МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Мукачівський державний університет
Кафедра інженерії, технологій та професійної освіти

О. Г. Ніколаєв, В. Ф. Лазар

ВИЩА МАТЕМАТИКА
до розділу «ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Навчально методичний посібник
для здобувачів вищої освіти
першого (бакалаврського) рівня спеціальностей:
131»Прикладна механіка»
014 «Середня освіта (Природничі науки)»

Мукачево «МДУ» 2023

УДК 517.91(075.8)
ВИЩА МАТЕМАТИКА до розділу «ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ» Навчально методичний посібник для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальностей: 131»Прикладна механіка» 014 «Середня освіта (Природничі науки)»О. Г. Ніколаєв, В. Ф. Лазар. – Мукачево : Мукачівський державний університет, 2023. – 79 с.

Укладачі:
Ніколаєв Олексій Георгійович доктор ф.матеатичних наук, професор,
Лазар Василь Федорович кандидат технічних наук, доцент.
Рецензенти:
Стегней Маряна Іванівна доктор економічних наук, професор.

В55

Розглянута та затверджено на засіданні кафедри інженерії, технологій та професійної освіти Мукачівського державного університету протокол №5 від 22 березня 2023 року.

Схвалено та рекомендоване до друку на засіданні методичної комісії Мукачівського державного університету, протокол №9 від 24 квітня 2023 року.

Навчальний посібник містить базові поняття та основні класичних звичайних диференціальних рівнянь першого і другого порядків, методи і алгоритми їх розв'язання та властивості загальних розв'язків. Теоретичні положення ілюструються великою кількістю прикладів розв'язання задач для практичного засвоєння матеріалу читачем. Кожний розділ закінчується контрольними питаннями і задачами для самостійної роботи.

Для студентів технічних ВНЗ України, які навчаються за спеціальностями галузей знань «Прикладна механіка», «Машинобудування», "Середня освіта (природничі наукиЇ", «Інформаційні технології». Може бути корисним для студентів інших спеціальностей, а також для магістрів, аспірантів і науковців, які використовують методи теорії диференціальних рівнянь у своїй роботі.

Іл. 12. Бібліогр.: 19 назв

УДК 517.91(075.8)

ПЕРЕДМОВА

Звичайні диференціальні рівняння з’являються практично одночасно з диференціальним та інтегральним численням в останній чверті XVII століття. Термін «диференціальне рівняння» уперше використав Г. Лейбніц у листуванні з І. Ньютоном 1677 року. Але саме І. Ньютон був першим, хто дав означення цього поняття і запропонував один з універсальних методів для його дослідження – метод степеневих рядів. Свій пріоритет він закріпив анаграмами, які з’являються у його науковому листуванні того часу. У подальшому основоположний внесок у розвиток теорії диференціальних рівнянь зробили видатні математики 18 – 20 століть: Г. Лейбніц, Я. Бернуллі, Й. Бернуллі, Л. Ейлер, Ж. Лагранж, П. Лаплас, О. Коші, К. Гаусс, У. Гамільтон, А. Лежандр, К. Якобі, Ж. Ліувілль, С. Лі, О. М. Ляпунов, А. Пуанкаре, Г. Вейль, С. Н. Бернштейн, Д. Біркгоф, М. М. Боголюбов, Р. Курант, С. Л. Соболєв, Ж.-Л. Ліонс, В. О. Марченко, Ю. М. Березанський, Ю. Мозер і багато інших. Завдяки цьому внеску теорія диференціальних рівнянь у цей час динамічно розвивається. В результаті в ній з’являються нові розділи: диференціальні рівняння в частинних похідних, теорія динамічних систем, стохастичні диференціальні рівняння, теорія диференціальних операторів, асимптотичні методи аналізу диференціальних рівнянь. Крім того, розвиток диференціальних рівнянь сприяв появі та становленню нових галузей математики: варіаційного числення, теорії узагальнених функцій, функціонального аналізу, теорії систем, теорії оптимального управління, теорії інтегральних перетворень тощо. Вже цей перелік дозволяє судити про ту важливість диференціальних рівнянь для розвитку всієї фундаментальної та прикладної науки протягом останніх століть.

Роль диференціальних рівнянь у сучасній науці і техніці важко переоцінити. В першу чергу вона пов’язана з безліччю різноманітних моделей в різних областях людської діяльності, які ґрунтуються на диференціальних рівняннях. Саме через процес моделювання вивчаються закони навколишнього світу, приймаються рішення щодо керування різними системами, створюються нові зразки сучасної техніки. За останні 70 років значно розширились області застосування диференціальних рівнянь. Сьогодні це не тільки фізика, механіка, хімія, астрономія, але й економіка, екологія, сейсмологія, біологія, медицина тощо.

Курс «Звичайні диференціальні рівняння» або його окремі розділи грає важливу роль в фундаментальній підготовці інженера. Поняття, методи, алгоритми теорії диференціальних рівнянь формують у майбутнього інженера науково-методологічну базу для аналізу об'єктів навколишнього світу, розвивають навички логічного мислення, дають апарат для моделювання процесів і явищ, тобто формують компетенції, без яких неможлива повноцінна інженерна освіта. Диференціальні рівняння є складовою програми курсу «Вища математика» механічних і комп'ютерних спеціальностей технічних вузів України, і основою для викладання багатьох загальних і спеціальних дисциплін, таких як фізика, теоретична механіка, опір матеріалів, теорія механізмів і машин, теплотехніка, теорія керування, математичне моделювання тощо. Особливе становище по відношенню до теорії диференціальних рівнянь в переліку інженерних спеціальностей займають «Прикладна математика» і «Системний аналіз», оскільки саме вони формують основні компетенції, пов’язані зі створенням, аналізом, оптимізацією, обчисленням математичних і комп’ютерних моделей і з прийняттям рішень щодо оптимальному керуванню ними. Все це ставить завдання створення навчально-методичної літератури з теорії диференціальних рівнянь, яка б враховувала сучасні тенденції розвитку науки, техніки, освіти та інформаційних технологій.

Навчальний посібник написано на основі курсу лекцій, що викладалися авторами протягом ряду років студентам різних спеціальностей Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського "ХАІ" і Мукачівського державного університету. Він містить базові поняття та основні класи звичайних диференціальних рівнянь першого і другого порядків, методи і алгоритми їх розв'язання та властивості загальних розв'язків. Теоретичні положення в посібнику ілюструються великою кількістю прикладів розв'язання задач для практичного засвоєння матеріалу читачем. Крім того, кожний розділ закінчується контрольними питаннями і задачами для самостійної роботи. Їх відпрацювання гарантує отримання програмних результатів навчання, які з цього курсу закладено в освітні програми більшості інженерних спеціальностей ВНЗ України.

РОЗДІЛ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Загальні поняття теорії диференціальних рівнянь

Звичайним диференціальним рівнянням (у подальшому диференціальне рівняння (ДР)) називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, невідому функцію від цієї змінної і деякі її похідні. Диференціальне рівняння з декількома змінними називається рівнянням у частинних похідних і в цій книзі розглядатися не буде. **Порядком диференціального рівняння** називають найбільший порядок похідної, яка входить до диференціального рівняння.

Приклади. Наведемо приклади диференціальних рівнянь:

$$y'(x) = xy(x),\ yy'' = y'^2 - y'^3,\ y''' = y''^2.$$

Тут наведено диференціальними рівняннями першого, другого й третього порядків.

Звичайне диференціальне рівняння n-го порядку можна записати так:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1}$$

де $F(x, u, u_1, \dots, u_n)$ – задана функція від $n+2$ змінних, x – незалежна змінна, $y(x)$ – невідома функція.

Розв'язком диференціального рівняння (1) в області $D \subset \mathbf{R}$ називається така функція $y(x) \in C^n(D)$, яка йому задовольняє.

Приклад. Функція $y = x^2$ є розв'язком рівняння $xy' = 2y$ в $\mathbf{R}$.

Диференціальне рівняння першого порядку $F(x, y(x), y'(x)) = 0$. яке можна алгебраїчно розв'язати відносно $y'(x)$, тобто подати у вигляді

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{2}$$

де $f(x, y)$ – задана функція називається рівнянням, розв'язним відносно похідної. Найпростішим рівнянням такого класу є диференціальне рівняння $y'(x) = f(x)$, розв'язок якого можна знайти інтегруванням:

$$y(x) = \int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3}$$

де $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, C – довільна стала. Тому процес розв'язання диференціального рівняння часто називається його інтегруванням, сам розв'язок $y = y(x)$ – **інтегралом** диференціального рівняння, а лінія на площині xOy, яка зображає розв'язок, – **інтегральною кривою**. Формула (3) задає всю множину розв'язків диференціального рівняння $y'(x) = f(x)$ і називається його **загальним розв'язком**. При будь-якому конкретному значенні сталої C маємо **частинний розв'язок** диференціального рівняння. Звідси бачимо, що зазвичай диференціальне рівняння (2) має не одну інтегральну криву, а множину кривих, яка залежить від одного параметра.

Якщо розв'язок диференціального рівняння записано у вигляді невизначеного інтеграла від заданої функції, то кажуть, що його подано в **квадратурах**, причому рівняння вважається розв'язаним.

Геометричний зміст інтегральної кривої. Розглянемо диференціальне рівняння (2) в області D площини xOy, де функція $f(x,y)$ є заданою і неперервною. Функція $f(x,y)$ у кожній точці $(x,y) \in D$ задає $y'(x)$ – кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої, тобто поле напрямків в області D (через кожну точку області D проведено відрізок відповідного нахилу). Тоді інтегральна крива – це така лінія в області D, яка в кожній точці дотикається до напрямку поля в цій точці (рис. 1).

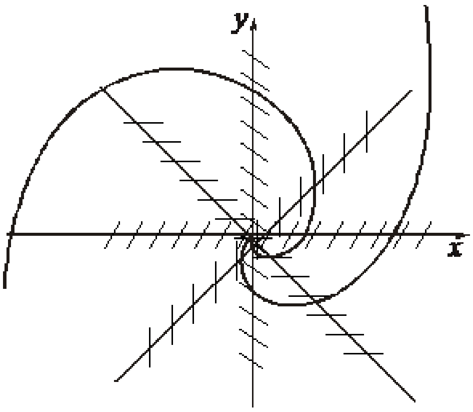

Рис. 1

Рівняння $\Phi(x,y,C)=0$ (функція Φ залежить від довільного параметра C) називається **загальним інтегралом** диференціального рівняння (2), якщо воно задає неявно всю множину розв'язків рівняння (2).

Задачею Коші для диференціального рівняння (2) називають задачу визначення такого розв'язку цього рівняння, який задовольняє умову $y(x_0)=y_0$. Геометричним змістом задачі Коші є знаходження в множині інтегральних кривих такої, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0) \in D$.

Найпростішим типом диференціального рівняння n-го порядку є рівняння $y^{(n)}(x)=f(x)$. Його розв'язок можна одержати після n інтегрувань правої частини рівняння, тому загальний розв'язок містить n довільних сталих інтегрування.

Узагалі, функція $y=y(x,C_1,\ldots,C_n)$ (або в неявній формі $\Phi(x,y,C_1,\ldots,C_n)=0$), яка при будь-якому наборі сталих задовольняє рівнянню (1) та описує всю множину його розв'язків, називається **загальним розв'язком** (**загальним інтегралом**) рівняння (1). Щоб вилучити частинний розв'язок із загального, необхідно на загальний розв'язок накласти n незалежних числових умов для визначення сталих $C_1,\ldots,C_n$. Такими умовами можуть бути значення шуканого розв'язку та всіх його похідних до порядку $n-1$ включно в деякій точці $x_0 \in D$. Наприклад, при $n=2$ маємо задачу визначення розв'язку системи

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \end{cases} \tag{4}$$

яку називають з**адачею Коші** для диференціального рівняння (1).

Приклад. Функція $y = \frac{1}{C}\cos(Cx + C_1)$ при $C \neq 0$ є загальним розв’язком диференціального рівняння $y''y = y'^2 - 1$. Частинним розв’язком цього рівняння, що задовольняє умови $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$, є функція $y = \cos x$ (перевірте!).

Фізичний зміст задачі Коші. Розглянемо точкову одиничну масу, яка рухається вздовж осі Ox під дією силового поля $F(x)$. Із другого закону Ньютона випливає, що закон руху $x = x(t)$ точки описується диференціальним рівнянням $x''(t) = F(x)$ і початковими умовами $x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = v_0$ (початкові положення і швидкість), тобто є розв’язком задачі Коші.

Диференціальне рівняння другого порядку має інший, відмінний від задачі Коші, тип задач однозначного визначення його розв’язку. Такі задачі називаються крайовими й описуються системою

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'') = 0,\ x \in (a, b), \\ y(a) = y_1,\ y(b) = y_2. \end{cases} \tag{5}$$

М**атематичні моделі деяких природних і соціальних систем, які ґрунтуються на диференціальних рівняннях**

1. Модель динаміки ціни товару. Ціна товару на ринку складається згідно з законом попиту та пропозиції. Якщо ціну в момент часу t позначити $p(t)$, функції попиту та пропозиції вважати заданими функціями $D(p)$ і $S(p)$, то найпростішу модель динаміки ціни можна подати у вигляді звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$p'(t) = a(D(p) - S(p)),\ p(t_0) = p_0,\ a > 0,$$

що відповідає пропорційній залежності швидкості зростання ціни від різниці між попитом і пропозицією.

2. Модель математичного маятника. Математичний маятник – це механічна система, що являє собою важку матеріальну точку масою m, підвішену на невагомій нерозтяжній ниті, яка закріплена в точці підвішування.

Після виведення зі стану спокою система виконує коливальний рух у вертикальній площині. Позначимо через $\varphi(t)$ кут відхилення від вертикалі в момент часу t. Запишемо другий закон Ньютона в проекції на дотичну до траєкторії руху, нехтуючи силами дисипації (рис. 2). Тоді математична модель коливань маятника описується задачею Коші

$$\begin{cases} \varphi'' + \omega^2 \sin\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi_0', \end{cases} \tag{7}$$

де $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

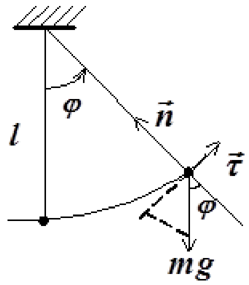

Рис. 2

3. Логістична модель біосистеми. Розглянемо модель замкненої біосистеми, що складається з однієї популяції, харчові ресурси якої є обмеженими. Позначимо кількість популяції в момент часу t через $x(t)$. Відносна швидкість збільшення популяції $\dfrac{x'(t)}{x(t)}$ у моделі вважається лінійною функцією $a - bx$, де a – відносна швидкість збільшення популяції при відсутності конкуренції за їжу (коефіцієнт народжуваності), b – коефіцієнт смертності через обмеженість харчових ресурсів. Остаточно динаміка популяції описується задачею Коші

$$\begin{cases} x'(t) = x(a - bx), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{8}$$

де x_0 – кількість популяції в момент часу t_0. Рівняння (8) називають **логістичним**.

