проїзної частини моста, яка враховує її фізичні та механічні характеристики.

Запропоновано і обґрунтовано спосіб покращення збіжності методу скінченних елементів за рахунок дублювання розв'язків в базисах різних класів функцій. Стосовно дослідження НДС мостової опори та балки запропонований підхід приблизно на порядок підвищує точність наближених розв'язків. Безпосередньо перевіркою встановлено, що повторний чисельний аналіз задачі для нової базової системи функцій підвищує надійність результатів, дає змогу оптимізувати процедуру вибору вузлів дискретизації, зменшує обчислювальні затрати. Точність наближених розв'язків оцінена за різницею розв'язків, знайдених у різних базах. Розвинуто методику знаходження напружено-деформованого стану балки таврового профілю за наявності в ній дефекту типу тріщини. При цьому ефективний результат здобуто за допомогою апарату узагальнених функцій, елементів теорії пружності та концепцій механіки крихкого руйнування. Отримані результати можуть використовуватись в інженерній практиці для знаходження ширини розкриття тріщини армованої балки.

Розроблено методику наближеного аналізу балки з косою тріщиною, що базується на суперпозиції пружних полів суцільної балки та поля тіла з тріщиною. Зокрема встановлено, що найбільш небезпечна вертикальна орієнтація тріщини, для якої за усіх решти однакових умов коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_I = K_I^0$  є максимальним. Для зосере-

дженої сили сталої величини  $k$ , залежить від точки прикладання сили і при  $\alpha = 90^\circ$  набуває найбільшого значення, коли сила діє у точці на продовженні тріщини. Якщо  $\alpha$  менше за  $60^\circ$  коефіцієнт набуває максимального значення, коли з вершини тріщини точку прикладання сили видно під кутом близьким до прямого.

Запропоновано послідовність ієрархічних моделей НДС плити у формі паралелепіпеда, що використовують послідовно дрібніші схему скінченних елементів і уможливають урахування підкріплення плити балками жорсткості.

Досліджено НДС тонкої поздовжньо армованої плити з допомогою комплексного ряду Фур'є. Методом розвинення у ряди за гіперболічними та тригонометричними системами функцій отримано зручніші за результати чисельних методів, інженерні формули, що описують спричинений власною вагою прогин мостової плити, який використовується у стандартах країн ЄС і України. Зокрема для моста через ріку Стара Ріка: – визначена циліндрична жорсткість  $D=3,777 \cdot 10^{10}$  Нм; – ефективна товщина плити, –  $h = 1,239$  м.

Запропоновано і запатентовано втулкеве з'єднання арматури, шляхом обтискування профільним пуансоном, що дає значно надійніше зчеплення та вищу довговічність під втомним циклічним навантаженням. Воно знайшло практичне використання при армуванні конструкцій мостових переходів, шляхопроводів, набивного стовпа на мостах.

Запропонований в монографії спосіб з'єднання арматурних стержнів та рекомендації з розрахунку напружено-деформованого стану прогонової будови моста мають позитивний економічний ефект.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абовский Н. П. Вариационные принципы в теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга– М.: Наука, 1978. – 288 с.
2. Аладьев В. З. Вычислительные задачи на персональном компьютере / В. Аладьев, Н. Гершгорн– Киев: Техника, 1991. – 248 с.
3. Андрейкив А. Е. Упрощенный метод определения зависимости от времени коэффициента интенсивности напряжений при испытаниях образцов на безопорный ударный изгиб / А. Андрейкив, И. Рокач // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. –№ 5. – С. 42-47.
4. Андрейків О. Є. Розрахунок залишкового ресурсу відповідальних елементів мостів / О. Є. Андрейків, Й. Й. Лучко, І.М. Панько // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Львів: Каменяр, 2001. – Вип. 3. – С. 9-22.
5. Аргирис Д. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц / Д. Аргирис/ Под ред. Смирнова А. Ф. – М.: Изд-во иностр. лит., 1968. – 241 с.
6. Ахвердов И. Н. Влияние усадки, условий твердения, циклических температурных воздействий на сцепление арматуры с бетоном / И. Н. Ахвердов // Бетон и железобетон. – 1968. – № 12. – С. 4-7.
7. Байков В. Н. Железобетонные конструкции / В. Н. Байков, Э. Г. Сегалов // Общий курс. – М.: Стройиздат, 1976. – 767 с.
8. Байков В. Н. О дальнейшем развитии теории железобетона / В. Н. Байков // Бетон и железобетон. – 1979. – № 7. –С. 27-29.
9. Байков В. Н. Построение зависимости между направлениями и деформациями сжатого бетона по системе нормированных показателей / В. Н.Байков , С. В. Горбачов, З. А. Димитров // Известия ВУЗов: Строительство и архитектура. – 1977. – № 6. – С. 15-18.
10. Байков В. Н. Сцепление арматуры с бетоном в конструкциях / В. Н. Байков // Бетон и железобетон. – 1968. – № 12. – С. 13-16.
11. Батухина А. Г. Анализ временных нагрузок мостов стран Западной Европы / А. Г. Батухина // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: зб. наук. праць. – Львів : Каменяр, 2002. – Вип. 5. – С. 443-454.
12. Берг О. Я. Физические основы прочности бетонов / О. Я. Берг– М. : Стройиздат, 1962. – 96 с.

13. Бойко В. М. Динамічне кручення циліндричного зразка з зовнішньою кільцевою тріщиною / В. М. Бойко // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Львів : Каменярь, 2001. – Вип. 3. – С.30-41.
14. Бондаренко В. М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона / В. М. Бондаренко.– Харьков, 1968. – 323 с.
15. Бондарь Н. Г. Как работают мосты / Н.Г. Бондарь.– Київ: Наукова думка, 1986. – 118 с.
16. Брутханс З. Применение добавок в технологии производства сборного железобетона для мостовых конструкций / З. Брутханс // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Каменярь, 2001. – Вип. 3. – С. 42-50.
17. Будівельна механіка та металеві конструкції : підручник / В. А. Баженов, О. Ф. Дашенко, Л. В. Коломієць, О. В. Ухов.– Одеса: Астропринт, 2001. – 430 с.
18. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу.– М.: Мир, 1987. – 542 с.
19. Випробування монолітного залізобетонного моста через р. Стара Ріка / П. М. Коваль, А. Г. Походенько, Й. Й. Лучко, А. Є. Фаль // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій: зб. наук. праць. – Л.: Каменярь, 2003. – Вип. 5. – С. 65-72.
20. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров.– М. : Наука, 1979. – 320 с.
21. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений / М. К. Гавурин. – М. : Наука, 1971. – 248 с.
22. Гайда О. М. Вплив процесу сушки на властивості бетону і залізобетону та їх напружений стан / О. М. Гайда // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Каменярь, 2006. – Вип. 8. – С. 5-12.
23. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер– М.: Мир, 1984. – 428 с.
24. Гвоздев А. А. К вопросу о поведении железобетонных конструкций в стадии, близкой к разрушению / А. А. Гвоздев, В. Н. Байков // Бетон и железобетон. – 1977. – № 9. – С. 22-24.
25. Гвоздев А. А. Развитие теории железобетона / А. А. Гвоздев // Бетон и железобетон. – 1964. – № 8. – С. 345-352.
26. Гвоздев А. А. Развитие теории железобетона / А. А. Гвоздев, С.А. Дмитриев, К. Э. Таль // Развитие бетона и железобетона в СССР. – М.: Стройиздат, 1969. - С. 133-171.
27. Гвоздев А. А. Расчет железобетонных обычных и предварительно напряженных конструкций по предельным состояниям / А.А. Гво-



здев // Материалы международного совещания по расчету строительных конструкций. – М. : Госстройиздат, 1961.– 121 с.