4. Модель стійкості шарнірно опертого пружного стрижня. Розглянемо стрижень AB завдовжки l зі сталим перерізом S під дією стискальної сили P, яка протягом часу навантаження напрямлена вертикально. Силу прикладено до центра ваги перерізу. Кінці стрижня закріплено шарнірно, причому кінець A – нерухомий, а B – рухомий. При малих значеннях сили P вісь стрижня залишається вертикальною, а в стрижні виникають стискальні напруження $\sigma = \dfrac{P}{S}$. Поступове збільшення сили приведе до її критичного значення, при якому поряд з прямолінійною має місце також криволінійна форма рівноваги стрижня. Складемо рівняння для її визначення. У подібних задачах уважають, що переміщення точки B і максимальний прогин є малими порівняно з довжиною стрижня. У цьому випадку стрижень знаходиться в умовах чистого згину. Напружений стан чистого згину означає, що всередині стрижня є так звана «нейтральна вісь», яка в поздовжньому напрямку не деформується. При цьому плоскі поперечні

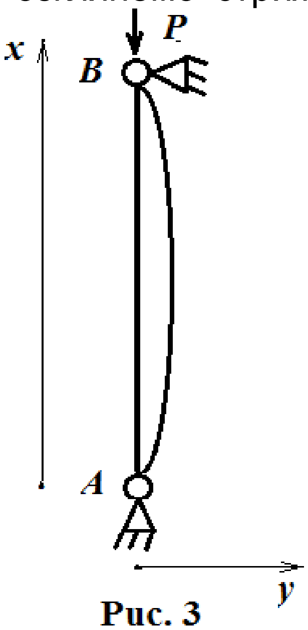

Рис. 3

перерізи стрижня залишаються плоскими і нормальними до нейтральної осі й після деформації. Початок декартової системи координат xOy сумістимо з точкою A. Напрямки осей показано на рис. 3. Уважаємо, що нейтральна вісь описується функцією $y = y(x)$. Розглянемо нескінченно малий елемент $MNPQ$ деформованого стрижня в околі точки (x, y) (рис. 4). Нормалі до нейтральної осі в кінцях елемента утворюють кут $d\theta$ і перетинаються в центрі кривини O, а нейтральна вісь усередині елемента збігається з дугою кола з центром O і радіусом $R(x)$, де $R(x)$ – радіус кривини нейтральної осі в точці x. Деформацію ε_x волокна стрижня, розташованого на відстані u від нейтральної осі, запишемо в такому вигляді:

$$\varepsilon_x = \frac{(R(x)+u)d\theta - R(x)d\theta}{R(x)d\theta} = \frac{u}{R(x)}.$$

За законом Гука нормальне напруження в поперечному перерізі

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\,\frac{u}{R(x)},$$

де E – модуль Юнга. Тоді момент сили в поперечному перерізі відносно нейтральної осі

$$M = \iint\limits_S \sigma_x u ds = \frac{E}{R(x)} \iint\limits_S u^2 du dz = \frac{JE}{R(x)},$$

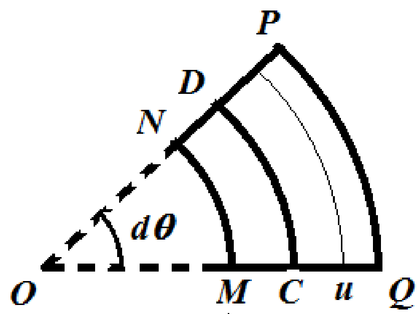

Рис. 4

де J – момент інерції поперечного перерізу стрижня. З іншого боку, момент зовнішньої сили в перерізі x відносно нейтральної осі – це $M = Py(x)$. У стані рівноваги $\dfrac{JE}{R(x)} = Py(x)$. При малому прогині стрижня виконується наближена формула $\dfrac{1}{R(x)} = -y''(x)$, тобто рівняння нейтральної осі стрижня описується однорідною крайовою задачею

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{P}{EJ}\, y(x) = 0, \\ y(0) = y(l) = 0. \end{cases}$$

Такого типу задачі називають задачами Штурма – Ліувілля.

5. Модель системи масового обслуговування. Нехай до системи масового обслуговування (станція мобільного зв’язку, станція технічного обслуговування, супермаркет, поліклініка, зупинка громадського транспорту, вокзальна каса, таможня і т. ін.), яка містить n приладів для обслуговування, надходить найпростіший потік замовлень середньою кількістю λ в одиницю часу. Кожний прилад може одночасно обслуговувати тільки одне замовлення. Якщо в момент надходження чергового замовлення в системі вже знаходиться $k \geq n$ замовлень, то воно стає в чергу й чекає на початок обслуговування. Уважаємо, що час обслуговування одного замовлення підпорядковується показниковому закону з параметром μ .

Нехай $N(t)$ – кількість замовлень, що знаходяться в системі в момент часу t, і $P_k(t)$ – імовірність випадкової події $N(t)=k$. Тоді в теорії випадкових процесів доводиться, що процес $N(t)$ описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), 1 \leq k < n, \\ P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu) P_k(t) + n\mu P_{k+1}(t), k \geq n. \end{cases}$$

6. Модель SIR для поширення епідемії

Модель SIR описує динаміку поширення епідемії в деякому замкненому регіоні (немає переміщення людей через його кордон). Стан захворюваності в момент t (вимірюється днями) характеризується трьома функціями: $s(t)$ – частка населення, яка сприйнятлива до захворювання, $i(t)$ –інфікована частка населення, $r(t)$ – частка населення, що одужала (мають імунітет від повторного захворювання). Очевидним є співвідношення між функціями $s(t)+i(t)+r(t)=1$.

В моделі вводяться такі припущення:

- немає притоку осіб до сприйнятливої групи, оскільки модель ігнорує народження та імміграцію;
- зменшення кількості осіб сприйнятливої групи може бути тільки за рахунок інфікованості;
- швидкість зміни $s(t)$ у часі залежить від $s(t)$, $i(t)$ та кількості контактів між сприйнятливими та інфікованими, причому кожна інфікована особа має фіксовану кількість b контактів на день, яких достатньо для поширення хвороби;
- фіксована частка k інфікованої групи одужає протягом будь-якого дня.

Модель динаміки захворюваності описується задачею Коші для нелінійної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} s'(t) = -bs(t)i(t), \\ r'(t) = ki(t), \\ i'(t) = bs(t)i(t) - ki(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} s(0) = s_0, \\ r(0) = r_0, \\ i(0) = i_0. \end{cases}$$

1.2. Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язні відносно похідної, можуть бути зображені у двох еквівалентних формах: з похідною

$$y' = f(x, y)$$

або з диференціалами

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – задані функції двох змінних. Наприклад, $y' = x^2 + y^2$, $(x + y)dx = xydy$.

Означення. Рівняння вигляду

$$y' = P(x)Q(y) \tag{1}$$

або

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \tag{2}$$

називається **рівнянням з відокремлюваними змінними**.

Запишемо рівняння (1) у формі (2), після чого в ньому відокремимо змінні, тобто згрупуємо в кожній частині рівності вирази, які залежать тільки від однієї змінної. Для цього в припущенні, що $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$, поділимо членами рівняння (2) на $P_2(x)Q_1(y)$ і рознесемо доданки в різні частини рівності.

Інтегруючи обидві частини одержаного рівняння, маємо

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx = -\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy. \tag{3}$$

Якщо інтеграли в (3) знаходяться в елементарних функціях, то загальний розв'язок рівняння (2) одержимо у вигляді

$$F_1(x) = -F_2(y) + C, \tag{4}$$

де $F_1(x), F_2(y)$ – первісні відповідних інтегралів. У протилежному випадку розв'язок рівняння (2) буде знайдено в квадратурах.

Приклади. 1. Розв'язати рівняння $y' = xy^2$. Запишемо $y' = \dfrac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y^2} = xdx,$$

звідки

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx \Rightarrow y = -\frac{2}{x^2 + C}.$$

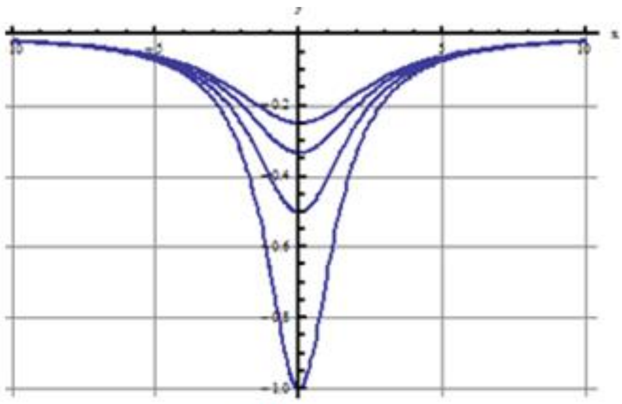

Рис. 5

При $C > 0$ розв’язок існує всюди в $\mathbf{R}$, при $C = 0$ – на півосях $(-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$, при $C < 0$ – на множині $\mathbf{R} \setminus \{\pm\sqrt{|C|}\}$. Наочне уявлення про характер інтегральних кривих при $C > 0$ дає рис. 5. Окремим розв’язком рівняння є інтегральна крива $y = 0$.

2. Розв’яжемо диференціальне рівняння

$$(yx + y)dx + (yx^2 - 1 + y - x^2)dy = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними, оскільки його можна записати таким чином:

$$y(x+1)dx = (1-y)(x^2+1)dy.$$

Після відокремлення змінних отримаємо

$$\frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1-y}{y}dy,$$

звідки

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{1-y}{y}dy \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln|y| - y + C.$$

До рівняння з відокремлюваними змінними зводяться рівняння вигляду $y' = f(ax + by + c)$, $b \neq 0$. У цьому випадку треба ввести нову невідому функцію $z = ax + by + c$, після заміни на яку вихідне рівняння стане рівнянням з відокремлюваними змінними

$$y = \frac{1}{b}(z - ax - c) \Rightarrow y' = \frac{1}{b}(z' - a) \Rightarrow z' = bf(z) + a.$$

Приклад 1.1.2. Розглянемо рівняння $y' = \cos^2(x - y)$. Зведемо його до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними шляхом заміни невідомої функції за формулою $z = x - y$:

$$z' = 1 - y' = 1 - \cos^2 z,$$

звідки $\dfrac{dz}{\sin^2 z} = dx$ або

$$\int \frac{dz}{\sin^2 z} = \int dx \Rightarrow -\mathrm{ctg}\, z = x + C .$$

Остаточно загальний інтеграл вихідного рівняння має вигляд

$$-\mathrm{ctg}(x - y) = x + C .$$

1.3. Однорідні диференціальні рівняння і звідні до них

Означення. Функцію $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ називають однорідною функцією степеня α, якщо для всіх $(x, y) \in D$ і кожного $\lambda \in \mathbf{R}$, для якого $(\lambda x, \lambda y) \in D$, виконується тотожність $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$.

Наприклад, функції $\frac{y}{x}$, $x + y$, $x^2 - xy + y^2$ є однорідними нульового, першого й другого степенів відповідно.

Означення. Диференціальні рівняння $y' = f(x, y)$ і $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називають **однорідними диференціальними рівняннями**, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового степеня або функції $P(x, y), Q(x, y)$ є однорідними функціями однакового степеня.

Розглянемо однорідне рівняння $y' = f(x, y)$. З означення випливає, що це рівняння можна зобразити у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1}$$

де $g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$. Замінимо невідому функцію y на $z = \frac{y}{x}$, унаслідок чого одержимо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$xz' = g(z) - z .$$

Приклади. 1. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2} .$$

Оскільки його права частина є однорідною функцією нульового степеня, то рівняння належить до класу однорідних рівнянь першого порядку. Тоді заміною $z = \frac{y}{x}$ воно зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними

$$xz' + z = \frac{z}{1 + z^2} .$$

Після відокремлення змінних та інтегрування одержимо

$$xz' = -\frac{z^3}{1+z^2} \Rightarrow -\frac{1+z^2}{z^3}dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int \frac{1+z^2}{z^3}dz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2z^2} - \ln|z| = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C.$$

2. Розв'яжемо рівняння $(x+y)dx+(x-y)dy=0$. Це рівняння є однорідним оскільки множники при диференціалах є однорідними многочленами першого степеня. Зробимо заміну невідомої функції $y = xz$

$$(x+xz)dx+(x-xz)zdx+(x-xz)xdz=0.$$

Після спрощення маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$(1+2z-z^2)dx+(1-z)xdz=0 \Rightarrow \frac{z-1}{1+2z-z^2}dz = \frac{dx}{x}.$$

$$\int \frac{z-1}{1+2z-z^2}dz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|z^2-2z-1| = \ln|x| + \ln C.$$

Остаточно загальний інтеграл можна записати рівністю

$$z^2-2z-1 = Cx^{-2}$$

або, повертаючись до вихідної функції

$$y^2-2xy-x^2 = C.$$

До однорідного рівняння можна також звести рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad (2)$$

за умови, що $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Перенесемо початок координат у точку (x_0, y_0), для якої

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0, \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0. \end{cases}$$

Це можна виконати таким перетворенням координат:

$$\begin{cases} x = \tilde{x}+x_0, \\ y = \tilde{y}+y_0. \end{cases}$$

Тепер у нових змінних рівняння (2) набуває вигляду

$$\tilde{y}'(\tilde{x}) = f\left(\frac{a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}}{a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}}\right),$$

тобто стає однорідним.

Приклад. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$(x-2y+4)dx+(2x+3y+1)dy=0.$$

Це рівняння класу (2). Знайдемо початок нової системи координат (x_0, y_0), розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x-2y+4=0, \\ 2x+3y+1=0, \end{cases}$$

звідки $x_0=-2$, $y_0=1$. Перетворення зсуву

$$\begin{cases} x=\tilde{x}-2, \\ y=\tilde{y}+1 \end{cases}$$

у вихідному диференціальному рівнянні зводить його до однорідного рівняння

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=\frac{2\tilde{y}-\tilde{x}}{3\tilde{y}+2\tilde{x}}.$$

Тепер після заміни $z=\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ одержимо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\tilde{x}z'=-\frac{1+3z^2}{3z+2}.$$

Інтегрування цього рівняння дає такий загальний інтеграл:

$$-\frac{1}{2}\ln(1+3z^2)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}z\right)=\ln|\tilde{x}|+\ln C,$$

де $z=\dfrac{y-1}{x+2}$, або після повернення до вихідних змінних

$$C[3(y-1)^2+(x+2)^2]=e^{-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\frac{y-1}{x+2}\right)}.$$

Зауважимо, що рівняння (2) за умови $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ є рівнянням, яке розглядалося раніше, оскільки заміною $z=a_1x+b_1y$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

1.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та звідні до них

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку відносно невідомої функції $y(x)$ називається рівняння вигляду

$$y'+p(x)y=q(x), \qquad (1)$$

де $p(x)$, $q(x)$ – задані функції. Якщо $q(x)\equiv 0$, то рівняння називають **лінійним однорідним**, у протилежному випадку – **неоднорідним**.

Для розв'язання лінійного неоднорідного рівняння застосуємо метод варіації довільної сталої. Для цього розглянемо спочатку однорідне рівняння, що відповідає заданому. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок виражається в квадратурах $y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}$.

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді $y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}$, де $C(x)$ – нова невідома функція.

Для визначення $C(x)$ підставимо цей вираз у вихідне рівняння:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$

або

$$C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx},\ C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+\tilde{C},$$

де $\tilde{C}$ – стала інтегрування. Тепер загальний розв'язок (1.1.7) можна записати так:

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+\tilde{C}e^{-\int p(x)dx}. \qquad (2)$$

Зазначимо, що перший доданок у формулі є частинним розв'язком неоднорідного рівняння, а другий – загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Формула (2) показує, що загальний розв'язок лінійного рівняння можна отримати двома квадратурами.

Приклади. 1. Розв'яжемо лінійне рівняння $y'+\dfrac{x}{1+x^2}y=3x$.