28. Гибшман Е. Е. Мосты и сооружения на дорогах / Е. Гибшман, Б. Назаренко– М.: Транспорт, 1972. – 408 с.

29. Голышев А. Б. Проектирование усиления несущих железобетонных конструкций производственных зданий и сооружений / А. Голышев, И. Ткаченко– К. : Логос, 2001. – 172 с.

30. Делявський М. В. Поперечний згин мостової залізобетонної плити / М. В. Делявський, Й. Й. Лучко, Г. Й. Лучко // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Каменярь, 2000. – Вип. 2. – С. 39-45.

31. Демидович В. Н. Основы вычислительной математики / В. Демидович, И. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.

32. Джонс Р. Неразрушающие методы испытания бетонов / Р. Джонс, И. Фэкэару. – М. : Стройиздат, 1974. – 295 с.

33. Динамічний розтяг порожнинного циліндричного зразка з кільцевою тріщиною / [О. Є. Андрейків, В. М. Бойко, С. Є. Ковчик, І. В. Ходань] // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 4. – С. 74-78.

34. Динамічний розтяг циліндричного зразка з кільцевою тріщиною / [О. Є. Андрейків, В. М. Бойко, С. Є. Ковчик, І. В. Ходань] // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – № 3. – С. 52-55.

35. Дьяконов В. MathCAD 2000 : учебный курс / В. Дьяконов.– СПб. : Питер, 2000. – 592 с.

36. Енциклопедичний словник Брокгауза й Ефрона. – М. : Терра, 2001. – 726 с.

37. Ефимов А. В. Математический анализ : специальные разделы / А. В. Ефимов, Ю. Г. Золотарев, В. М. Терпигорева // Применение некоторых методов математического и функционального анализа : учеб. пособие для вузов : часть II – М. : Высш. школа, 1980. – 295 с.

38. З'єднання стрижнів арматурних обтисненням гільзами ТУ У В.26.6-00018112-257:2006 / [технічні умови введені в дію 28.11.2006] – К. : Держстандарт України, 2006.

39. Зайцев Ю.В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения / Ю. В. Зайцев. – М. : Стройиздат, 1982. – 196 с.

40. Загора А. Л. Гашение колебаний мостовых конструкций / А. Л. Загора, М. И. Казакевич.– М. : Транспорт, 1983.- 143 с.

41. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган.– М. : Мир, 1986. – 318 с.

42. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич.– М. : Мир, 1975. – 541с.

43. Ігнатишин М. І. Аналіз чисельних методів розрахунку мостових конструкцій / М.І. Ігнатишин / Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій : зб. наук. праць / за заг. ред. Лучка Й.Й. – Л. : Каменяр, 2005. – Вип. 6. – С. 659-668.

44. Ігнатишин М. І. Аналітично-числовий метод розрахунку вільно опертих ортотропних плит для мостів у системі MATHCAD / М. І. Ігнатишин // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій : зб. наук. праць / за заг. редакцією О. Є. Андрейківа, Й. Й. Лучка, В. В. Божидарника; ФМІ ім. Г. В. Карпенка – Л. : Каменяр, 2002. – Вип. 5. – С. 495-504.

45. Ігнатишин М. І. Визначення інтегральної циліндричної жорсткості моста за результатами статичних випробувань / М.І. Ігнатишин, Лучко Й.Й. // Збірник наукових праць ДДНДІ ім. М.П. Шульгіна. – К. : Державний дорожній науково-дослідний інститут ім. М.П. Шульгіна, 2008. – С. 91-96.

46. Ігнатишин М. І. Сучасний стан проблеми з'єднання арматури періодично-го профілю у залізобетонних конструкціях / М. Ігнатишин, М. Гвоздик / Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць / за заг. редакцією професора Лучка Й. Й. ; НАН України ; Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка. – Л. : Каменяр, 2004. – Вип. 6. – С. 42-47.

47. Казакевич М. И. Аэродинамика мостов / М. И. Казакевич.– М. : Транспорт, 1987. – 240 с.

48. Казакевич М. И. Стабилизация вант при действии ветра и подвижных нагрузок / М. И. Казакевич, А. Л. Загора // Вестник мостостроения. – М. : Инф.-изд. центр ТИМР, 1998. – № 2. – С. 21-25.

49. Каллен М. Дж. Метод конечных элементов // Численные методы, используемые в атмосферных моделях : сб. статей. – Л. : Гидрометеиздат, 1982. – 498 с.

50. Коваль П. М. Випробування монолітного залізобетонного моста через р. Стара ріка / П. М. Коваль, А.Г. Походенко, Й.Й. Лучко, А.Є. Фаль// Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць / за заг. редакцією професора Лучка Й.Й. – Л. : Каменяр, 2003. – Вип. 5. – С. 65-71.

51. Коваль П. М. Оцінка тріщиностійкості бетонів у мостових конструкціях за методом акустичної емісії / П. М. Коваль, Й. Й. Лучко, П. М. Стащук // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць / за заг. редакцією професора Лучка Й.Й. – Л. : Каменяр, 2001. – Вип. 3. – С. 91-100.

52. Ковчик С. Е. Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения / С. Е. Ковчик, Е. М. Моро-

зов // Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие. – К. : Наук. думка, 1988. – Т. 3. – 436 с.

53. Колебания пластин и оболочек. – Режим доступа : [http://www.odsopromat.narod.ru/DPMSM/MaterZaoch/lekciyaDin/DIN\\_RU\\_S/din\\_55-66/DIN\\_66.HTM](http://www.odsopromat.narod.ru/DPMSM/MaterZaoch/lekciyaDin/DIN_RU_S/din_55-66/DIN_66.HTM)

54. Коллатц Ф. Функциональный анализ и вычислительная математика / Ф. Коллатц.– М. : Мир, 1969. – 448 с.

55. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров , С.В. Фомин.– М. : Наука, 1976. – 544 с.

56. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн.– М. : Наука, 1978. – 831 с.