Запишемо відповідне однорідне рівняння $y'+\dfrac{x}{1+x^2}y=0$. Його розв'язком є сім'я функцій $y=\dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}$. Розв'язок вихідного рівняння шукаємо методом варіації довільної сталої, тобто у вигляді $y=\dfrac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. Підставивши цей вираз у рівняння, відносно невідомої функції $C(x)$ одержимо рівняння $C'(x)=3x\sqrt{1+x^2}$. Після його інтегрування й підстановки в $y(x)$ одержимо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y(x)=1+x^2+\frac{\tilde{C}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Розв’яжемо рівняння $\sin y dx + (x\cos y - \sin 2y)dy = 0$. Неважко побачити, що це лінійне рівняння відносно функції $x(y)$, оскільки ця функція та її диференціал входять у ліву частину рівняння у вигляді лінійної комбінації, коефіцієнтами якої є задані функції незалежної змінної y. Рівняння можна привести до стандартного вигляду, якщо обидві частини його поділити на $\sin y dy$

$$x'(y) + x(y)\operatorname{ctg} y = 2\cos y.$$

Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є множена функцій

$$x(y) = \frac{C}{\sin y}.$$

Тепер загальний розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді

$$x(y) = \frac{C(y)}{\sin y},$$

де $C(y)$ – нова невідома функція. Тоді відносно неї одержимо рівняння

$$\frac{C'(y)}{\sin y} = 2\cos y \Rightarrow C'(y) = \sin(2y) \Rightarrow C(y) = -\frac{1}{2}\cos(2y) + \tilde{C}.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$x(y) = \frac{C}{\sin y} + \sin y.$$

Рівняння Бернуллі. До лінійного рівняння зводиться так зване рівняння Бернуллі

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{3}$$

де $p(x)$, $q(x)$ – задані функції, $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{0;1\}$. Виконаємо заміну невідомої функції за формулою $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$, звідки $(1-\alpha)y^{-\alpha}y' = z'$, і рівняння (3) перетвориться на лінійне:

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x). \tag{4}$$

Приклад. Розв’яжемо рівняння $\cos x\, y'y^2 + \sin x\, y^3 = 1$. Неважко побачити, що це рівняння Бернуллі з такими даними: $p(x) = \operatorname{tg} x$, $q(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $\alpha = -2$. Після заміни $y^3 = z$, $3y'y^2 = z'$ одержимо відносно функції z лінійне рівняння $z' + 3\operatorname{tg} x\, z = \dfrac{3}{\cos x}$. Знайдемо загальний розв’язок рівняння методом варіації довільної сталої

$$z = 3\sin x\cos^2 x + \sin^3 x + C\cos^3 x.$$

Тоді шукана функція має вигляд

$$y = \sqrt[3]{3\sin x\cos^2 x + \sin^3 x + C\cos^3 x}. \qquad (5)$$

Зауваження. Функція (5) є визначеною на всій числовій осі, але вихідне рівняння має розв'язок не при будь-якому $x \in \mathbf{R}$, оскільки похідна $y'(x)$ не існує в точках, у яких підкореневий вираз перетворюється на нуль (див. інтегральні криві на рис. 6).

Рівняння Ріккаті

Рівнянням Ріккаті називається диференціальне рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^2 + f(x), \qquad (6)$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані функції.

Зазначимо, що при $q(x) \equiv 0$ рівняння Ріккаті збігається з лінійним рівнянням, а при $f(x) \equiv 0$ – з рівнянням Бернуллі.

Якщо для рівняння Ріккаті відомим є частинний розв'язок, то загальний розв'язок можна отримати двома квадратурами. Дійсно, позначимо через $y_1(x)$ частинний розв'язок рівняння (6). Тоді після підстановки $y(x) = y_1(x) + z(x)$ у рівняння (6)

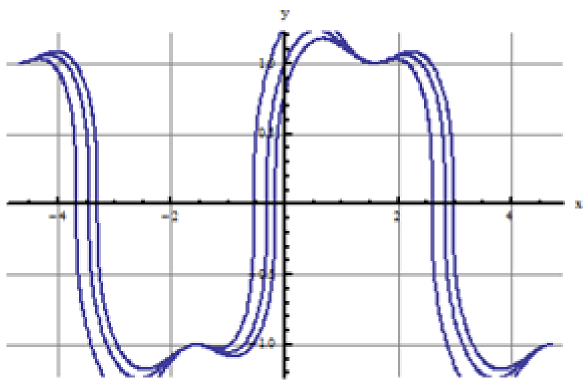

Рис. 6

$$z' + y_1' + p(x)z + p(x)y_1 = q(x)z^2 + 2q(x)y_1 z + q(x)y_1^2 + f(x)$$

відносно нової функції $z(x)$ одержимо рівняння Бернуллі

$$z' + [p(x) - 2q(x)y_1(x)]z = q(x)z^2,$$

яке інтегрується двома квадратурами. Якщо позначити загальний розв'язок цього рівняння через $(C\varphi(x) + \psi(x))^{-1}$, то загальний розв'язок рівняння Ріккаті має вигляд

$$y = \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)} + y_1(x) = \frac{C\varphi_1(x) + \psi_1(x)}{C\varphi(x) + \psi(x)}. \qquad (7)$$

Таким чином, загальним розв'язком рівняння Ріккаті є дробово-лінійна функція від довільної сталої.

Приклад. Знайдемо розв'язок рівняння Ріккаті

$$y' + xy = y^2 + \frac{x^2 + 1}{4}.$$

Виходячи з вигляду коефіцієнтів, частинний розв'язок рівняння можна спробувати знайти у вигляді $y = ax + b$. Після підстановки його в рівняння одержимо тотожність

$$a + ax^2 + bx = a^2x^2 + 2abx + b^2 + \frac{x^2+1}{4},$$

з якої знаходимо $a = b = \frac{1}{2}$, тобто частинним розв'язком є функція $y_1 = \frac{x+1}{2}$. Тепер у рівнянні Ріккаті зробимо заміну $y = z + \frac{x+1}{2}$. Відносно нової функції одержимо рівняння Бернуллі $z' - xz = z^2$. Його можна розв'язати методом, який було описано вище:

$$z^{-1}(x) = u(x),\ -z^{-1}z' = u',\ u' + u = -1,\ u = Ce^{-x} - 1.$$

Таким чином, загальний розв'язок вихідного рівняння описується формулою

$$y = \frac{1}{Ce^{-x} - 1} + \frac{x+1}{2}.$$

1.5. Рівняння в повних диференціалах

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

називається рівнянням в повних диференціалах, якщо вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є диференціалом деякої функції $F(x,y)$, тобто

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

З математичного аналізу відомо, що умовою існування функції $F(x,y)$ в однозв'язній області $D \subset \mathrm{R}^2$, якщо $P, Q \in C^1(D)$, є виконання рівності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ \ \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Таким чином, рівність (2) є умовою того, що рівняння (1) є рівнянням у повних диференціалах.

Зазначимо, що функцію $F(x,y)$ з точністю до адитивної довільної сталої можна відновити за формулою

$$F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(u, y_0)du + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,v)dv. \tag{3}$$

Тут (x_0, y_0), (x,y) – відповідно довільна фіксована і змінна точки області

D, D – прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат. Правильність попередньої формули перевіряється диференціюванням.

Тепер загальний інтеграл рівняння (1.1.14) задається формулою

$$F(x,y)=C\,, \tag{4}$$

де C – довільна стала.

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$(2xy+\ln y)dx+(x^2+\frac{x}{y})dy=0\,.$$

Це рівняння в повних диференціалах, оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x+\frac{1}{y}\ \forall (x,y)\in D\,,$$

де $D=\{(x,y): x\in \mathrm{R}, y>0\}$. За формулою (3) маємо

$$F(x,y)=\int_1^x 2u\,du+\int_1^y (x^2+\frac{x}{v})dv=x^2y-1+x\ln y\,.$$

Таким чином, загальний інтеграл задається рівнянням

$$x^2y+x\ln y=C\,.$$

1.6. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Особливі розв'язки

При застосуванні диференціальних рівнянь у математичному моделюванні та аналізі моделей в багатьох випадках важливо мати відповіді на два питання: за яких умов і на якій множені існує єдиний розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння? В теорії диференціальних рівнянь на ці питання відповідає теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)), \\ \quad y(x_0)=y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема (О. Коші, Ш. Е. Пікар). Нехай функція $f(x,y)$ є визначеною і неперервною в замкненій області $P=\{|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$ і задовольняє в ній **умову Ліпшиця** за змінною y

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|\,, \tag{2}$$

де $L>0$ – деяка стала. Тоді існує єдиний розв'язок $y=y(x)$ задачі (1), визначений і неперервний на відрізку $|x-x_0|\le h$, де $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{(x,y)\in P}|f(x,y)|$, який задовольняє умову $|y(x)-y_0|\le b$.

Зауваження: 1. Зазначимо, що умова Ліпшиця виконується, якщо функція f_y є визначеною й обмеженою в області P. Тоді за теоремою Лагранжа

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le|f_y(x,y^*)||y_1-y_2|.$$

2. Якщо в теоремі не враховувати умову Ліпшиця, то тоді можна довести існування розв'язку, але не його єдиність (таке твердження має назву теореми Пеано).

3. Умови теореми є достатніми, але не необхідними. Порушення цих умов ще не означає відсутності розв'язку або його неєдиності в задачі Коші. Однак точки, у яких порушується єдиність розв'язку (особливі точки диференціального рівняння), можна шукати серед тих, у яких функція f_y не існує або є необмеженою.

Приклад. Перевіримо виконання умов теореми Коші – Пікара і розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} y' = x + y, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

У заданому рівнянні $f(x,y)\equiv x+y\in C(\mathbb{R}^2)$, причому

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|y_1-y_2| \quad \forall (x,y_1),(x,y_2)\in\mathbb{R}^2,$$

тобто умова Ліпшиця виконується у всій площині $\mathbb{R}^2$ при $L=1$. З теореми Коші – Пікара випливає, що єдиний гарантований розв'язок задачі Коші існує на відрізку $|x|\le h$, де $h=\min\left(a,\dfrac{b}{a+b}\right)<1$, a,b – будь-які додатні числа. В той же час, безпосередньо розв'язання цієї задачі показує, що її розв'язок $y=e^x-x-1$ існує на всій осі $\mathbb{R}$. Отже, цей приклад ілюструє зауваження 3 до теореми.

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}, \\ y(-1) = 0. \end{cases}$$

Диференціальне рівняння є однорідним, оскільки його права частина є однорідною функцією нульового степеня (рівняння також є рівнянням Бернуллі).

Зробимо заміну невідомої функції $y = xz(x)$. Тоді

$$xz' + z = \frac{1}{z} + z \Rightarrow xz' = \frac{1}{z} \Rightarrow zdz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int zdz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{z^2}{2} = \ln|x| + C,$$

тобто загальним інтегралом вихідного рівняння є

$$y^2 = x^2 \ln(x^2) + Cx^2.$$

Знайдемо довільну сталу з початкової умови $y(-1) = 0$, підставляючи в загальний інтеграл $x = -1, y = 0$. Тоді маємо $C = 0$ і розв'язком задачі Коші є неявно задана функція

$$y^2 = x^2 \ln(x^2).$$

Особливі розв'язки диференціальних рівнянь

Означення. Особливим розв'язком диференціального рівняння називають такий розв'язок, через кожну точку якого проходить принаймні ще один розв'язок цього рівняння.

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, яке має частинний розв'язок $y = 0$. Загальний розв'язок знайдемо після відокремлення змінних

$$\frac{dy}{3y^{2/3}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{3y^{2/3}} = \int dx \Rightarrow y^{1/3} = x + C \Rightarrow y = (x + C)^3.$$

Через кожну точку $(-C_0, 0)$ прямої $y = 0$ проходить одна крива сім'ї розв'язків $y = (x + C_0)^3$, причому в цій точці вони мають спільну дотичну. Отже, за означенням розв'язок $y = 0$ є особливим розв'язком заданого диференціального рівняння.

Виконання умов теореми Коші – Пікара в області $D \subset \mathbf{R}^2$ гарантує, що в цій області немає особливих розв'язків диференціального рівняння. Наявність таких розв'язків може бути пов'язана з неіснуванням похідної f_y

у точках деякої кривої. Зокрема, у наведеному прикладі в точках особливого розв'язку не існує похідної правої частини диференціального рівняння.

Підкреслимо, що особливий розв'язок має в кожній точці ту ж саму дотичну, що й інший розв'язок диференціального рівняння, який проходить через цю точку. Це означає, що особливий розв'язок у кожній своїй точці дотикається до деякої інтегральної кривої сім'ї розв'язків, що залежать від одного параметра, тобто він є обвідною однопараметричної сім'ї кривих. Отже, пошук особливого розв'язку диференціального рівняння пов'язаний зі знаходженням обвідної сім'ї інтегральних кривих.

Обвідна однопараметричної сім'ї кривих. Криву $\Phi(x,y)=0$ називають обвідною сім'ї кривих $F(x,y,C)=0$, що залежать від одного параметра, якщо в кожній своїй точці крива $\Phi(x,y)=0$ дотикається до однієї і тільки однієї кривої сім'ї.

Приклад. Кожна гладка крива з рівнянням $y=f(x)$ є обвідною сім'ї дотичних $y=f(C)+f'(C)(x-C)$ до цієї кривої (рис. 7).

Рис. 7

Теорема. Нехай сім'я кривих $F(x,y,C)=0$ задовольняє умови: 1) функція $F(x,y,C)$ є неперервно диференційовною за всіма своїми аргументами; 2) $F_x^2+F_y^2\neq 0$. Якщо у сім'ї кривих є обвідна, то вона збігається з розв'язком системи

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0, \\ F_C(x,y,C)=0. \end{cases} \tag{3}$$

► Виберемо деяку криву з сім'ї $F(x,y,C)=0$, тобто зафіксуємо змінну C. Ця крива дотикається до обвідної в точці $M_C\,(x(C),y(C))$, координати якої мають задовольняти рівнянню кривої

$$F(x(C),y(C),C)=0.$$

З іншого боку, у точці M_C крива й обвідна мають спільну дотичну. Дотичний вектор (dx,dy) можна знайти двома способами: з рівняння кривої сім'ї при фіксованому C (рух уздовж кривої показано верхньою стрілкою на рис. 8)

$$F_x(x(C),y(C),C)dx+F_y(x(C),y(C),C)dy=0$$

і з рівняння сім'ї при змінному C (рух вздовж обвідної показано нижньою стрілкою на рис. 8)

$$F_x(x(C),y(C),C)dx+F_y(x(C),y(C),C)dy+F_C(x(C),y(C),C)dC=0.$$

З цих співвідношень випливає, що в точці дотику M_C виконується рівність $F_C(x(C), y(C), C) = 0$, тобто рівняння обвідної має параметричну форму

$$\begin{cases} x = x(C), \\ y = y(C), \end{cases}$$

де $x(C), y(C)$ є розв'язком системи (3). ◄

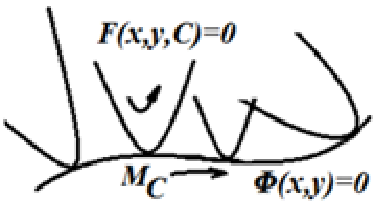

Рис. 8

Зауваження. Система (3) задає необхідну, але не достатню умову існування обвідної сім'ї кривих, тому не кожний розв'язок має бути обвідною. Розв'язок системи (3) називають **дискримінантною кривою** для сім'ї кривих. Кожну дискримінантну криву треба перевіряти на її можливість бути обвідною. Для цього необхідно переконатися, що в кожній точці дискримінантної кривої одна крива із сім'ї має спільну дотичну з дискримінантною кривою.

Приклад. Знайдемо обвідну сім'ї напівкубічних парабол $(y-C)^2 = (x-C)^3$.

Складемо систему (3) для визначення дискримінантних кривих

$$\begin{cases} (y-C)^2 = (x-C)^3, \\ 2(y-C) = 3(x-C)^2. \end{cases}$$

Її розв'язком є дві лінії, які задано параметрично

$$\begin{cases} x = C, \\ y = C, \end{cases} \quad \begin{cases} x = C + 4/9, \\ y = C + 8/27 \end{cases}$$

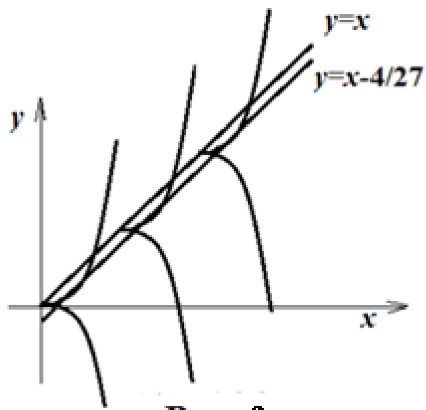

Рис. 9

або, після вилучення параметра C, дві дискримінантні криві $y = x$ і $y = x - 4/27$, з яких лише друга є обвідною сім'ї напівкубічних парабол (рис. 9). Дійсно, у точці (C, C) для першої дискримінантної кривої $y' = 1$, у той час як для кривої сім'ї $y' = 0$, тобто дотичні до цих кривих різні. Навпаки, друга дискримінантна крива має спільну дотичну з однією кривою сім'ї в точці їх перетину.

1.7. Диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку загального вигляду, тобто нерозв'язного відносно похідної:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (1)$$

Будемо припускати, що існує точка (x_0, y_0, p_0), у деякому околі якої є визначеною й неперервно диференційовною функція $F(x, y, p)$, причому $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ і $F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0$. З теореми про неявну функцію випливає, що існує окіл $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), у якому рівняння $F(x, y, p) = 0$ має єдиний розв'язок $p = f(x, y)$, а функція $f(x, y)$ є неперервно диференційовною. Тоді задача (1) в області $U(x_0, y_0)$ еквівалентна задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Звідси на основі теореми Коші – Пікара доходимо висновку, що задача (1) має єдиний розв'язок у деякому околі точки x_0.

Вище фактично доведено таку теорему.

Теорема. Нехай у деякому околі точки (x_0, y_0, p_0) функція $F(x, y, p)$ є визначеною й неперервно диференційовною, причому $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ і $F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0$. Тоді задача (1) має єдиний розв'язок у деякому околі точки x_0.

Особливий розв'язок. Поставимо питання про особливий розв'язок рівняння $F(x, y, y') = 0$. Попередня теорема показує, що порушення єдиності розв'язку задачі Коші в точці (x_0, y_0) пов'язано з перетворенням на нуль похідної $F'_p(x_0, y_0, p_0)$, де p_0 є коренем рівняння $F(x_0, y_0, p_0) = 0$. Дійсно, за правилом диференціювання функції, заданої неявно, а саме

$$f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, p_0)}{F'_p(x_0, y_0, p_0)},$$

одержимо неіснування похідної $f'_y(x_0, y_0)$, тобто порушення умови, яка гарантує єдиність розв'язку. Тому, якщо рівняння $F(x, y, y') = 0$ має особливий розв'язок, то він задовольняє системі рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Обернене твердження, узагалі кажучи, не є правильним. Розв'язок системи (2) може бути не тільки інтегральною кривою, а й кривою, що складається з особливих точок інтегральних кривих диференціального рівняння $F(x,y,y')=0$, тобто не мати в них дотичної. Тому розв'язок системи (2) треба окремо перевіряти, чи буде він інтегральною кривою.

Приклад. Знайдемо особливий розв'язок диференціального рівняння $4xyy'=8y^2-y'^3$. Складемо систему (2)

$$\begin{cases} 4xyy'=8y^2-y'^3, \\ 4xy=-3y'^2. \end{cases}$$

Виключення із системи y' приводить до двох функцій: $y=0$ і $y=\frac{4}{27}x^3$. Кожна з них є розв'язком вихідного диференціального рівняння, тому це особливі розв'язки. На рис. 10 особливі розв'язки показано жирними лініями, сім'ю загальних розв'язків $y=C(x-C)^2$ – тонкими.

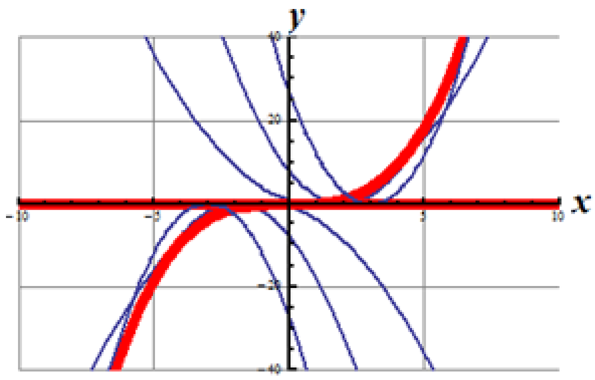

Рис. 10

Далі опишемо деякі конструктивні методи розв'язання диференціальних рівнянь вигляду (1).

Метод параметричного диференціювання. Якщо рівняння (1) можна явно розв'язати відносно змінної y, тобто записати у вигляді

$$y=f(x,y'), \qquad (3)$$

то шляхом уведення параметра його можна записати в еквівалентній формі

$$\begin{cases} y'=p, \\ y=f(x,p) \end{cases}$$

або, після знаходження диференціала функції y, у вигляді

$$\begin{cases} dy=pdx, \\ dy=f'_x(x,p)dx+f'_p(x,p)dp. \end{cases}$$

Виключаючи dy із системи, одержимо диференціальне рівняння, розв'язне відносно похідної:

$$pdx = f'_x(x,p)dx + f'_p(x,p)dp.$$

Якщо це рівняння одного з розглянутих у попередніх параграфах класів, то його загальний розв'язок можна записати так: $\Phi(x,p,C)=0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (3) має параметричну форму

$$\begin{cases} \Phi(x,p,C)=0, \\ y = f(x,p). \end{cases} \tag{4}$$

Аналогічно розв'язується рівняння вигляду

$$x = f(y,y'). \tag{5}$$

Приклади. 1. Розв'яжемо диференціальне рівняння $y' = e^{xy'/y}$. Це рівняння неможливо аналітично розв'язати відносно y', але можна подати у вигляді $xy' = y\ln y'$. Застосуємо до нього метод параметричного диференціювання:

$$\begin{cases} y' = p, \\ x = \dfrac{y}{p}\ln p. \end{cases}$$

Після диференціювання другої рівності й вилучення dx одержимо

$$\frac{dy}{p} = \frac{1}{p}\ln p dy + \frac{y}{p^2}(1-\ln p)dp,$$

а після спрощення приходимо до двох рівнянь:

$$\ln p = 1, \; \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}. \tag{6}$$

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має сім'ю розв'язків

$$\begin{cases} y = Cp, \\ x = C\ln p \end{cases}$$

або, після вилучення параметра p, записану в явному вигляді $y = Ce^{x/C}$. Функціональне рівняння (6) приводить до частинного розв'язку $y = ex$. Це особливий розв'язок вихідного диференціального рівняння, оскільки є обвідною сім'ї загальних розв'язків. Дійсно, складемо систему для визначення дискримінантних кривих

$$\begin{cases} y - Ce^{x/C} = 0, \\ -e^{x/C} + \dfrac{x}{C} e^{x/C} = 0. \end{cases}$$

Звідси $y = ex$, причому в точці (C, eC) перетину цієї лінії з кривою сім'ї вони мають спільну дотичну.

2. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$y'(x - \ln y') = 1.$$

Дане рівняння відноситься до класу рівнянь, які нерозв'язні відносно похідної. Але його можна розв'язати відносно змінної x

$$x = 1/y' + \ln y'.$$

Застосуємо до нього метод параметричного диференціювання. Для цього запишемо рівняння у параметричній формі

$$\begin{cases} y' = p, \\ x = p^{-1} + \ln p. \end{cases}$$

Звідси після обчислення диференціала

$$\begin{cases} dx = dy/p, \\ dx = (-p^{-2} + p^{-1})dp \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{p} = \left(-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right)dp \Rightarrow dy = \left(-\frac{1}{p} + 1\right)dp$$

і інтегрування отримаємо загальний розв'язок у параметричній формі

$$\begin{cases} y = -\ln p + p + C, \\ x = p^{-1} + \ln p. \end{cases}$$

Рівняння Клеро. Рівняння вигляду

$$y = xy' + f(y') \tag{7}$$

називають рівнянням Клеро.

Застосуємо до нього метод параметричного диференціювання:

$$\begin{cases} y' = p, \\ y = xp + f(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy = pdx, \\ dy = pdx + (x + f'(p))dp. \end{cases}$$

Після вилучення dy одержуємо рівняння $(x + f'(p))dp = 0$. Звідси виходить або $dp = 0$, або $x = -f'(p)$. У першому випадку $p = C$, що приводить до загального розв'язку рівняння (7)

$$y = Cx + f(C). \tag{8}$$

При $x=-f'(p)$ одержимо ще й частинний розв'язок у параметричній формі

$$\begin{cases} x=-f'(p), \\ y=xp+f(p). \end{cases} \tag{9}$$

Розв'язок (9) напевно існує на інтервалі I змінення параметра p, де $f''(p)$ – неперервна і $f''(p)\neq 0$. Він є особливим розв'язком рівняння (7), оскільки обвідною сім'ї прямих (8) є крива (9). Щоб у цьому переконатися, знайдемо дискримінантну криву з системи

$$\begin{cases} x=-f'(C), \\ y=xC+f(C). \end{cases}$$

Очевидно, що дискримінантна крива збігається з кривою (9). Виберемо довільне $C=C_0\in I$. Тоді пряма $y=C_0x+f(C_0)$ має спільну точку $M_0(x_0,y_0)$, де $x_0=-f'(C_0), y_0=x_0C_0+f(C_0)$, і спільну дотичну в цій точці з кривою (9), оскільки $y'(x_0)=C_0$ на прямій і

$$y'(x_0)=\left.\frac{-f'(p)-pf''(p)+f'(p)}{-f''(p)}\right|_{p=C_0}=C_0$$

на кривій.

Таким чином, дискримінантна крива є обвідною сім'ї прямих (8), тобто частинний розв'язок є особливим.

Зауваження. Геометричним змістом одержаного результату є те, що множина прямих (8) є сім'єю дотичних до кривої (9) (див. рис. 1.6).

Приклад. Розв'яжемо рівняння $y=xy'+y'^2$. Це рівняння Клеро, тому застосовуємо до нього метод параметричного диференціювання:

$$\begin{cases} y'=p, \\ y=xp+p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy=pdx, \\ dy=pdx+(x+2p)dp \end{cases} \Rightarrow (x+2p)dp=0 \Rightarrow p=C,\ x=-2p.$$

Звідси одержимо загальний розв'язок

$$y=Cx+C^2$$

і особливий розв'язок

$$\begin{cases} x=-2p, \\ y=xp+p^2 \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{x^2}{4}.$$

Рівняння Лагранжа. Метод параметричного диференціювання можна застосувати до рівняння

$$y = xg(y') + f(y'), \tag{10}$$

де $g(p) \neq p$, яке називають рівнянням Лагранжа:

$$\begin{cases} y' = p, \\ y = xg(p) + f(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy = pdx, \\ dy = g(p)dx + (xg'(p) + f'(p))dp \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} pdx = g(p)dx + (xg'(p) + f'(p))dp, \\ y = xg(p) + f(p). \end{cases}$$

Рівняння $pdx = g(p)dx + (xg'(p) + f'(p))dp$ є лінійним відносно функції $x(p)$, тому його загальний розв'язок $x = \Phi(p, C)$ знаходимо за допомогою двох квадратур. Тоді загальний розв'язок рівняння Лагранжа запишемо в параметричній формі

$$\begin{cases} x = \Phi(p, C), \\ y = xg(p) + f(p). \end{cases} \tag{11}$$

Приклад. Розглянемо рівняння $y = 2xy' + y'^2$. Застосуємо метод параметричного диференціювання:

$$\begin{cases} y' = p, \\ y = 2xp + p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy = pdx, \\ dy = 2pdx + (2x + 2p)dp \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} px' + 2x = -2p, \\ y = 2xp + p^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' + \dfrac{2}{p}x = -2, \\ y = 2xp + p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{2}{3}p, \\ y = 2xp + p^2. \end{cases}$$

Контрольні питання до розділу 1

1. Дайте означення звичайного диференціального рівняння.
2. Дайте означення порядку диференціального рівняння.
3. Дайте означення частинного і загального розв'язків диференціального рівняння.
4. Що таке загальний інтеграл диференціального рівняння?
5. Що таке поле напрямків диференціального рівняння першого порядку, розв'язного відносно похідної?

6. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння першого (другого) порядку?
7. Дайте фізичний зміст задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку.
8. Наведіть приклади математичних моделей природних і штучних систем, які ґрунтуються на диференціальних рівняннях.
9. Дайте означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
10. Яким чином розв'язується диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними?
11. Які класи диференціальних рівнянь першого порядку зводяться до диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.
12. Дайте означення однорідної функції і однорідного ДР.
13. Дайте означення лінійного ДР першого порядку.
14. У чому полягає метод варіації довільної сталої при розв'язанні лінійного диференціального рівняння?
15. Які класи диференціальних рівнянь зводяться до лінійних ДР?
16. Дайте означення диференціального рівняння Бернуллі.
17. Дайте означення диференціального рівняння Ріккаті.
18. Дайте означення ДР у повних диференціалах?
19. Сформулюйте умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для ДР першого порядку.
20. Дайте означення особливого розв'язку ДР.
21. Дайте означення дискримінантної кривої?
22. Наведіть алгоритм знаходження особливого розв'язку ДР.
23. В чому полягає метод параметричного диференціювання.
24. Дайте означення рівняння Клеро.
25. Дайте означення рівняння Лагранжа.

Задачі до розділу 1

1. Розв'язати рівняння:

а) $y' = y - y^2$; б) $y' = \dfrac{2xy}{1 - x^2}$; в) $xydy = (x+1)dx$; г) $y'\mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}y$;

д) $xydy = \sqrt{y^2 - 1}dx$; е) $y' = \cos(y - x)$; ж) $y' = \mathrm{tg}^2(y + x)$;

и) $(x+y)dy-xdx=0$; к) $y'=\dfrac{2xy}{y^2+x^2}$; л) $xy'=\sqrt{x^2+y^2}$;

м) $y'=\left(\dfrac{x+2y-3}{3x-y-2}\right)^2$; н) $y'+\dfrac{1}{x}y=x$; п) $\cos x dy=(y\sin x+\cos^2 x)dx$;

р) $(e^y+x)y'=1$; с) $y'=\dfrac{y}{x-y^2}$; т) $xy^2y'=x^2+y^3$; у) $xy'=x^2y^2-y$;

ф) $y'=y^2-\dfrac{2}{x^2}$; х) $y'+2e^x y-y^2=e^{2x}+e^x$; ц) $(2xy+y^3)dx+(x^2+3xy^2)dy=0$;

ш) $y\dfrac{x^2-y^2-2}{x^2-y^2}dx+x\dfrac{x^2-y^2+2}{x^2-y^2}dy=0$; щ) $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$;

ю) $(y'^2-y)^2=y(y'^2+y)^2$.

2. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння:

а) $xyy'=y+1,\ y(1)=0$; б) $y'=(y/x)^2+1,\ y(1)=0{,}5$;

в) $xdy=(y+x^3)dx,\ y(1)=0$; г) $(y+2x/y)dx+(x-x^2/y^2)dy=0,\ y(1)=1$.

3. Знайти обвідну сім’ї кривих і скласти диференціальне рівняння, яке має ці криві своїми розв’язками:

а) $y=Cx^2-C^2$; б) $Cy=(x-C)^2$; в) $y=C(x-C)^2$; г) $(x-C^2)^2+y^2=C^2$.

4. Розв’язати рівняння:

а) $y=y'^2+y'^3$; б) $y=2xy'^2(1+y')^{-1}$; в) $xy'=y\ln y'$; г) $y=xy'+\ln y'$.

5. Знайти особливі розв’язки диференціальних рівнянь:

а) $xy'^2=y$; б) $y^2(y'^2+1)=1$; в) $y'^3+y^2=yy'+yy'^2$; г) $yy'^3=1-x$;

д) $x=y^2-yy'+y^2y'^2$.

Розділ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2.1. Інтеграли диференціальних рівнянь другого порядку

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку, яке розв’язано відносно старшої похідної, тобто задачу вигляду

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \\ y(x_0) = y_0^{(0)},\ y'(x_0) = y_1^{(0)}. \end{cases} \tag{1}$$

Уведемо позначення: $y(x) = y_0(x),\ y_0'(x) = y_1(x)$.

Після заміни

$$Y(x) = (y_0(x)\ y_1(x))^T,\ F = (y_1\ f(x, y_0, y_1))^T$$

систему (1) одержимо в еквівалентній векторній формі

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)), \\ \quad Y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{2}$$

де $Y_0 = (y_0^{(0)}\ y_1^{(0)})^T$.