57. Корнеев В.Г. Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости / В.Г. Корнеев // Извест. ВНИИ гидротехн. – 1967. – Т. 83. – С. 286-307.

58. Корнієв М. М. Сталеві мости: теоретичний і практичний посібник з проектування / М. М. Корнієв.– Київ, 2003. – 547 с.

59. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или волостями / А. С. Космодамианский.– Киев-Донецк : Вища школа, 1976. – 200 с.

60. Лучко И. И. Распределение касательных напряжений между арматурой и бетоном / И. И. Лучко, В. В. Лотыш // Бетон и железобетон. – 1990. – № 2. – С. 38-39.

61. Лучко И.И. Некоторые аспекты теорий сцепления арматуры с бетоном в изгибаемых элементах / И.И. Лучко, В.В. Леввич // Препринт № 175; Физико-механический институт НАН Украины. – Львов, 1990. – 37 с.

62. Лучко Й. Й. Визначення деформації балкових елементів аналітичними та числовими методами / Й. Й. Лучко, М. І. Ігнатишин // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць / за заг. редакцією професора Лучка Й.Й. – Л. : Каменярь, 2006. – Вип. 8. – С. 45-58.

63. Лучко Й. Й. Визначення динамічного коефіцієнта інтенсивності напружень у балкових мостових конструкціях / Й. Й. Лучко, В. Бойко, М. І.Ігнатишин // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць / за заг. редакцією професора Лучка Й.Й. – Л. : Каменярь, 2003. – Вип. 5. – С. 112-122.

64. Лучко Й. Й. Визначення напружено-деформованого стану мостової опори аналітичними та числовими методами / Й. Й. Лучко, Є. Г. Іваник, М. І. Ігнатишин // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць / за заг. редакцією професора Лучка Й.Й. – Л. : Каменярь, 2007. – Вип. 9. – С. 91-100.

65. Лучко Й. Й. Диференціальне рівняння деформації плити та його застосування / Й. Й. Лучко, М. І. Ігнатишин // Вісник Тернопільського державного технічного університету – Т. : Тернопільський державний технічний університет ім. Івана Пулюя, 2009. – Т. 14. – № 2. – С. 22-30.

66. Лучко Й. Й. Методи дослідження та випробування будівельних матеріалів і конструкцій / Й. Й. Лучко, П. М. Коваль, М. Л. Дем'ян. – Л. : Каменярь, 2001. – 436 с.

67. Лучко Й. Й. Методи оцінки несучої здатності і підвищення тріщиностійкості залізобетонних елементів конструкцій / Й. Й. Лучко. – Львів : Слово і комерція, 1997. – 435 с.

68. Лучко Й. Й. Методика розрахунку напружено-деформованого стану залізобетонної балки таврового профілю з тріщиною / Й. Й. Лучко, Є. Г. Іваник, М. І. Ігнатишин // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – О. : Одеська державна академія будівництва та архітектури, 2009. – № 35. – С. 219-227.

69. Лучко Й. Й. Методичні рекомендації з проектування та технології виготовлення залізобетонних конструкцій армованих стержнями, що з'єднані втулками / Й. Й. Лучко, Т. В. Гембара, Я. Л. Іваницький. – Львів : ФМ1 ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2004. – 28 с.

70. Лучко Й. Й. Механіка руйнування та міцність матеріалів / Й. Й. Лучко, Г. Т. Сулим, В. І. Кириян. – Л. : Каменярь, 2004. – 886 с.

71. Лучко Й. Й. Міцність, тріщиностійкість та деформованість залізобетонних плит, армованих з'єднаною арматурою / Й. Й. Лучко // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Каменярь, 2001. – Вип. 3. – С. 148-154.

72. Лучко Й. Й. Мости: Конструкції та надійність / Й. Й. Лучко, П. М. Коваль, М. М. Корнієв [та ін.] / за ред. В.В. Панасюка, Й. Й. Лучка. – Л. : Каменярь, 2005. – 989 с.

73. Лучко Й. Й. Оцінка працездатності втулкового з'єднання арматурних стержнів / Й. Й. Лучко, Я. Л. Іваницький, М. М. Гвоздюк // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Каменярь, 2003. – Вип. 5. – С. 137-143.

74. Лучко Й. Й. Патент на винахід : Спосіб з'єднання арматурних стержнів періодичного профілю та пристрій для його реалізації / Й. Й. Лучко, Я.Л. Іваницький, С. Т. Штаюра, М. І. Ігнатишин // Бюл. № 1, 15.01.2004. – К. : Міністерство освіти і науки України, Державний департамент інтелектуальної власності, 2004 – 183 с.

75. Лучко Й. Й. Побудова чисельно-аналітичних схем розрахунку елементів будівельних конструкцій балкового типу / Й. Й. Лучко, Є. Г. Іваник, М. І. Ігнатишин // Теорія і практика розвитку АПК : збір-

ник матеріалів міжнародного науково-практичного форуму. – Л. : Львівський державний аграрний університет, 2007. – С. 415-424.

76. Лучко Й. Й. Поперечний згин вільно опертої ортотропної мостової плити під дією системи локальних навантажень / Й. Й. Лучко, М. І. Ігнатишин // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Каменярь, 2004. – Вип. 6. – С. 71-81.

77. Лучко Й. Й. Поперечний згин ортотропної залізобетонної плити / Й.Й. Лучко, М.І. Ігнатишин // Вісник технічного університету Поділля : технічні науки. – Х. : Технологічний університет Поділля, 2002. – № 5. –С.28-30.

78. Лучко Й. Й. Розв'язання диференціального рівняння деформації тонкої плити та його прикладне застосування / Й. Й. Лучко, М. І. Ігнатишин // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Каменярь, 2008. – Вип. 10. – С. 95-102.

79. Лучко Й. Й. Розрахунок фізико-механічних, геометричних та силових параметрів пластичного деформування товстостінних трубчатих з'єднань арматурних стержнів / Й.Й. Лучко // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Каменярь, 2002. –Вип. 3. – С. 112-115.

80. Лучко Й. Й. Числові та аналітичні методи розрахунку мостових конструкцій / Й. Й. Лучко, М. І. Ігнатишин // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. – Д. : Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту, 2010. – Вип. 33. – С. 161-166.

81. Лучко Й. Й. Визначення власних частот коливань, ефективної товщини та модуля пружності залізобетонної плити при різних способах опирання / Й. Й. Лучко, М. І. Ігнатишин // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : збірник наукових праць. – Л. : Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка, 2009. – Вип. 11. – С. 81-90.

82. Лучко Й. Й. Рекомендації з розрахунку характеристик напружено-деформованого стану конструкцій мостів / Й. Й. Лучко, М. І. Ігнатишин.– Львів : ДНУЗТ ім. В. Лазаряна, 2010. – С.1-24.