Ключовою результатом цього розділу є таке твердження.

Теорема 1. Нехай функція $f(x,Y)$, де $Y = (y_0\ y_1)^T$, є визначеною й неперервною за всіма своїми аргументами в замкненому паралелепіпеді $P = \{|x - x_0| \le a, \|Y - Y_0\|_\infty \le b\}$ і задовольняє в ньому умову Ліпшиця за змінними y_0, y_1, тобто виконується нерівність

$$|f(x,Y_1) - f(x,Y_2)| \le L\|Y_1 - Y_2\|_\infty$$

для будь-яких $(x,Y_1), (x,Y_2) \in P$.

Тоді існує єдиний розв’язок $y = y(x, x_0, Y_0)$ задачі Коші (1) на відрізку $|x - x_0| \le h$, де $h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$, $M = \max\{\|Y_0\| + b, M_1\}$, $M_1 = \max\limits_{(x,Y)\in P} |f(x,Y)|$.

Тут позначено $\|Y\|_\infty = \max(|y_0|, |y_1|)$.

З теореми, як наслідок, випливає такий результат.

Теорема 2. Нехай D – будь-яка область простору $\mathbf{R}^3$, у якій функції

$f(x,Y)$ і $(\frac{\partial f}{\partial y_i}(x,Y))_{i=0}^{1}$ є неперервними. Кожний розв'язок $y(x,x_0,Y_0)$ задачі Коші (1) для довільної точки $(x_0,Y_0)\in D$ можна продовжити до розв'язку $\tilde{y}(x,x_0,Y_0)$, визначеного на своєму максимальному інтервалі існування $(\underline{c}(x_0,Y_0),\overline{c}(x_0,Y_0))$. Таке продовження єдине. Розв'язок $\tilde{y}(x,x_0,Y_0)$ є неперервно диференційовною функцією від змінних x,x_0,Y_0 на множині $\{(x_0,Y_0)\in D,\ x\in(\underline{c}(x_0,Y_0),\overline{c}(x_0,Y_0))\}$.

Дамо геометричне трактування останньої теореми.

Означення 1. Фазовою траєкторією диференціального рівняння (1), яка проходить через точку $(x_0,Y_0)\in D$ і належить області D, будемо називати лінію в просторі $\mathbf{R}^3$ (розширений фазовий простір рівняння (1))

$$\Gamma=\{(x,\tilde{y}(x,x_0,Y_0),\tilde{y}'(x,x_0,Y_0)) : x\in(\underline{c}(x_0,Y_0),\overline{c}(x_0,Y_0)\}.$$

Геометричний зміст теореми 2 полягає в тому, що через кожну точку області D проходить фазова траєкторія рівняння (1), причому тільки одна (рис. 11).

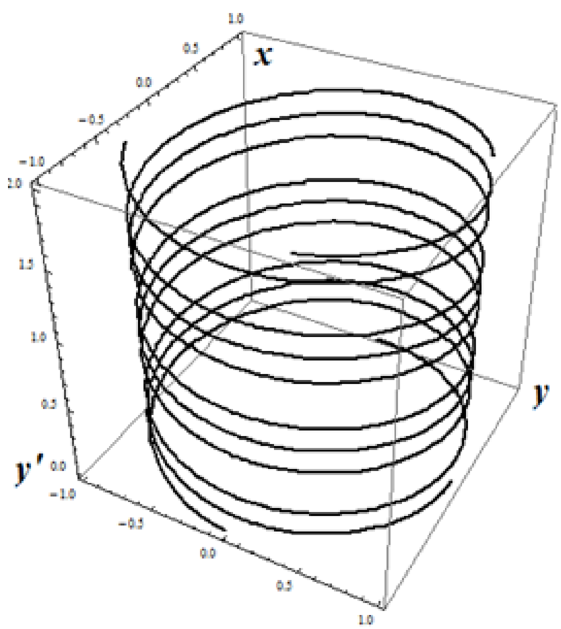

Рис. 11

Нагадаємо, що у параграфі 1.1 було наведено означення загального розв'язку й загального інтеграла диференціального рівняння старших порядків. Теорема 2 дає змогу надати цим поняттям більш точного змісту. З цієї теореми випливає, що при довільному фіксованому x_0 функція $y=\tilde{y}(x,x_0,Y_0)$ визначається двома параметрами $y_0^{(0)},y_1^{(0)}$. Тому природно ввести таке означення.

Означення 2. Загальним розв'язком рівняння

$$y''(x)=f(x,y(x),y'(x)) \tag{3}$$

називається функція $y=y(x,C_1,C_2)$, яка залежить від двох довільних сталих C_1,C_2, при будь-якому значенні цих сталих є розв'язком рівняння (3), і для довільної точки $(x_0,Y_0)\in D$ існує набір чисел $C_1^{(0)},C_2^{(0)}$, такий, що функції

$y = y(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)})$ і $y = \tilde{y}(x, x_0, Y_0)$ збігаються на області визначення функції $y = \tilde{y}(x, x_0, Y_0)$. Загальний розв'язок, записаний у неявній формі $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, називається загальним інтегралом диференціального рівняння (1).

Якщо загальний розв'язок $y = y(x, C_1, C_2)$ диференціального рівняння (3) є відомим, то для будь-яких початкових даних $(x_0\ y_0^{(0)}\ y_1^{(0)})^T \in D$ можна записати розв'язок задачі Коші (1). Для цього треба розв'язати алгебраїчну систему рівнянь

$$\begin{cases} y(x_0, C_1, C_2) = y_0^{(0)}, \\ y'(x_0, C_1, C_2) = y_1^{(0)} \end{cases} \tag{4}$$

відносно невідомих сталих C_1, C_2. З означення 2 випливає, що системі задовольняє набір чисел $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}$, а функція $y = y(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)})$ є розв'язком задачі Коші (1).

Якщо замість загального розв'язку рівняння (3) відомим є загальний інтеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, то для знаходження сталих з початкових умов треба спочатку здиференціювати загальний інтеграл за змінною x, уважаючи, що y є функцією від x, після чого підставити в одержані рівності початкові дані. Тоді сталі C_1, C_2 визначаються з системи

$$\begin{cases} \Phi(x_0, y_0^{(0)}, C_1, C_2) = 0, \\ \Phi_x(x_0, y_0^{(0)}, C_1, C_2) + \Phi_y(x_0, y_0^{(0)}, C_1, C_2) y_1^{(0)} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Зазвичай процес інтегрування диференціального рівняння (3) зводиться до зниження його порядку шляхом заміни невідомої функції та інтегрування одержаного після цього диференціального рівняння меншого порядку. Якщо у такий спосіб вдається понизити порядок рівняння (3) на одиницю, отримаємо проміжний інтеграл

$$\Psi(x, y, y', C_1) = 0, \tag{6}$$

в який входить перша похідна невідомої функції і одна довільна стала. Такий інтеграл називається **першим інтегралом** диференціального рівняння (3). Після цього наступним кроком необхідно ще раз інтегрувати рівняння (6).

Приклади. 1. Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння $yy'' = y'(1 + y')$. Розкривши дужки в правій частині рівняння, його можна переписати у вигляді $yy'' - y'^2 = y'$ або в припущенні, що $y \neq 0$, таким чином:

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{y'}{y^2}.$$

Обидві частини рівності є повними похідними, тому

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{y} + C \Rightarrow y' = Cy - 1.$$

Останнє рівняння просто інтегрується як рівняння з відокремлюваними змінними. Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$y = \frac{1}{C} + C_1 e^{Cx}.$$

Зазначимо, що рівняння, яке розглядається, має також частинний розв'язок $y = 0$.

Якщо у цьому прикладі треба розв'язати задачу Коші з початковими умовами $y(0) = 1, y'(0) = 1$, то довільні сталі в загальному розв'язку знаходимо з системи

$$\begin{cases} y(0) = 1/C + C_1 = 1, \\ y'(0) = C_1 C = 1 \end{cases} \Rightarrow C = 2, C_1 = 1/2.$$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$y = \frac{1}{2}(1 + e^{2x}).$$

2. Розв'яжемо задачу Коші

$$y'' = \frac{1}{2}e^y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння на $2y'$

$$2y'y'' = y'e^y \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(y')^2 = \frac{d}{dx}e^y.$$

Після інтегрування за змінною x одержимо перший інтеграл вихідного рівняння у вигляді

$$y'^2 = e^y + C.$$

Сталу C знаходимо з початкових умов, підставивши в інтеграл $x = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$. В результаті отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = \sqrt{e^y}.$$

Рівняння $y' = \sqrt{e^y}$ зінтегруємо, відокремивши змінні:

$$\frac{dy}{\sqrt{e^y}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{e^y}} = \int dx \Rightarrow -2e^{-y/2} = x + C_1 .$$

Тепер з початкових умов $C_1 = -2$ і остаточним розв'язком задачі Коші є функція

$$y = 2\ln\frac{2}{2-x} .$$

2.2. Класи диференціальних рівнянь другого порядку, які допускають зниження порядку

Наведемо деякі класи диференціальних рівнянь **другого порядку**, які допускають зниження порядку або повне інтегрування в квадратурах.

1. Рівняння, яке явно не містить шуканої функції: $F(x, y', y'') = 0$. Заміною $z(x) = y'(x)$ таке рівняння зводять до рівняння $F(x, z, z') = 0$ першого порядку.

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x^2 y'' = y'^2 ,$$

яке явно не містить функції y. Зробимо в ньому заміну $y' = z(x)$, звідки $y'' = z'$. Вихідне рівняння при цьому перетвориться на диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$x^2 z' = z^2 .$$

Після відокремлення змінних та інтегрування одержимо загальний розв’язок

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C \Rightarrow z = \frac{x}{Cx+1} .$$

Повертаючись до функції y, треба знову розв’язати диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = \frac{x}{Cx+1} \Rightarrow y = \int \frac{xdx}{Cx+1} = \frac{1}{C}x - \frac{1}{C^2}\ln|Cx+1| + C_1, C \neq 0;$$

$$y' = x \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1, C = 0 .$$

2. Рівняння, яке явно не містить незалежної змінної $F(y, y', y'') = 0$. Уважаючи y новою незалежною змінною, а $y' = z(y)$ – новою шуканою

функцією, порядок диференціального рівняння можна знизити на одиницю:

$$y'' = z'y' = z'z.$$

Слід зауважити, що лінійне рівняння в такому разі втрачає лінійність.

Приклад. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$yy'' + 1 = y'^2.$$

Рівняння не містить незалежної змінної, тому заміна $y' = z(y)$ зводить його до рівняння першого порядку

$$yzz' + 1 = z^2.$$

Після відокремлення змінних одержимо

$$\frac{zdz}{z^2-1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{zdz}{z^2-1} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|z^2-1| = \ln|Cy| \Rightarrow \sqrt{|z^2-1|} = |Cy| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \pm\sqrt{(Cy)^2+1}, |z| \ge 1, \\ z = \pm\sqrt{1-(Cy)^2}, |z| < 1. \end{cases}$$

Тепер для функції y одержимо рівняння з відокремлюваними змінними, після інтегрування якого маємо загальні розв'язки

$$y = \pm\frac{\sin(Cx+C_1)}{C}, \quad y = \pm\frac{\operatorname{sh}(Cx+C_1)}{C}.$$

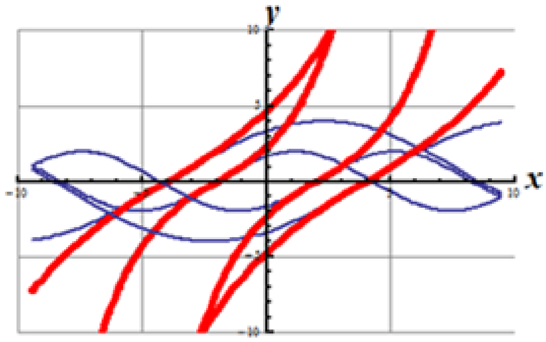

Рис.12

На рис. 12 зображено деякі інтегральні криві двох сімей вихідного рівняння. Можна помітити, що дотичні до кривих першої сім'ї мають кутові коефіцієнти k, для яких $|k| \le 1$. Навпаки, для кривих другої сім'ї кутові коефіцієнти задовольняють умову $|k| \ge 1$.

3. Рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$, однорідне відносно змінних (y, y', y''). Так називають рівняння, у якому функція F є однорідною відносно змінних (y, y', y''), тобто для неї виконується тотожність $F(x, ty, ty', ty'') = t^{\alpha} F(x, y, y', y'')$. Порядок такого рівняння можна знизити на одиницю заміною $y' = yz$, де $z(x)$ – нова шукана функція. Дійсно, послідовно знайдемо $y' = yz$, $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Після підстановки похідних у рівняння його порядок буде знижено на одиницю.

Приклад. Розглянемо рівняння $x^2yy'' = (y - xy')^2$, однорідне відносно (y, y', y''). Зробимо заміну невідомої функції за формулою

$y' = yz$. Тоді $y'' = y(z^2 + z')$ і, підставляючи похідні до рівняння, одержимо $x^2y^2(z^2 + z') = y^2(1 - xz)^2$, звідки або $y = 0$, або $x^2z' = 1 - 2xz$. Останнє рівняння є лінійним відносно функції $z(x)$. Розв'язавши його методом варіації довільної сталої, запишемо загальний розв'язок у вигляді

$$z = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}.$$

Зінтегруємо ще раз диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}\right)dx \Rightarrow y = C_1 x e^{-\frac{C}{x}}.$$

Зауважимо, що частинний розв'язок $y = 0$ включається в загальний розв'язок при $C_1 = 0$.

4. Рівняння, однорідне відносно x і y в узагальненому сенсі, тобто рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$, яке не змінюється при заміні

$$x \to \lambda x,\ y \to \lambda^m y,\ y' \to \lambda^{m-1} y',\ y'' \to \lambda^{m-2} y''. \qquad (1)$$

Заміною $y = x^m z(\ln|x|)$, де $z(t)$ – нова невідома функція, вихідне рівняння зводиться до рівняння типу 2. Дійсно, після підстановки $\lambda = \dfrac{1}{x}$ одержимо рівняння $F\left(1, \dfrac{y}{x^m}, \dfrac{y'}{x^{m-1}}, \ldots, \dfrac{y^{(n)}}{x^{m-n}}\right) = 0$, у якому

$$\frac{y}{x^m} = z, \frac{y'}{x^{m-1}} = mz + z', \frac{y''}{x^{m-2}} = m(m-1)z + (2m-1)z' + z'', \qquad (2)$$

тобто рівняння явно не містить незалежної змінної.

Приклад. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0.$$

Перевіримо рівняння на його належність до класу, що розглядається. Для цього зробимо заміну (1) у вихідному рівнянні:

$$\lambda^4 x^4 \lambda^{m-2} y'' + (\lambda x \lambda^{m-1} y' - \lambda^m y)^3 = 0.$$

Очевидно, що рівняння не зміниться при $m + 2 = 3m$, тобто коли $m = 1$.

Тепер уведемо нову невідому функцію $z(x)$ за формулами (2):

$$y = xz(\ln|x|),\ y' = z + z',\ y'' = \frac{1}{x}(z' + z'').$$

Тоді вихідне диференціальне рівняння перетвориться на таке:

$$z'' + z' + z'^3 = 0.$$

Після заміни невідомої функції $z'(t) = u(z)$, де $t = \ln|x|$, одержимо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$uu' + u + u^3 = 0,$$

звідки або $u = 0$, або розділяємо змінні

$$\frac{du}{1+u^2} = -dz \Rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = -\int dz \Rightarrow \operatorname{arctg} u = -(z + C) \Rightarrow u = -\operatorname{tg}(z + C).$$

Перша рівність приводить до розв'язку $y = Cx$ вихідного рівняння, друга – до диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$z'(t) = -\operatorname{tg}(z + C).$$

Його інтегрування дає такий загальний розв'язок:

$$z = C + \arcsin(C_1 e^{-t}).$$

Повертаючись до вихідної невідомої функції, остаточно одержимо

$$y(x) = Cx + \arcsin(C_1 |x|^{-1}).$$

Зазначимо, що множина розв'язків $y = Cx$ включається в загальний розв'язок при $C_1 = 0$.

5. Рівняння в точних похідних. Так називають рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$, права частина якого є повною похідною деякої функції $\Phi(x, y, y')$, тобто

$$\frac{d\Phi}{dx}(x, y, y') = F(x, y, y', y'').$$

Після інтегрування за змінною x одержимо перший інтеграл вихідного рівняння у вигляді $\Phi(x, y, y') = C$.

Приклад. Розв'яжемо рівняння $xy'' = y'(1 + 2x^2 y)$. Його можна переписати у вигляді

$$xy'' - y' = 2x^2 yy' \Rightarrow \frac{xy'' - y'}{x^2} = 2yy' \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x}\right) = \frac{d}{dx}(y^2),$$

отже, це рівняння в точних похідних. Після інтегрування одержимо перший інтеграл – рівняння з відокремлюваними змінними $y' = x(y^2 + C)$. При $C > 0$ покладемо $C = C_1^2$. Тоді після відокремлення змінних та інтегрування маємо загальний розв'язок

$$\frac{dy}{y^2 + C_1^2} = xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + C_1^2} = \int xdx \Rightarrow \frac{1}{C_1} \operatorname{arctg}(\frac{y}{C_1}) = \frac{x^2}{2} + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2C_1 \operatorname{tg}(C_1 x^2 + C_2).$$

В останній формулі довільні сталі перепозначено.

При $C < 0$ покладемо $C = -C_1^2$. Тепер попередні перетворення при $y \neq \pm C_1$ дають загальний інтеграл вихідного рівняння

$$\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 - C_1^2} = \int xdx \Rightarrow \frac{1}{2C_1} \ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Очевидно, що рівняння також має набір розв'язків $y = C_1$. При $C = 0$ рівняння має ще набір розв'язків

$$y = 2(C_1 - x^2)^{-1}.$$

2.3. Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку відносно невідомої функції $y = y(x)$ називається рівняння вигляду

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad (1)$$

де $\{a_i(x)\}_{i=1}^2$, $f(x)$ – задані функції (коефіцієнти й права частина рівняння).

Якщо позначити через

$$L[y] \equiv y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \qquad (2)$$

диференціальний оператор, який діє на функцію y, то рівняння можна записати так:

$$L[y] = f(x). \qquad (3)$$

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (1) називають **лінійним однорідним**, у протилежному випадку – **лінійним неоднорідним**.

Основним результатом теорії лінійних диференціальних рівнянь другого порядку є таке твердження.

Теорема 1. Якщо функції $\{a_i(x)\}_{i=1}^2$, $f(x)$ є неперервними на відрізку $|x-x_0|\le a$, то задача Коші

$$\begin{cases} L[y]=f(x), \\ y(x_0)=y_0^{(0)},\ y'(x_0)=y_0^{(1)} \end{cases} \tag{4}$$

на цьому відрізку має єдиний розв’язок.

Лінійна залежність і незалежність системи функцій на інтервалі

Означення. Система функцій $\{y_k(x)\}_{k=1}^2$, визначена на інтервалі (a,b), називається **лінійно залежною** на (a,b), якщо існують дійсні числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^2$, серед яких є відмінне від нуля, і такі, що

$$\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)=0 \quad \forall x\in(a,b). \tag{5}$$

Система функцій $\{y_k(x)\}_{k=1}^2$ називається **лінійно незалежною,** якщо тотожність (5) є правильною тільки при $\forall\lambda_k=0$.

Приклади: 1. Система функцій $\{\sin x, 2\sin x\}$ є лінійно залежною на будь-якому інтервалі дійсної осі, оскільки

$$\lambda_1\sin x+\lambda_2 2\sin x=0 \quad \forall x\in\mathbf{R}$$

при $\lambda_1=2, \lambda_2=-1\ne 0$.

2. Система функцій $\{\sin x, \cos x\}$ є лінійно незалежною на будь-якому інтервалі дійсної осі. Інакше будуть існувати числа $\lambda_1, \lambda_2 : \lambda_1^2+\lambda_2^2\ne 0$ та інтервал (a,b), такі, що

$$\lambda_1\sin x+\lambda_2\cos x=0 \quad \forall x\in(a,b).$$

Уважаючи, наприклад, що $\lambda_1\ne 0$, одержимо $\mathrm{tg}x=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ $\forall x\in(a,b)$, що є неможливим.

При дослідженні системи функцій на лінійну залежність або незалежність використовують визначник Вронського.

Означення. Визначником Вронського (**вронскіаном**) системи гладких функцій $\{y_k(x)\}_{k=1}^2$ називається визначник вигляду

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Теорема 2. Система гладких функцій $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$, для якої визначник Вронського $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ при кожному $x \in (a,b)$, є лінійно незалежною на інтервалі (a,b).

Нехай для системи функцій $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$, $y_k(x) \in C^1(a,b)$ виконується тотожність (2.3.5). Здиференціюємо її за змінною x і одержимо відносно $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2}$ лінійну систему

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0, \\ \lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) = 0, \end{cases}$$

визначником якої є $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$. Тоді система має тільки нульові розв'язки $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, тобто система $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$ є лінійно незалежною.

Зауваження. Твердження, обернене до сформульованого в теоремі 2, не є правильним. Для прикладу можна розглянути дві функції $y_1(x),\ y_2(x) \in C^1(a,b)$, які мають носії (множина, на якій функція є відмінною від нуля), що не перетинаються. Тоді $W(y_1, y_2) = 0\ \ \forall x \in (a,b)$, але функції є лінійно незалежними (чому?). Інший результат отримаємо, коли система функцій є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння.

Теорема 3. Якщо розв'язки $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$ диференціального рівняння $L[y] = 0$ є лінійно незалежними на інтервалі (a,b), то визначник $W(y_1, y_2) \neq 0\ \ \forall x \in (a,b)$.

► Припустимо протилежне, тобто $\exists x_0 \in (a,b) : W(x_0) = 0$. З теорії визначників випливає, що існують числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2}$, не всі з яких дорівнюють нулю і такі, що задовольняють системі

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) = 0, \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases}$$

Тоді функція $\tilde{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{2} \lambda_k y_k(x)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} L[y]=0\,, \\ y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0, \end{cases}$$

і внаслідок теореми єдиності $\tilde{y}(x)=0\ \ \forall x\in(a,b)$. Тому функції $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$ є лінійно залежними на (a,b), що суперечить умові теореми.

Приклад. Розглянемо функції $\{e^{\alpha x}\cos\beta x,\, e^{\alpha x}\sin\beta x\},\, \beta>0$. Визначник Вронського цих функцій є таким: $W(e^{\alpha x}\cos\beta x,\, e^{\alpha x}\sin\beta x)=\beta e^{\alpha x}>0$. Отже, функції – лінійно незалежні.

Властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь

1. Якщо $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$ є розв'язками диференціального рівняння $L[y]=0$, то їх лінійна комбінація $\sum\limits_{k=1}^{2}\lambda_k y_k(x)$ з довільними коефіцієнтами $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2}$ також буде розв'язком цього рівняння. Це твердження є прямим наслідком лінійності диференціального оператора $L[y]$. Дійсно

$$L\left[\sum_{k=1}^{2}\lambda_k y_k(x)\right]=\sum_{k=1}^{2}\lambda_k L[y_k(x)]=0\,.$$

Таким чином, множина розв'язків лінійного диференціального рівняння $L[y]=0$ утворює векторний простір.

2. **Формула Остроградського – Ліувілля.** Нехай $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$ є розв'язками диференціального рівняння $L[y]=0$, а $W(x)$ – їх визначник Вронського. Знайдемо похідну функції $W(x)$

$$\frac{dW}{dx}=\frac{d}{dx}\{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\}=y_1(x)y_2''(x)-y_2(x)y_1''(x)\,.$$

Оскільки функції $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$ є розв'язками рівняння $L[y]=0$, то виконуються тотожності

$$y_i''(x)=-a_1(x)y_i'(x)-a_2(x)y_i(x),\quad i=1,2\,.$$

Підставимо їх у попередній вираз

$$\frac{dW}{dx}=-y_1(x)[a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)]+$$

$$+y_2(x)[a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)]=-a_1(x)[y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)]=$$

$$-a_1(x)W(x).$$

Отже, визначник Вронського задовольняє лінійному диференціальному рівнянню

$$W'(x) = -a_1(x)W(x),$$

яке має простий розв'язок

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt}. \qquad (7)$$

Рівність (7) називають **формулою Остроградського – Ліувілля**.

Наслідок. Вронскіан системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння або тотожно дорівнює нулю на деякому інтервалі, або не перетворюється на нуль ні в одній точці інтервалу.

3. Важливу властивість розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння формулює така теорема.

Теорема 4. Якщо коефіцієнти $\{a_k(x)\}_{k=1}^{2}$ лінійного однорідного диференціального рівняння $L[y]=0$ є неперервними на інтервалі (a,b), то рівняння має в точності два лінійно незалежних частинних розв'язків на (a,b). Кожний розв'язок цього рівняння є лінійною комбінацією цих частинних розв'язків.

► Позначимо через $\{e_i(x)\}_{i=1}^{2}$ розв'язки таких задач Коші

$$\begin{cases} L[e_1]=0, \\ e_1(x_0)=1, e_1'(x_0)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L[e_2]=0, \\ e_2(x_0)=0, e_2'(x_0)=1. \end{cases}$$

За формулою (2.3.7) для системи функцій $\{e_i(x)\}_{i=1}^{2}$ одержимо

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \neq 0 \ \forall x, x_0 \in (a,b).$$

З теореми 2 випливає, що функції $\{e_i(x)\}_{i=1}^{2}$ є лінійно незалежними. Тепер розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} L[y]=0, \\ y(x_0)=y_0^{(0)}, \ y'(x_0)=y_0^{(1)} \end{cases}$$

лінійно виражається через частинні розв'язки $\{e_i(x)\}_{i=1}^{2}$ за формулою

$$y(x) = y(x_0)e_1(x) + y'(x_0)e_2(x) = y_0^{(0)}e_1(x) + y_0^{(1)}e_2(x).$$

Отже, теорему доведено.

Означення. Будь-яка система з двох лінійно незалежних розв'язків рівняння $L[y]=0$ називається **фундаментальною системою розв'язків** (ФСР) цього рівняння.

Наслідок теореми 4. Кожна фундаментальна система розв'язків рівняння $L[y]=0$ є базисом у векторному просторі всіх розв'язків цього рівняння. Вимірність цього простору дорівнює двом.

Звідси безпосередньо одержимо **структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння** $L[y]=0$ у вигляді

$$y(x) = \sum_{k=1}^{2} c_k y_k(x), \tag{8}$$

де $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$ – будь-яка фундаментальна система розв'язків рівняння $L[y]=0$; $\{c_k\}_{k=1}^{2}$ – довільні сталі.

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння

Нехай $\tilde{y}(x)$ – частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $L[y]=f(x)$, тобто $L[\tilde{y}]=f(x)$ – це тотожність. Якщо $y(x)$ – довільний розв'язок цього рівняння, то

$$L[y-\tilde{y}] = L[y] - L[\tilde{y}] = 0,$$

тобто функція $y-\tilde{y}$ є розв'язком однорідного рівняння, отже, її можна подати у вигляді

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{2} c_k y_k(x),$$

де $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$ – будь-яка фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння $L[y]=0$; $\{c_k\}_{k=1}^{2}$ – деякі сталі. Тоді загальний розв'язок рівняння $L[y]=f(x)$ має вигляд

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{k=1}^{2} c_k y_k(x), \tag{9}$$

де $\tilde{y}(x)$ – частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$L[y]=f(x)$; $\sum_{k=1}^{2} c_k y_k(x)$ – загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння $L[y]=0$. Формулу (9) називають структурою загального розв’язку лінійного неоднорідного рівняння $L[y]=f(x)$.

Формула Коші для визначення частинного розв’язку неоднорідного рівняння

Уважаємо, що для рівняння $L[y]=f(x)$ виконуються умови теореми 1. Знайдемо частинний розв’язок $\tilde{y}(x)$ цього рівняння, який задовольняє додаткові умови

$$\tilde{y}(x_0)=\tilde{y}'(x_0)=0.$$

Виявляється, що розв’язок цієї задачі виражається через розв’язок $k(x,\alpha)$, $|\alpha-x_0|\le a$ допоміжної задачі Коші для однорідного рівняння

$$\begin{cases} L\left[k\left(x,\alpha\right)\right]=0, \\ k\left(\alpha,\alpha\right)=k'_x\left(\alpha,\alpha\right)=1. \end{cases} \tag{10}$$

Правильною є **формула Коші**

$$\tilde{y}\left(x\right)=\int_{x_0}^{x} k\left(x,\alpha\right) f\left(\alpha\right) d\alpha. \tag{11}$$

Теорема 5. Функція (2.3.11) при $|x-x_0|\le a$ є розв’язком задачі Коші

$$\begin{cases} L[y]=f(x), \\ y(x_0)=y'(x_0)=0. \end{cases} \tag{12}$$

► Згідно з теоремою 1 існує єдиний розв’язок $k(x,\alpha)$ задачі Коші (10), визначений на відрізку $|x-x_0|\le a$. Позначимо через $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$ будь-яку фундаментальну систему розв’язків рівняння $L[y]=0$. Можна виконати розвинення функції $k(x,\alpha)$ за базисом $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2}$, тобто зобразити її у вигляді

$$k(x,\alpha)=\sum_{k=1}^{2} c_k(\alpha) y_k(x), \tag{13}$$

де $\{c_k(\alpha)\}_{k=1}^{2}$ – деякі коефіцієнти, що залежать від параметра α. Якщо формулу (13) здиференціювати за змінною x, то одержимо матричну рівність

$$K(x,\alpha)=\Phi(x)C(\alpha), \tag{14}$$

де

$$K(x,\alpha)=\left(k(x,\alpha)\; k'_x(x,\alpha)\right)^T,\ \Phi(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix},$$

$$C(\alpha)=\left(c_1(\alpha)\; c_2(\alpha)\right)^T.$$

Підставляючи в формулу (14) $x=\alpha$ і враховуючи початкові умови (10), одержимо

$$C(\alpha)=\Phi^{-1}(\alpha)\zeta,\ \zeta=(0\;1)^T.$$

Тоді

$$K(x,\alpha)=\Phi(x)\Phi^{-1}(\alpha)\zeta,$$

звідки безпосередньо випливає, що $K(x,x)=\zeta$ або

$$k(x,x)=0,\ k'_x(x,x)=1. \tag{15}$$

Тепер для перевірки того, що функція (11) є розв'язком задачі Коші (12), два рази її здиференціюємо:

$$\tilde{y}'(x)=\int_{x_0}^{x} k'_x(x,\alpha)\, f(\alpha)d\alpha+k(x,x)\, f(x)=\int_{x_0}^{x} k'_x(x,\alpha)\, f(\alpha)d\alpha,$$

$$\tilde{y}''(x)=\int_{x_0}^{x} k''_x(x,\alpha)\, f(\alpha)d\alpha+k'_x(x,x)\, f(x)=$$

$$=\int_{x_0}^{x} k''_x(x,\alpha)\, f(\alpha)d\alpha+f(x).$$

Тут було використано формули (15). Підстановка функцій $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ у ліву частину рівняння (12) дає

$$L[\tilde{y}]=\tilde{y}''+a_1(x)\tilde{y}'+a_1(x)\tilde{y}=\int_{x_0}^{x} L\left[k(x,\alpha)\right] f(\alpha)d\alpha+f(x)=f(x),$$

що доводить теорему.

Приклад. Задано рівняння $y'' + y = x$. Треба знайти частинний розв'язок з початковими умовами $y(0) = y'(0) = 0$.