83. Мадатян С. А. Прочность и деформативность опрессованных растянутых соединений арматуры / С. А. Мадатян, В. В. Дегтярев, Б. Н. Фридлянов // Бетоны и железобетоны. – 2004. – № 3. – С.13-17.

84. Махенхауэр Б. Спектральный метод // Численные методы, используемые в атмосферных моделях : сб. статей. – Л. : Гидрометеоздат, 1982. – С. 245-273.

85. Мерили П. Е., Орзаг С. А. Псевдоспектральный метод // Численные методы, используемые в атмосферных моделях : сб. статей. – Л. : Гидрометеиздат, 1982. – 498 с.
86. Метод конечных элементов / [П. М. Варвак, И. М. Бузун, А. С. Городецкий, В. Г. Пискунов, Ю. Н. Толокнов] – Київ : Вища школа, 1981. – 176 с.
87. Методологічні аспекти з'єднання арматури обтиснутою гільзою / [Й. Й. Лучко, Я. Л. Іваницький, М. Д. Куцигін, Ю. М. Беклемішев] / тез. доп. II Міжнар. симп.: Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – Львів, 1996. – С. 347-349.
88. Мишкис А.Д. Математика для вузов. Специальные курсы / А. Д. Мишкис– М. : Наука, 1971. – 632 с.
89. Моргун А. С. Дослідження зміни жорсткості через появу тріщин залізобетонних балок при статичних довготривалих навантаженнях / А. С. Моргун, І. А. Моргун // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця : Будівництво, 2007. – № 1. – С. 24-27.
90. Моргун А. С. О вычислении  $\psi^*(t)$  с учетом возрастания нагрузки во времени / А. С. Моргун. // Вопросы строительства и архитектуры. – Минск : Высшая школа, 1977. – Вып. 7. – С. 25-30.
91. Мулин Н. М. Деформации железобетонных элементов при работе стержневой арматуры в упруго-пластической стадии / Н. М. Мулин, Ю. Л. Гуца // Бетон и железобетон. – 1970. – № 3. – С. 24-27.
92. Мулин Н. М. Стержневая арматура железобетонных конструкций / Н. М. Мулин.– М. : Стройиздат, 1974. – 232 с.
93. Несварные обжимные стыки арматуры в железобетонных конструкциях / [Н. Г. Матков, Э. А. Балочик, В. Н. Тубин, А. В. Лютиков] // Бетон и железобетон. – 2003. – № 4. – 610 с.
94. Оатул А. А. Сцепление арматуры с бетоном: обзор исследований по разработке основ теории / А. А. Оатул, Ю. Ф. Кутин, В. В. Пасешник // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1977. – № 5. – С. 3-15.
95. Оатул А. А. Предложения к построению теории сцепления арматуры с бетоном / А. А. Оатул // Бетон и железобетон, 1968. – № 2. – С. 8-10.
96. Оатул А. А. Предложения к построению технической теории сцепления арматуры с бетоном / В. М. Цехмистров, Ю. Ф. Кутин [и др.] – М., 1971. – С. 45-57.
97. Образцов И. Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных пространственных конструкций / И. Ф. Образцов.– М. : Машиностроение, 1966. – 392 с.
98. Образцов И. Ф. Конечные элементы и аппроксимация / И. Ф. Образцов, О. Зенкевич, К. Морган.– М. : Мир, 1986. – 318 с.

99. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Д. Оден. – М. : Мир, 1976. – 464 с.
100. Приближенное решение операторных уравнений / [М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко] – М. : Наука, 1969. – 456 с.
101. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – К. : Наук. думка, 1968. – 248 с.
102. Партон В. З. Динамическая механика разрушения / В. З. Партон, В. Г. Борисковский. – М. : Машиностроение, 1985. – 264 с.
103. Патент України № 63168 А : Спосіб з'єднання арматурних стержнів періодичного профілю та пристрій для його реалізації / Лучко Й. Й., Іваницький Я. Л., Штаюра С. Т., Ігнатишин М. І. // Бюл. № 1 / опубл. 15.01.2004.
104. Пенцак А. Я. Зчеплення між арматурою і бетоном та його вплив на характеристики міцності залізобетонних конструкцій / А.Я. Пенцак // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Каменяр, 2006. – Вип. 8. – С. 70-79.
105. Провести исследование служебных свойств арматуры немерных длин стыковой гильзы и дать предложение по ее применению в строительстве : отчет по теме / НИИЖБ Госстроя СССР. – М., 1990. – 103 с.
106. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений / И. Е. Прокопович. – М. : Госстройиздат, 1963. – 260 с.
107. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики / Р. Рихтмайер. – М. : Мир, 1982. – 486 с.
108. Рокач И. В. Упрощенный метод определения зависимости от времени коэффициента интенсивности напряжений при испытаниях образцов на трехточечный ударный изгиб / И. В. Рокач // Физ.-хим. механика материалов. – 1990. – № 3. – 79 с.
109. Руйнування мостів тривалої експлуатації / [Й. Й. Лучко, М. М. Стадник, Р. М. Хархаліс, М. І. Ігнатишин, Т. Г. Ушак] // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка, 2002. – Вип. 5. – С. 525-533.
110. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
111. Споруди транспорту. Мости та труби : правила проектування : ДБН В.2.3 : 14:2006 / [чинні від 06.05.2006] – К. : Міністерство будівництва, архітектури та житлово-комунального господарства України, 2006. – С. 359-360. (Державні будівельні норми України).

112. Справочник по сопротивлению материалов / [Г. С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев ; отв. ред. Г.С. Писаренко.] – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Наук. думка, 1988. – 736 с.
113. Сулим Г. Т. Числові методи в опорі матеріалів та їх програмне забезпечення: навчальний посібник / Г. Т. Сулим, Л. І. Гурняк, В. З. Станкевич. – Луцьк : Вид-во ЛДТУ, 2006. – 147 с.
114. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, К. Г. Войновски.-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.
115. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.
116. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко., Д. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 575 с.
117. Ужполявичюс Б. Б. Упругость неоднородных твердых тел / Б.Б. Ужполявичюс // Литовский механический сборник, 1 (6). – 1970.
118. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев.– М. : Наука, 1970. – 544 с.
119. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела / А.П. Филин.– М. : Наука, 1975. – 832 с.
120. Филин А. П. Функциональный анализ и вычислительная математика / А.П. Филин, Л. Коллатц.– М. : Мир, 1969. – 444 с.
121. Филоненко С. Ф. Акустическая эмиссия: Измерение, контроль, диагностика / С.Ф. Филоненко.– К. : Изд-во КМУГА, 1999. – 304 с.
122. Хатсон В. Приложения функционального анализа и теории операторов / В. Хатсон, Д. Тим– М. : Мир, 1983. – 432 с.
123. Холмянский М. М. Закладные детали сборных железобетонных элементов / М. М. Холмянский.– М. : Стройиздат, 1968. – 208 с.
124. Холмянский М. М. Техническая теория сцепления арматуры с бетоном и ее применение // Бетон и железобетон. – 1968. – № 12. – С.10-13.
125. Яйцева А. Г. К вопросу о теории трещин железобетона / А.Г. Яйцева // Бетон и железобетон. – 1984. – № 4. – С.17-24.
126. Aberson J. A. Dynamic analysis of cracked structures using singularity finite elements / J. A. Aberson, J. M. Anderson, W. W. King // In G. C. Sih (Ed.), *Elastodynamic crack problems*, Northoff Int. Publ. – Leyden, 1977. – PP. 249-257.
127. Besseling J.F. The complete analogy between the matrix equations and the continuous field equations of structural analysis / J.F. Besseling // *Presses Academiques. Europeennes. – Bruxelles*, 1964. – PP. 223-242.
128. Bohme W. On the quantification of dynamic effects in impact loading and the practical application for  $K_{Id}$  determination / W. Bohme, J. Kalthoff // *Physique, Coll. C 5.* –1985. – PP. 213-225.