Знаходимо функцію Коші, тобто розв'язуємо задачу

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(\alpha) = 0,\ y'(\alpha) = 1. \end{cases}$$

Її розв'язком є функція $k(x,\alpha) = \sin(x - \alpha)$. Тепер розв'язок вихідної задачі за формулою (2.3.11) має вигляд

$$\tilde{y}(x) = \int_0^x \alpha \sin(x - \alpha) d\alpha = \alpha \cos(x - \alpha)\Big|_0^x - \int_0^x \cos(x - \alpha) d\alpha =$$

$$= x + \sin(x - \alpha)\Big|_0^x = x - \sin x.$$

Нажаль, крім випадку сталих коефіцієнтів (його буде розглянуто в наступному параграфі), немає загальних прийомів побудови фундаментальних систем розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку. Тому розглянемо декілька частинних підходів.

Рівняння Ейлера. Так називають рівняння вигляду

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0,$$

де $\{a_i\}_{i=1}^2$ – сталі коефіцієнти.

Це рівняння зводиться до лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною $y(x) = z(\ln x)$, оскільки $xy' = z'$, $x^2 y'' = z'' - z'$.

Приклад. Знайдемо розв'язок задачі Коші

$$x^2 y'' + xy' + y = 5x^3 + x^2 + 2x,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$$

Спершу розглянемо однорідне рівняння $x^2 y'' + xy' + y = 0$. Зробимо заміну невідомої функції $y(x) = z(\ln x)$, $y' = \dfrac{z'}{x}$, $y'' = \dfrac{z'' - z'}{x^2}$. Унаслідок цього одержимо рівняння $z'' + z = 0$, яке допускає зниження порядку заміною $z' = u(z)$:

$$uu' + z = 0 \Rightarrow \left(\frac{u^2}{2}\right)' = -\left(\frac{z^2}{2}\right)' \Rightarrow u = \pm\sqrt{A^2 - z^2} \Rightarrow z' = \pm\sqrt{A^2 - z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{A^2 - z^2}} = \pm dt \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{A^2 - z^2}} = \pm\int dt \Rightarrow \arcsin(\frac{z}{A}) = \pm(t + B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = A\sin(t + B) = C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Тут $t = \ln x$.

Отже, одержано загальний розв'язок однорідного рівняння у вигляді

$$y(x) = C_1 \sin(\ln x) + C_2 \cos(\ln x).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти методом невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$\tilde{y}(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Підстановка його в рівняння і прирівнювання коефіцієнтів при відповідних степенях одержаних многочленів дає такий розв'язок:

$$\tilde{y}(x) = 0,5x^3 + 0,2x^2 + x.$$

Таким чином, загальним розв'язком вихідного рівняння є функція

$$y(x) = C_1 \sin(\ln x) + C_2 \cos(\ln x) + 0,5x^3 + 0,2x^2 + x.$$

Унаслідок виконання початкових умов остаточно маємо

$$y(x) = -1,9\sin(\ln x) - 1,7\cos(\ln x) + 0,5x^3 + 0,2x^2 + x.$$

Рівняння, яке має частинний розв'язок

Якщо рівняння $L[y] = 0$ має частинний розв'язок $y = \varphi(x)$, то можна знизити його порядок заміною $y(x) = \varphi(x)z(x)$, де $z(x)$ – нова невідома функція. Дійсно, після підстановки в рівняння маємо

$$[\varphi'' + a_1(x)\varphi' + a_2(x)\varphi]z + \varphi z'' + (2\varphi' + a_1(x)\varphi)z' = 0.$$

Оскільки $\varphi(x)$ – частинний розв'язок вихідного рівняння, вираз у квадратних дужках дорівнює нулю і рівняння перетворюється на таке:

$$\varphi(x)z'' + (2\varphi'(x) + a_1(x)\varphi(x))z' = 0.$$

Тепер порядок рівняння знижується заміною $z'(x) = u(x)$.

Частинний розв'язок рівняння $L[y] = 0$ у деяких випадках можна спробувати побудувати методом невизначених коефіцієнтів, маючи на увазі конкретний вигляд функцій $a_i(x)$.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$x(x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

Підбором легко встановлюється, що функція $y = x$ є частинним розв'язком заданого рівняння. Тому після заміни $y(x) = xz(x)$ одержимо

$$x(x-1)z''+(x-2)z'=0.$$

Тепер заміна $z'(x)=u(x)$ приводить до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x(x-1)u'+(x-2)u=0 \Rightarrow \frac{du}{u}=-\frac{(x-2)dx}{(x-1)x} \Rightarrow \int\frac{du}{u}=-\int\frac{(x-2)dx}{(x-1)x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u=C_1\frac{x-1}{x^2}.$$

Повертаючись до функції z, отримуємо

$$z'(x)=C_1\frac{x-1}{x^2} \Rightarrow z(x)=C_1(\ln|x|+\frac{1}{x})+C_2.$$

Остаточним результатом є загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y(x)=C_1(x\ln|x|+1)+C_2x.$$

Рівняння, яке має інтегровану комбінацію. Це рівняння, ліва частина якого є лінійним диференціальним виразом від деякої комбінації невідомої функції і декількох її похідних. Позначаючи зазначену комбінацію новою невідомою функцією, знижуємо порядок вихідного рівняння.

Приклад. Розв'яжемо лінійне диференціальне рівняння

$$xy'''-y''-xy'+y=0.$$

Інтегрованою комбінацією для цього рівняння є вираз $y''-y$, оскільки рівняння можна переписати у вигляді

$$x(y''-y)'-(y''-y)=0.$$

Заміною $y''-y=u$ зведемо вихідне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними $xu'-u=0$, для якого загальний розв'язок задається формулою $u=C_1x$. Тепер треба зінтегрувати рівняння

$$y''-y=C_1x.$$

Відповідне однорідне рівняння $y''-y=0$ можна зінтегрувати декількома способами, наприклад, помножимо його обидві частини на $2y'$, після чого одержимо рівняння в точних похідних

$$(y'^2)'=(y^2)',$$

звідки

$$y'^2=y^2+C_2^2 \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^2+C_2^2}}=\pm dx \Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{y^2+C_2^2}}=\pm\int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y}{C_2}+\sqrt{\left(\frac{y}{C_2}\right)^2+1}\right)=\pm(x+C_3)\Rightarrow y=C_2\,\mathrm{sh}(x+C_3).$$

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння легко підбирається у вигляді $y=-C_1x$.

Таким чином, остаточним загальним розв’язком вихідного рівняння є функція

$$y=C_1x+C_2\,\mathrm{sh}(x+C_3).$$

Певна річ, до лінійних диференціальних рівнянь другого порядку можна застосовувати всі ті методи зниження порядку рівняння, які було описано в п. 2.2. Окремо їх розглядати не будемо.

2.4. Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами

В цьому параграфі розглянемо рівняння (1) попереднього параграфа, коефіцієнтами якого є дійсні числа $\{a_i\}_{i=1}^{2}$. Особливістю цього класу диференціальних рівнянь є можливість явно побудувати фундаментальну систему розв'язків для однорідного рівняння, яке відповідає будь-якому його представнику. Будемо користуватися позначеннями попереднього підрозділу.

Знайдемо для однорідного рівняння $L[y]=0$ фундаментальну систему розв’язків. Для цього застосуємо метод Ейлера, тобто будемо шукати частинні розв’язки рівняння у вигляді $y=e^{\lambda x}$, де λ – деякий числовий параметр. Після диференціювання

$$y=e^{\lambda x},\ y'=\lambda e^{\lambda x},\ y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$$

і підстановки в рівняння одержимо

$$e^{\lambda x}(\lambda^2+a_1\lambda+a_2)=0.$$

Остання рівність тотожно виконується, якщо число λ буде коренем рівняння

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0. \tag{1}$$

Це рівняння називають **характеристичним**, многочлен $p(\lambda)\equiv\lambda^2+a_1\lambda+a_2$ – **характеристичним многочленом**, а його корені

λ_1, λ_2 – **характеристичними числами** лінійного диференціального рівняння $L[y]=0$.

Розглянемо різні випадки коренів характеристичного рівняння.

1. Характеристичні числа є дійсними і різними: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Їм відповідають два частинні розв'язки $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ рівняння $L[y]=0$. Ці розв'язки утворюють ФСР, оскільки вронскіан цих розв'язків відмінний від нуля. Дійсно

$$W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 x + \lambda_2 x} \neq 0 \ \ \forall x \in (-\infty, \infty).$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння $y'' + y' - 2y = 0$. Цьому рівнянню відповідає характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

з коренями $\lambda = 1$ і $\lambda = -2$. Тоді ФСР є система $\{e^x, e^{-2x}\}$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння є сім'я функцій

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x},$$

де $\{C_i\}_{i=1}^{2}$ – довільні сталі.

2. Характеристичні числа є дійсними і однаковими: $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$. Доведемо, що крім розв'язка $e^{\alpha x}$, ще є розв'язок $xe^{\alpha x}$ і обидва утворюють ФСР.

Неважко перевірити тотожність

$$L[xe^{\alpha x}] = xL[e^{\alpha x}] + (2\alpha + a_1)e^{\alpha x}.$$

Але функція $e^{\alpha x}$ є розв'язком рівняння $L[y]=0$, тобто $L[e^{\alpha x}]=0$, а $2\alpha + a_1 = 0$, оскільки

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \equiv (\lambda - \alpha)^2 \Rightarrow a_1 = -2\alpha.$$

Тоді $L[xe^{\alpha x}]=0$, тобто $xe^{\alpha x}$ є розв'язком рівняння $L[y]=0$. Незалежність функцій $e^{\alpha x}$ і $xe^{\alpha x}$ випливає з результату обчислення вронскіана

$$W(e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & e^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & (1+\alpha x)e^{\alpha x} \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} \neq 0 \ \ \forall x \in (-\infty, \infty).$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

має два однакові дійсні корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. ФСР рівняння складається з функцій $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$. Загальний розв'язок зображується у вигляді

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},$$

де $\{C_i\}_{i=1}^{2}$ – довільні сталі.

3. Характеристичне рівняння має комплексний корінь $\alpha + i\beta \ (\beta \neq 0)$. Відомо, що алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами, яке має комплексний корінь $\alpha + i\beta \ (\beta \neq 0)$, також має комплексно спряжений корінь $\alpha - i\beta$. Таким чином, парі спряжених коренів відповідає пара комплекснозначних функцій

$$\left.\begin{matrix} \alpha + i\beta \\ \alpha - i\beta \end{matrix}\right\} \to y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \ y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

На основі властивостей розв'язків рівняння $L[y] = 0$ можемо стверджувати, що функції

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \ \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

також є розв'язками цього рівняння. Ці функції є лінійно незалежними, тому що

$$W(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Отже вони утворюють ФСР.

Приклад 3.2.3. Розв'яжемо рівняння

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ має пару комплексно-спряжених коренів $\lambda = 1 \pm 2i$. ФСР рівняння складається з функцій $\{e^{x}\cos 2x, e^{x}\sin 2x\}$. Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2\, e^x \sin 2x\,,$$

де $\{C_i\}_{i=1}^2$ – довільні сталі.

Лінійні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною

Так називають рівняння вигляду

$$L[y] = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right],$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – задані многочлени від змінної x степенів n і m; α, β – задані дійсні числа.

Приклад. Такі функції, як $x^2 + x + 1$, $4x^2 e^{-2x}$, $xe^{-x}\sin 3x$, є спеціальними правими частинами, $e^x + \sin x$ – сума двох спеціальних правих частин.

Теорема 1. У випадку відсутності резонансу (комплексне число $\alpha + i\beta$, складене за правою частиною, не є коренем характеристичного рівняння) частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти методом невизначених коефіцієнтів у формі, яка є подібною правій частині, тобто

$$y_{ч.н} = e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x + T_k(x)\sin\beta x\right], \tag{2}$$

$$k = \max(n, m),$$

$$R_k(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_k x^k,$$

$$T_k(x) = B_0 + B_1 x + \cdots + B_k x^k,$$

де невизначені сталі $A_0, \cdots A_k$, $B_0, \cdots B_k$ можна знайти після підстановки $y_{ч.н}$ у диференціальне рівняння.

Насамперед зазначимо, що замість правої частини можна записати функцію $e^{\mu x} S_k(x)$, де $\mu = \alpha + i\beta$, $S_k(x) = P_n(x) - iQ_m(x)$.

Якщо знайти частинний розв'язок $\tilde{y}$ для такої правої частини, то $y_{ч.н} = \mathrm{Re}\,\tilde{y}$.

Як і раніше, вважаємо, що $p(\lambda)$ – характеристичний многочлен для диференціального рівняння $L[y] = 0$.

Оскільки $L\left[e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x} p(\lambda)$, після диференціювання r разів за змінною λ одержимо

$$L\left[x^r e^{\lambda x}\right]=\sum_{s=0}^{r} C_r^s p^{(r-s)}(\lambda)x^s e^{\lambda x}.$$

Підставимо в цю тотожність $\lambda=\mu=\alpha+i\beta$

Позначимо невизначені комплексні коефіцієнти через a_r:

$$\sum_{r=0}^{k} a_r L\left[x^r e^{\mu x}\right]\equiv L\left[M_k(x)e^{\mu x}\right]=\sum_{r=0}^{k} a_r \sum_{s=0}^{r} C_r^s p^{(r-s)}(\mu)x^s e^{\mu x},$$

$$L\left[M_k(x)e^{\mu x}\right]=e^{\mu x}\sum_{s=0}^{k} x^s \sum_{r=s}^{k} a_r C_r^s p^{(r-s)}(\mu). \qquad (3)$$

Нехай многочлен правої частини $S_k(x)$ має коефіцієнт b_s при степені x^s. Тоді для того, щоб задовольнити функцією $M_k(x)e^{\mu x}$ рівняння $L[y]=e^{\mu x}S_k(x)$, потрібно мати можливість визначити коефіцієнти a_r з системи

$$\sum_{r=s}^{k} a_r C_r^s p^{(r-s)}(\mu)=b_s \quad s=0,\ldots,k.$$

Але система має трикутну матрицю з визначником $\left[p(\mu)\right]^{k+1}\neq 0$, оскільки завдяки відсутності резонансу $p(\mu)\neq 0$.

Так само може бути доведено наступний результат.

Теорема 2. У резонансному випадку (число $\alpha+i\beta$ збігається з коренем характеристичного рівняння кратності l) частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти у вигляді

$$y_{ч.н}=x^l e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x+T_k(x)\sin\beta x\right],\ k=\max(n,m), \qquad (4)$$

$$R_k(x)=A_0+A_1x+\cdots+A_kx^k,\ T_k(x)=B_0+B_1x+\cdots+B_kx^k,$$

де $A_0,\cdots A_k$, $B_0,\cdots B_k$ – невизначені сталі, які можна знайти шляхом підстановки $y_{ч.н}$ у диференціальне рівняння.