129. Bohme W. The behaviour of notched bend specimens IB in impact testing / W. Bohme, F. KalthoffJ. // *Int. J. Fract.* – 1982. – PP. 139-141.
130. Brebbia C.A. Fundamentals of Finite Element Techn Structural Engineers. Buttervorths / C.A. Brebbia, and Connor, J.J. – London, 1973. – PP. 269-278.
131. Connor, J. J. Finite Element Techniques for Fluid Flow / Connor, J. J. and Brebbia. C. A. Butt. – London, 1976. – PP. 310-315.
132. Courant, R. Methods of Mathematical Physics / Courant, R., and Hilbert, D. Interscience. – N., 1953. – PP. 243-251.
133. Cruse, T. A. A direct formulation and numerical solution of transient elasto-dynamic problem / Cruse, T. A., and Rizzo, F. J. *J. Math. Anal. Appl.* 22, 1968. – PP. 281-289.
134. De Veubeke B.F. Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method / De Veubeke B.F. Stress Analysis, London–New York – Sydney, John Wiley and Sons LTD, 1965.
135. Dynamic analysis of instrumented impact tests using specimen detection measurement and mass-spring models / [T. Lorriot, E. Martin, J. M. Quenisset, J. P. Rebieare ] // *Int. J. of Fract.*, 1999. – PP. 299-305.
136. Giovaniola J. H. Investigation and application of the one-point-bend impact test / J. H. Giovaniola // *Fracture Mechanics: Seventeenth Volume. -Phil.*, 1986. – 307 p. – (Amer. Soc. Test. Mater.; ASTM STP 905). IB
137. Grimes R. G. A shield block Lanczo algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems / R. G. Grimes, J. G. Lewis, H. D. Simon // *SI AM J. Matrix Analysis Appl.*, 1994. – PP. 228-235.
138. Hess J. L. O. Calculation of potential flow about arbitral / J. L. Hess and Smith A. M. O. *Progress in Aeronautical Sciences Vol. 8* (D. Kuchemann, Ed.), Pergamon, London, 1964. – PP. 289-301.
139. Jaswon, M. A. Integral equation methods in potential theory / M. A. Jaswon, I, *Proc. Roy A* 275,23-32, 1963. – PP. 287-293.
140. Kalthoff J. F. The influence of dynamii effects in impact testing / J. F. Kalthoff, S. Winkler, J. Beinert // *Int. J. Fract.*, 1977. – PP. 528-534.
141. Kantorovich, L.V. Approximate Methods of Higher Noordhoff / L.V. Kantorovich, and Krylov V.I. Groningen, 1958. – PP. 681-690.
142. Kellogg, O. D. Foundations of Potential Theory / Kellogg, O. D. Dover, New York, 1953. – PP. 384-390.
143. Kuj S. Zaciskane zlacza tulejowe pretow zbrojenia/ Kuj S., Lukaszynski J. // *Inzynieria I budownictwo*. 1992. – № 10. – PP. 363-371.
144. Kupradze O. D. Potential Methods in the Theory of Elasticity / O.D. Kupradze// Daniel Davey & York, 1965. –PP. 298-305.
145. Landrein P. Influence of some test parameters on specimen loading determination methods in instrumented Charpy impact tests / P. Landrein, T. Lorriot, L. Guillaumat // *Ibid*, 2001. – PP. 65-71.

146. Lorriot T. Specimen loading determined by displacement measurement in instrumented Charpy impact test / T. Lorriot // *Ibid*, 2000. – PP. 67-74.

147. Mall S., Kobayashi A., Urabe Y. Dynamic photoelastic and dynamic-IB finite element analysis of dynamic tear test specimens // *Exp. Mech.*, 1978. – PP. 18-23.

148. Marur P.R. Dynamic analysis of one – point bend impact test / P.R. Marur // *Eng. Fract. Mech*, 2000. – PP. 67-72.

149. Marur P.R. Numerical simulation of anvil interaction in the impact testing of notched bend specimens / P.R. Marur // *Int. J. of Fract.*, 1996. – PP. 2-11.

150. Massonnet C. E. Numerical Use of Integral Procedures, in *Stress Analysis* / O. Kiewicz and G. Holister Eds. / Massonnet C. E. Wiley, London, 1966. – PP. 267-372.

151. Mikhlin S. G. *Integral Equations* / S. G. Mikhlin, Pergamon, New York, 1957. – PP. 256-261.

152. Mines R. A. The dynamic behavior of the instrumented IB Charpy test / Mines R. A. Ruiz C. // *J. Physique, Coll. C 5.*, 1985. – PP. 46-53.

153. Murti V. The use of quarter point element in dynamic crack analysis / V. Murti, S. Valliappan // *Eng. Fract. Mech.*, 1986. – 585 p.

154. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of* Noordhoff / N. I. Muskhelishvili // Groningen, 1953. – pp. 718-723.

155. Orynyak I. V. The modelling of elastic response of a three point bend specimen under impact loading / I. V. Orynyak, A. Ja Krasovsky // *Eng. Fract Mech*, 1998. – PP. 60-67.

156. Pian T. Basis of finite element method for solid continuum Numerical Methods / T. R Pian and Tong P. *Engng.* 1,3-28, 1969. – PP. 292-300.

157. Reissner E. A note on variational principles in elasticity / Reissner E. *Int. J. Solids Struc* 93-95, 1965. – PP. 382-391.

158. Rokach I. V. Simple formulae for processing of the results of a one point / Rokach I. V.

159. Smirnov V.J. *Integral equations and partial differential equations* / V.J. Smirnov in *A Course Mathematics*, Vol. IV, Addison-Wesley, London, 1964. – PP. 267-274.

160. Symm G.T. *Integral equation methods in potential theory* / G.T. Symm, II, *Proc. Roy. Soc* 275, 33-46, 1963. – PP. 258-267.

161. Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* / Washizu K. 2nd ed., P New York, 1975. – PP. 630-635.

162. Williams J. G. The analysis of instrumented impact tests using a mass-spring models / J. G. Williams, G. S. Adams // *Int. J. Fract.*, 1987. – PP. 33-41.

## Додаток А

### Програма розрахунку напружено-деформованого стану трехелементної мостової опори

Ідентифікатори змінних у програмі мають вигляд:

$R$  – реакція фундаменту;  $R_{11}, R_{21}, R_{12}, R_{22}, R_{13}, R_{23}$  – реакції скінченних елементів;  $q_1, q_2, q_3, q_4$  – лінійні переміщення вузлів;  $x, y$  – осі координат;  $L_1, F_1, E_1; L_2, F_2, E_2, L_3, F_3, E_3$  – довжина, площа перерізу та модуль пружності відповідного скінченного елемента.

Послідовність виконання програми.

1) Введення вхідних даних. Перший скінченний елемент:  
 $E_1 := 1.764 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}$ ,  $F_1 := 5 \text{ m}^2$ ,  $L_1 := 5 \text{ m}$ . Другий скінченний елемент:  
 $E_2 := 1.764 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}$ ,  $F_2 := 3 \text{ m}^2$ ,  $L_2 := 5 \text{ m}$ . Третій скінченний елемент:  
 $E_3 := 1.764 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}$ ,  $F_3 := 2 \text{ m}^2$ ,  $L_3 := 5 \text{ m}$ . Величина зовнішнього силового навантаження:  $P := -2 \times 10^6 \text{ N}$ .

2) Розрахунок. Перший скінченний елемент:  $u_1(x) = \alpha_{11} + \alpha_{12}x$  – переміщення уздовж осі опори першого скінченного елемента,  $q_1, q_2$  – ступені вільності першої опори; згідно з описаною вище методикою отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} \rightarrow \left( \frac{-1}{5m} \cdot q_1 + \frac{1}{5m} \cdot q_2 \right),$$

отже,

$u_1(x, q_1, q_2) := (1 \ x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \left( 1 - \frac{1}{5m} \cdot x \right) \cdot q_1 + \frac{1}{5m} \cdot q_2$ . Матриця жорсткості:

$$K_{e1} := E_1 \cdot F_1 \cdot \begin{pmatrix} \int_0^{L_1} \frac{d}{dx} u_1(x, 1, 0) \cdot \frac{d}{dx} u_1(x, 1, 0) dx & \int_0^{L_1} \frac{d}{dx} u_1(x, 1, 0) \cdot \frac{d}{dx} u_1(x, 0, 1) dx \\ \int_0^{L_1} \frac{d}{dx} u_1(x, 0, 1) \cdot \frac{d}{dx} u_1(x, 1, 0) dx & \int_0^{L_1} \frac{d}{dx} u_1(x, 0, 1) \cdot \frac{d}{dx} u_1(x, 0, 1) dx \end{pmatrix},$$

$$K_{e1} = \begin{pmatrix} 1.764 \times 10^{10} & -1.764 \times 10^{10} \\ -1.764 \times 10^{10} & 1.764 \times 10^{10} \end{pmatrix} \frac{N}{m^2};$$

Другий скінченний елемент:  $u_2(x) = \alpha_{21} + \alpha_{22}x$  – переміщення вздовж осі опори першого скінченного елемента,  $q_2, q_3$  – ступені вільності другої опори; аналогічно, як у випадку першого елемента, матимемо:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 1 & L_1 + L_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot q_2 - q_3 \\ \frac{-1}{5m} \cdot q_2 + \frac{1}{5m} \cdot q_3 \end{pmatrix},$$

отже,

$$u_2(x, q_2, q_3) := (1-x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 1 & L_1 + L_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \text{series}, q_2, q_3 \rightarrow \left(2 - \frac{1}{5m} \cdot x\right) \cdot q_2 + \left(-1 + \frac{1}{5m} \cdot x\right) \cdot q_3.$$

Матриця жорсткості:

$$Ke_2 := E_2 \cdot F_2 \cdot \begin{pmatrix} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{d}{dx} u_2(x,1,0) \cdot \frac{d}{dx} u_2(x,1,0) dx & \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{d}{dx} u_2(x,1,0) \cdot \frac{d}{dx} u_2(x,0,1) dx \\ \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{d}{dx} u_2(x,0,1) \cdot \frac{d}{dx} u_2(x,1,0) dx & \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{d}{dx} u_2(x,0,1) \cdot \frac{d}{dx} u_2(x,0,1) dx \end{pmatrix},$$

$$Ke_2 = \begin{pmatrix} 1.058 \times 10^{10} & -1.058 \times 10^{10} \\ -1.058 \times 10^{10} & 1.058 \times 10^{10} \end{pmatrix} \frac{N}{m^2};$$

Третій скінченний елемент:  $u_3(x) = \alpha_{31} + \alpha_{32}x$  – переміщення вздовж осі опори першого скінченного елемента,  $q_3, q_4$  – ступені вільності третьої опори; звідси слідує:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & L_1 + L_2 \\ 1 & L_1 + L_2 + L_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot q_3 - 2 \cdot q_4 \\ \frac{-1}{5m} \cdot q_3 + \frac{1}{5m} \cdot q_4 \end{pmatrix},$$

$$u_3(x, q_3, q_4) := (1-x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & L_1 + L_2 \\ 1 & L_1 + L_2 + L_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \text{series}, q_3, q_4 \rightarrow \left(3 - \frac{1}{5m} \cdot x\right) \cdot q_3 + \left(-2 + \frac{1}{5m} \cdot x\right) \cdot q_4.$$

Матриця жорсткості:

$$Ke_3 := E_3 \cdot F_3 \cdot \begin{pmatrix} \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{d}{dx} u_3(x,1,0) \cdot \frac{d}{dx} u_3(x,1,0) dx & \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{d}{dx} u_3(x,1,0) \cdot \frac{d}{dx} u_3(x,0,1) dx \\ \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{d}{dx} u_3(x,0,1) \cdot \frac{d}{dx} u_3(x,1,0) dx & \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{d}{dx} u_3(x,0,1) \cdot \frac{d}{dx} u_3(x,0,1) dx \end{pmatrix}$$

$$Ke_3 = \begin{pmatrix} 7.056 \times 10^9 & -7.056 \times 10^9 \\ -7.056 \times 10^9 & 7.056 \times 10^9 \end{pmatrix} \frac{N}{m^2}.$$

Глобальні характеристики та співвідношення для трохелементної мостової опори є такими:

1) глобальна незв'язна матриця жорсткості:

$$K_e := \begin{pmatrix} K_{e_{1,1}} & K_{e_{1,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{e_{1,2,1}} & K_{e_{1,2,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{e_{2,1}} & K_{e_{2,2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{e_{2,2,1}} & K_{e_{2,2,2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{e_{3,1}} & K_{e_{3,2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{e_{3,2,1}} & K_{e_{3,2,2}} \end{pmatrix},$$

2) глобальна кінематична матриця –  $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

3) глобальна зв'язна матриця жорсткості:  $K_h := A^T \cdot K_e \cdot A$ , звідки отримуємо такі числові значення:

$$K_h = \begin{pmatrix} 1.764 \times 10^{10} & -1.764 \times 10^{10} & 0 & 0 \\ -1.764 \times 10^{10} & 2.822 \times 10^{10} & -1.058 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & -1.058 \times 10^{10} & 1.764 \times 10^{10} & -7.056 \times 10^9 \\ 0 & 0 & -7.056 \times 10^9 & 7.056 \times 10^9 \end{pmatrix} \frac{N}{m^2},$$

$$K_{ff} := \begin{pmatrix} K_{h_{2,2}} & K_{h_{2,3}} & K_{h_{2,4}} \\ K_{h_{3,2}} & K_{h_{3,3}} & K_{h_{3,4}} \\ K_{h_{4,2}} & K_{h_{4,3}} & K_{h_{4,4}} \end{pmatrix}, K_{sf} := (K_{h_{1,2}} \ 0 \ 0), P_f := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} := K_{ff}^{-1} \cdot P_f,$$

$q_1 := 0 \cdot m$  – згідно з умовою закріплення.

Результати числового розрахунку:

1) лінійні переміщення вузлів:  $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.134 \times 10^{-4} \\ -3.023 \times 10^{-4} \\ -5.858 \times 10^{-4} \end{pmatrix} m,$

2) графіки лінійного переміщення  $u(x)$ , нормального напруження  $\sigma(x)$  та осьової сили  $F(x)$

$$u(x) := \begin{cases} u_1(x, q_1, q_2) & \text{if} \\ 0 \leq x < L_1 \\ u_2(x, q_2, q_3) & \text{if} \\ L_1 \leq x < L_1 + L_2 \\ u_3(x, q_3, q_4) & \text{if} \\ L_1 + L_2 \leq x < L_1 + L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\sigma(x) := \begin{cases} E_1 \cdot \left( \frac{d}{dx} u_1(x, q_1, q_2) \right) & \text{if} \\ 0 \leq x < L_1 \\ E_2 \cdot \left( \frac{d}{dx} u_2(x, q_2, q_3) \right) & \text{if} \\ L_1 \leq x < L_1 + L_2 \\ E_3 \cdot \left( \frac{d}{dx} u_3(x, q_3, q_4) \right) & \text{if} \\ L_1 + L_2 \leq x < L_1 + L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\sigma(x)F(x) := \begin{cases} E_1 \cdot F_1 \cdot \left( \frac{d}{dx} u_1(x, q_1, q_2) \right) & \text{if} \\ 0 \leq x < L_1 \\ E_2 \cdot F_2 \cdot \left( \frac{d}{dx} u_2(x, q_2, q_3) \right) & \text{if} \\ L_1 \leq x < L_1 + L_2 \\ E_3 \cdot F_3 \cdot \left( \frac{d}{dx} u_3(x, q_3, q_4) \right) & \text{if} \\ L_1 + L_2 \leq x < L_1 + L_2 + L_3 \end{cases}$$

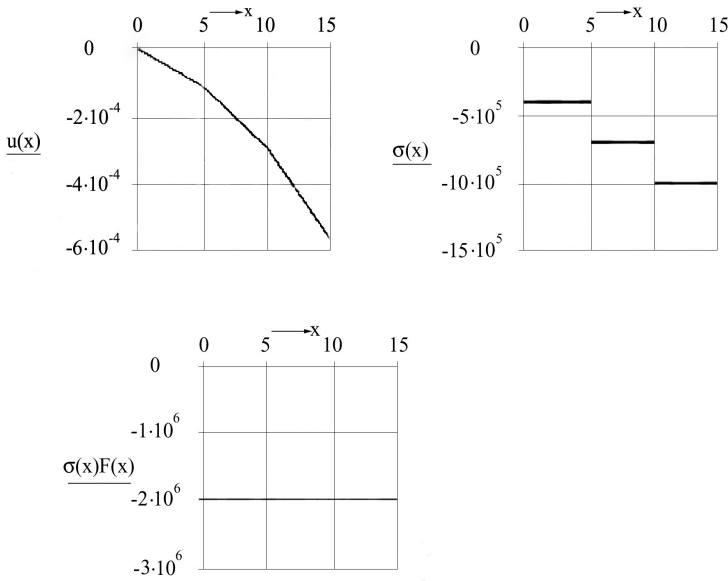


Рис. 2. Графіки лінійного переміщення  $u(x)$ , нормального напруження  $\sigma(x)$  та осьової сили  $\sigma(x)F(x)$ .

3) реакції скінченних елементів опори:  $\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix} := Ke_1 \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ ,

$\begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{pmatrix} := Ke_2 \cdot \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{23} \end{pmatrix} := Ke_3 \cdot \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$  і їх числові значення:

$$\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 10^6 \\ -2 \times 10^6 \end{pmatrix} N, \quad \begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 10^6 \\ -2 \times 10^6 \end{pmatrix} N, \quad \begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 10^6 \\ -2 \times 10^6 \end{pmatrix} N,$$

4) реакція опори  $Ps := Ksf \cdot \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$ ,  $Ps \rightarrow 2000000.000000000000000$

$$N = 2 \times 10^6 N.$$

**Додаток Б**  
**Програма розрахунку напружено-деформованого**  
**стану мостової опори**

**1. Вихідні дані:**  $E := 2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$  – модуль пружності,  $H := 5 \text{ m}$ , – висота опори,  $F_1 := 5 \text{ m}^2$  – площа нижнього перерізу,  $F_2 := 0.5 \text{ m}^2$  – площа верхнього перерізу,  $P := -46 \cdot 10^3 \cdot 9.81$ ,  $N$  – величина навантаження,  $N_0 := 5$  – кількість скінченних елементів,  $F(x) := F_1 \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}}{H} \cdot x \right)$  – площа перерізу на висоті  $x$ .

**2. Розрахунок:**

**один скінченний елемент:**

$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x$ ,  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  знаходимо з умови на кінцях опори.

$$q_1 \quad q_2 \text{ – ступені свободи. } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & H \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ -\frac{1}{5} \cdot q_1 + \frac{1}{5} \cdot q_2 \end{pmatrix},$$

отже,

$$u(x, q_1, q_2) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & H \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \text{ series } , q_1, q_2 \rightarrow \left( 1 - \frac{1}{5} \cdot x \right) \cdot q_1 + \frac{1}{5} \cdot x \cdot q_2$$

Матриця жорсткості:

$$K := E \cdot \begin{pmatrix} \int_0^H F(x) \cdot \frac{d}{dx} u(x, 1, 0) \cdot \frac{d}{dx} u(x, 1, 0) dx & \int_0^H F(x) \cdot \frac{d}{dx} u(x, 1, 0) \cdot \frac{d}{dx} u(x, 0, 1) dx \\ \int_0^H F(x) \cdot \frac{d}{dx} u(x, 0, 1) \cdot \frac{d}{dx} u(x, 1, 0) dx & \int_0^H F(x) \cdot \frac{d}{dx} u(x, 0, 1) \cdot \frac{d}{dx} u(x, 0, 1) dx \end{pmatrix}$$

Позначення:  $K_{ff} := K_{2,2}$ ,  $K_{sf} := K_{1,2}$ ,  $P_f := \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix}$ ,  $q := K_{ff}^{-1} \cdot P_f$ ,  
 $P_s := K_{sf} \cdot q_2$ .



### 3. Результати розрахунку.

Лінійні переміщення вузлів:  $q = \begin{pmatrix} 0 \\ -3.428 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$ .

Реакція опори:  $P_s = 4.513 \times 10^5$ .

Графіки лінійного переміщення та нормального напруження:

$$u(x) := u(x, q_1, q_2), \quad \sigma(x) := E \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

#### **N скінченних елементів.**

$k := 1..2 \cdot N_0$  - рядки,  $l := 1..N_0 + 1$  - стовпчики.

Глобальна кінематична матриця:

$$A_{k,l} := \begin{cases} 1 & \text{if } k = 2 \cdot l - 1 \vee k = 2 \cdot l - 2, \quad i := 1..2 \cdot N_0 \text{ - рядки,} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$j := 1..2 \cdot N_0$  - стовпчики.

Глобальна незв'язна матриця жорсткості:

$$K_{e1,i,j} := \left[ N_0 - \left( 2 \cdot \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) - 1 \right) \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot \left( \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) - 1 \right) \cdot \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) + 1 \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \right)^2}{3 \cdot N_0} \right] \cdot F_1 \cdot \frac{E}{H}$$

$$K_{e2,i,j} := - \left[ N_0 - \left( 2 \cdot \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) - 1 \right) \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot \left( \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) - 1 \right) \cdot \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) + 1 \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \right)^2}{3 \cdot N_0} \right] \cdot F_1 \cdot \frac{E}{H}$$

$$\begin{aligned}
K_{e3_{i,j}} &:= \left[ N_0 - \left( 2 \cdot \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) - 1 \right) \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3 \cdot \left( \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) - 1 \right) \cdot \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) + 1 \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \right)^2}{3 \cdot N_0} \right] \cdot F_1 \cdot \frac{E}{H} \\
K_{e4_{i,j}} &:= \left[ N_0 - \left( 2 \cdot \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) - 1 \right) \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3 \cdot \left( \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) - 1 \right) \cdot \text{trunc} \left( \frac{i+j-1}{4} + 1 \right) + 1 \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \right)^2}{3 \cdot N_0} \right] \cdot F_1 \cdot \frac{E}{H}
\end{aligned}$$

$$K_{e_{i,j}} := \begin{cases} K_{e1_{i,j}} & \text{if } i = j \wedge \text{mod}(i+1, 2) = 0 \wedge \text{mod}(j+1, 2) = 0 \\ K_{e2_{i,j}} & \text{if } i = j - 1 \wedge \text{mod}(i+1, 2) = 0 \wedge \text{mod}(j, 2) = 0 \\ K_{e3_{i,j}} & \text{if } i - 1 = j \wedge \text{mod}(i, 2) = 0 \wedge \text{mod}(j+1, 2) = 0 \\ K_{e4_{i,j}} & \text{if } i = j \wedge \text{mod}(i, 2) = 0 \wedge \text{mod}(j, 2) = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Глобальна зв'язна матриця жорсткості:

$$\begin{aligned}
K_h &:= A^T \cdot K_e \cdot A, \quad K_{ff} := \text{submatrix}(K_h, 2, N_0 + 1, 2, N_0 + 1), \\
K_{sf} &:= \text{submatrix}(K_h, 1, 1, 2, N_0 + 1), \quad n := 1..N_0, \quad P_{f_n} := \begin{cases} P & \text{if } n = N_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$M_1 := 0 \quad M_1 := 0, \quad M_2 := K_{ff}^{-1} \cdot P_f,$$

$$U := \text{stack}(M_1, M_2), \quad P_s := K_{sf} \cdot K_{ff}^{-1} \cdot P_f$$

### 3. Результати розрахунку.

$$\text{Реакція опори: } P_s = (4.513 \times 10^5) \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ -3.428 \times 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Графіки лінійного переміщення та нормального напруження:

$$u_n(x) := \text{for } n \in 1.. N_0$$

$$\left( n - \frac{x}{H} \right) \cdot U_n + \left( -n + 1 + \frac{x}{H} \right) \cdot U_{n+1} \quad \text{if } \frac{H}{N_0} \cdot (n-1) < x \leq \frac{H}{N_0} \cdot n$$

$$\sigma_n(x) := \text{for } n \in 1.. N$$

$$E \cdot \left[ \frac{d}{dx} \left[ \left( n - \frac{x}{H} \right) \cdot U_n + \left( -n + 1 + \frac{x}{H} \right) \cdot U_{n+1} \right] \right] \quad \text{if } \frac{H}{N_0} \cdot (n-1) < x \leq \frac{H}{N_0} \cdot n$$

Аналітичний розв'язок:

$$u_n(x) := \frac{H}{E} \cdot \left[ \frac{-1}{\left[ \frac{-x}{H} + \frac{x}{H} \cdot \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \cdot \left[ -1 + \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \cdot \frac{P}{F_1} + \frac{1}{\left[ -1 + \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \cdot \frac{P}{F_1} \right]$$

$$\sigma_n(x) := \frac{H}{\left[ \frac{-x}{H} + \frac{x}{H} \cdot \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 \cdot \left[ -1 + \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \cdot \frac{P}{F_1} \cdot \left[ \frac{-1}{H} + \frac{1}{H} \cdot \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Наукове видання

**Ігнатишин М.І.**

**МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ  
ЕЛЕМЕНТІВ МОСТОВИХ КОНСТРУКЦІЙ  
(опора, балка, плита)**

МОНОГРАФІЯ

У авторській редакції

Підписано до друку 06.07.2017 р. Гарнітура Times New Roman.  
Ум. друк. арк. 10,0. Формат 60x84/16. Тираж 100 прим.

**Редакційно-видавничий відділ МДУ**  
89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26  
*Свідоцтво ДК № 4916 від 16.06.2015 р.*

**Відруковано: ТОВ «РІК-У»**  
88000, м. Ужгород, вул. Гагаріна, 36