Приклади. Знайдемо загальний розв'язок рівняння $y''-y'=xe^x$. Відповідне однорідне рівняння має характеристичні числа $\lambda=0$ и $\lambda=1$ і загальний розв'язок $y_0=c_1+c_2e^x$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо в резонансному випадку, оскільки число $\alpha+i\beta=1$ є коренем характеристичного многочлена кратності 1. Тому $y_{ч.н} = x(ax+b)e^{x}$. Знайдемо невизначені коефіцієнти a і b, підставляючи цю функцію до диференціального рівняння:

$$\begin{cases} 2a = 1, \\ b + 2a = 0, \end{cases}$$

звідки $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$. Остаточний загальний розв’язок має вигляд

$$y = c_1 + c_2 e^{x} + (\frac{1}{2}x^2 - x)e^{x}.$$

Механічний зміст резонансу

Розглянемо пружину, яка деформується за законом Гука під дією зовнішньої гармонічної сили $F = H\sin\nu t$ з частотою ν. Якщо через $y(t)$ позначити зміщення кінця пружини в момент часу t, то математичною моделлю для опису функції $y(t)$ буде система

$$\begin{cases} my''(t) = -ky(t) + H\sin\nu t, \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0', \end{cases}$$

де m – маса пружини, k – жорсткість пружини. Позначимо $k/m = \omega^2$, $H/m = h$. Тоді для визначення $y(t)$ одержимо задачу Коші для лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = h\sin\nu t, \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0'. \end{cases}$$

Уважаючи, що $\nu \neq \omega$, одержимо нерезонансний випадок, для якого розв’язок задачі Коші має вигляд

$$y = y_0\cos\omega t + \frac{y_0'}{\omega}\sin\omega t + \frac{h}{\omega}\frac{\omega\sin\nu t - \nu\sin\omega t}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Якщо перейти в цій формулі до границі при $\nu \to \omega$ (частота коливань зовнішньої сили наближається до частоти власних коливань пружини) і розкрити невизначеність в останньому доданку, то одержимо розв’язок задачі Коші в резонансному випадку, коли частота вимушених коливань ν збігається з частотою ω власних коливань пружини:

$$y = y_0\cos\omega t + \frac{y_0'}{\omega}\sin\omega t + \frac{h}{2\omega^2}\sin\omega t - \frac{h}{2\omega}t\cos\omega t.$$

Зазначимо, що перші три доданки обмежені, а четвертий – необмежений при $t \to \infty$, тобто амплітуда коливань системи буде необмежено зростати з часом.

Метод варіації довільних сталих

Розглянемо загальний підхід до побудови загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $L[y] = f(x)$.

Уважаємо, що фундаментальна система розв’язків $\{y_i(x)\}_{i=1}^2$ лінійного однорідного рівняння $L(y) = 0$ є відомою. Тоді загальний розв’язок цього рівняння можна записати у вигляді

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

де $\{c_i\}_{i=1}^2$ – довільні сталі.

Будемо шукати загальний розв’язок рівняння $L[y] = f(x)$ у вигляді

$$y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \tag{5}$$

де $\{c_i(x)\}_{i=1}^2$ – невідомі функції, які треба знайти. Зауважимо, що на ці функції можна накласти дві незалежні умови для їх визначення. Тому будемо два рази диференціювати рівність (5), кожний раз накладаючи певну умову:

$$y' = c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)$$

за умови

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) \equiv 0; \tag{6}$$

$$y'' = c_1(x) y_1''(x) + c_2(x) y_2''(x)$$

за умови

$$c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) \equiv f(x); \tag{7}$$

Тепер кожну з тотожностей для y, y', y'' помножимо на відповідний коефіцієнт диференціального оператора $L(y)$ і результати додамо один до одного. Тоді одержимо

$$L[y] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] + f(x),$$

або, враховуючи, що функції $\{y_i(x)\}_{i=1}^2$ є розв'язками однорідного рівняння, упевнимося, що $L[y] = f(x)$.

Таким чином, при виконанні умов (6), (7) функція (5) є розв’язком рівняння $L[y] = f(x)$.

Зведемо умови (3.2.6), (3.2.7) у систему й розв’яжемо її:

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0, \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{8}$$

Оскільки визначником системи є вронскіан $W(y_1, y_2)$, відмінний від нуля, система є однозначно алгебраїчно розв'язною відносно функцій $\{c_i'(x)\}_{i=1}^2$. Запишемо цей розв'язок, використовуючи матричну форму запису системи

$$\Phi(x)C'(x) = F(x),$$

де $\Phi(x)$ – матриця Вронського системи функцій $\{y_i(x)\}_{i=1}^2$, $C(x) = (c_1(x)\; c_2(x))^T$, $F(x) = (0\;\; f(x))^T$. Тоді

$$C'(x) = \Phi^{-1}(x)F(x)$$

і після інтегрування

$$C(x) = \int \Phi^{-1}(x)F(x)dx + \tilde{C},$$

де $\tilde{C} = (\tilde{c}_1\; \tilde{c}_2)^T$ – стовпець довільних сталих. Підставляючи цей результат у (2.4.5), одержимо загальний розв'язок рівняння $L[y] = f(x)$ у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = Y^T(x)C(x) = Y^T(x)[\int \Phi^{-1}(x)F(x)dx + \tilde{C}], \quad (9)$$

де $Y(x) = (\,y_1(x)\; y_2(x))^T$.

Зауваження. Формула (9) відповідає структурі загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (параграф 2.3, формула(9)), оскільки $Y^T(x)\tilde{C}$ – загальний розв'язок рівняння $L(y) = 0$, а $Y^T(x)\int \Phi^{-1}(x)F(x)dx$ – частинний розв'язок рівняння $L[y] = f(x)$.

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$y'' - y = e^x / (1 + e^x).$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Згідно з методом варіації довільних сталих будемо шукати загальний розв'язок неоднорідного рівняння у формі

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x},$$

де функції $\{c_i(x)\}_{i=1}^2$ є розв'язками системи

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0, \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = e^x / (1 + e^x). \end{cases}$$

Алгебраїчним розв'язком системи є

$$\begin{cases} c_1'(x) = 0,5/(1+e^x), \\ c_2'(x) = -0,5e^{2x}/(1+e^x). \end{cases}$$

Тепер, після інтегрування, одержимо

$$\begin{cases} c_1(x) = 0,5(x - \ln(1+e^x)) + \tilde{c}_1, \\ c_2(x) = -0,5(e^x - \ln(1+e^x)) + \tilde{c}_2. \end{cases}$$

Остаточно запишемо розв’язок системи:

$$y = 0,5(xe^x - 1) - \mathrm{sh}x \ln(1+e^x) + \tilde{c}_1 e^x + \tilde{c}_2 e^{-x}.$$

Контрольні питання до розділу 2

1. Сформулюйте умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку.
2. Дайте означення першого інтеграла диференціального рівняння другого порядку.
3. Які є методи зниження порядку диференціальних рівнянь?
4. Дайте означення лінійно залежної та лінійно незалежної системи функцій на інтервалі.
5. Дайте означення визначника Вронського системи функцій.
6. Як можна дослідити лінійну незалежність системи функцій за допомогою визначника Вронського.
7. Сформулюйте властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння.
8. Запишіть формулу Остроградського – Ліувілля.
9. Дайте означення фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння.
10. Сформулюйте теорему про існування фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння.
11. Запишіть структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння.
12. Запишіть структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.
13. Дайте означення функції Коші для лінійного однорідного рівняння.
14. Запишіть формулу Коші для визначення частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.
15. Запишіть рівняння Ейлера другого порядку, як його можна розв’язати.
16. В чому полягає метод Ейлера знаходження частинних

розв'язків лінійного однорідного рівняння.

17. Опишіть алгоритм побудови фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами для різних характеристичних чисел.
18. Що називається спеціальною правою частиною лінійного ДР.
19. Опишіть структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння зі спеціальною правою частиною у нерезонансному та резонансному випадках.
20. В чому полягає метод варіації незалежних сталих для лінійного неоднорідного рівняння другого порядку.

Задачі до глави 2

1. Знайти загальні інтеграли диференціальних рівнянь шляхом зниження їх порядків:

а) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$; б) $y''' + y''^2 = 0$; в) $y'' = y'(1 + y'^2)$; г) $2yy'' = 1 + y'^2$;

д) $y''(1 + yy') = y'(1 + y'^2)$; е) $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$; ж) $2yy'' = y^2 + y'^2$;

и) $yy'' + y = y'^2$; к) $y'''y'^2 = y''^3$; л) $xy'' = 2yy' - y'$; м) $yy'' + y'^2 = 1$;

н) $2xyy'' + y'^2 = 0$; п) $2yy''' = y'$; р) $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$; с) $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

2. Розв’язати задачі Коші:

а) $yy'' = xy'^2,\ y(1) = 1,\ y'(1) = -1$; б) $2yy'' + y'^2 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1$;

в) $2yy'' = 3y'^2 + 4y^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$; г) $y''^2 = (1 + y'^2)^3,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$;

д) $y''' = \sqrt{1 + y''^2},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$; е) $y^3y'' = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

3. Записати загальні розв’язки рівнянь:

а) $y'' - 4y' + 3y = 4$; б) $y'' - y = x^2$; в) $y'' + y = 2e^x$; г) $y''' + y'' = 2x$;

д) $y''' - 3y' + 2y = e^{-2x}$; е) $y'' + 4y = x\cos x$; ж) $y'' + y = 2\sin x$;

и) $y'' - y' - 2y = e^{-2x} + \sin x$.

4. Знайти розв’язки задач Коші: а) $y'' - 2y' = e^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$;

б) $y''' - y' = -2x,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 4$; в) $y'' + y = x\cos x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

5. Розв’язати рівняння методом варіації довільних сталих:

а) $y'' + y = \sin^{-2} x$; б) $y'' - y' = e^x(1 + e^x)^{-1}$; в) $y'' + 4y = 2\operatorname{ctg} x$.

Розділ 3. СИСТЕМИ ЛІНІНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Загальна теорія систем лінійних диференціальних рівнянь

Розглянемо систему двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку відносно двох невідомих функцій $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$

$$y_i'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) y_k(x) + f_i(x), \quad i = 1 \div n, \tag{1}$$

де $(a_{ik}(x))_{i,k=1}^{n}, (f_i(x))_{i=1}^{n}$ – задані функції, які називають коефіцієнтами та правими частинами системи.

Запишемо систему (1) у матричній формі. для цього введемо позначення:

$Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$, $A(x) = (a_{ik}(x))_{i,k=1}^{n}$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$,

де $Y(x)$ – стовпець розв'язків; $A(x)$ – матриця системи; $f(x)$ – стовпець правих частин. тепер (3.1.1) можна записати так:

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + f(x). \tag{2}$$

При $f(x) \equiv 0$ систему (2) називають однорідною, у протилежному випадку – неоднорідною.

Основним фактом теорії лінійних систем є твердження такої теореми.

Теорема 1. Якщо матричні функції $A(x), f(x)$ є неперервними на відрізку $|x - x_0| \le a$, то задача коші

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + f(x), \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{3}$$

на цьому відрізку має єдиний розв'язок.

Властивості розв'язків лінійних однорідних систем

1. Уведемо векторний диференціальний оператор $L = I\dfrac{d}{dx} - A(x)$ (I – одинична матриця), який діє на вектор-функцію $Y(x)$ за формулою

$$L[Y] = Y'(x) - A(x)Y(x). \tag{4}$$

Якщо $\{Y_i(x)\}_{i=1}^{k}$ – розв'язки системи $L[Y] = 0$, то при будь-яких дійсних або комплексних числах $\{c_i\}_{i=1}^{k}$ вектор-функція

$$Y(x)=\sum_{i=1}^{k}c_iY_i(x)$$

також буде розв’язком цієї системи.

Ця властивість є наслідком лінійності оператора L, оскільки

$$L[Y]=L\left[\sum_{i=1}^{k}c_iY_i\right]=\sum_{i=1}^{k}c_iL[Y_i]=0.$$

2. Розглянемо проблему лінійної залежності й незалежності системи розв’язків лінійної однорідної системи $L[Y]=0$.

Означення. Система вектор-функцій $\{Y_i(x)\}_{i=1}^{k}$, визначена й неперервна на інтервалі (a,b), називається лінійно залежною на цьому інтервалі, якщо їх лінійна комбінація тотожно перетворюється на нуль:

$$\sum_{i=1}^{k}c_iY_i(x)=0 \quad \forall x\in(a,b), \tag{5}$$

а серед коефіцієнтів $\{c_i\}_{i=1}^{k}$ є відмінні від нуля. Якщо остання рівність можлива тільки при $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$, то функції називаються лінійно незалежними.

Приклад. Вектор-функції $Y_1(x)=\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$ і $Y_2(x)=\begin{pmatrix}2\\2x\end{pmatrix}$ – лінійно залежні, у той час, як функції $Y_1(x)=\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$ і $Y_2(x)=\begin{pmatrix}x\\x^2\end{pmatrix}$ – лінійно незалежні на будь-якому інтервалі дійсної осі.

Нехай $\{Y_i(x)\}_{i=1}^{k}$ – розв’язки системи $L[Y]=0$ на інтервалі (a,b).

Теорема 2. Вектор-функції $\{Y_i(x)\}_{i=1}^{k}$ є лінійно залежними (незалежними) на інтервалі (a,b) тоді і тільки тоді, коли існує точка $x_0\in(a,b)$, для якої вектори $\{Y_i(x_0)\}_{i=1}^{k}$ – лінійно залежні (незалежні).

Доведемо теорему для лінійної залежності розв’язків. Необхідність умов теореми є наслідком означення лінійної залежності системи вектор-функцій. Доведемо достатність цих умов. нехай вектори $\{Y_i(x_0)\}_{i=1}^{k}$ – лінійно залежні. Тоді існують числа $\{c_i\}_{i=1}^{k}$, серед яких є ненульові, такі, що

$\sum\limits_{i=1}^{k} c_i Y_i(x_0) = 0$. із властивості 1 випливає, що вектор-функція $Y(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i Y_i(x)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} L[Y] = 0, \\ Y(x_0) = 0. \end{cases}$$

однак згідно з теоремою існування та єдиності ця задача має тільки нульовий розв'язок. Тому вектор-функції $\{Y_i(x)\}_{i=1}^{k}$ є лінійно залежними. Твердження про лінійну незалежність доводиться так само. ◄

Теорема 3. При виконанні умов теореми 1 лінійна однорідна система

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \tag{6}$$

де $A(x) = (a_{ik}(x))_{i,k=1}^{n}$, має в точності n лінійно незалежних розв'язків $\{Y_i(x)\}_{i=1}^{n}$. кожний розв'язок системи $Y(x)$ можна записати у вигляді

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i(x), \tag{7}$$

де $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ – деякі числа.

Позначимо через $E_k(x),\ k = 1 \div n$ розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} E_k'(x) = A(x)E_k(x), \\ \quad E_k(x_0) = e_k, \end{cases} \tag{8}$$

де $e_k = (0 \cdots 0\,1\,0 \cdots)^T$, а одиниця стоїть на k-му місці. Вектори $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ є лінійно незалежними, тому й вектор-функції $\{E_k(x)\}_{k=1}^{n}$ є лінійно незалежними. нехай $Y(x)$ є розв'язком задачі

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x), \\ \quad Y(x_0) = Y_0, \end{cases}$$

де $Y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T$ – сталий вектор. оскільки $Y_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^0 e_i$, з теореми існування та єдності випливає, що

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i^0 E_i(x), \tag{9}$$

тобто теорему доведено.

Означення. Будь-який набір $\{Y_i(x)\}_{i=1}^{n}$ з n лінійно незалежних розв'язків лінійної однорідної системи $L[Y]=0$ називається **фундаментальною системою розв'язків** (ФСР) цієї системи диференціальних рівнянь. Матриця

$$\Phi(x) = (Y_1(x)\, Y_2(x) \cdots Y_n(x)),$$

стовпцями якої є вектор-функції ФСР, називається **фундаментальною матрицею** системи $L[Y]=0$.

Зауваження. Кожна фундаментальна матриця $\Phi(x)$ задовольняє матричному рівнянню

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x), \tag{10}$$

а матриця $\mathrm{E}(x)$ – ще й початкову умову $\mathrm{E}(x_0) = I$.

Формула Ліувілля – Остроградського для лінійних систем

Нехай $\Phi(x) = (y_{ik}(x))_{i,k=1}^{n}$ – фундаментальна матриця лінійної системи $L[Y]=0$. її визначник $W(x) = \det\Phi(x)$ називають визначником Вронського відповідної системи. Знайдемо $W'(x)$, використовуючи правило диференціювання визначника

$$W'(x) = \frac{d}{dx}\det\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y'_{i1}(x) & \cdots & y'_{in}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

підставимо в нього із системи

$$y'_{ik}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_{jk}(x).$$

після застосування властивості лінійності одержимо

$$W'(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{j1}(x) & \cdots & y_{jn}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Визначник у внутрішній сумі при $j \neq i$ дорівнює нулю (має два однакові рядка), а при $j=i$ дорівнює $W(x)$. Тому визначник Вронського задовольняє такому лінійному диференціальному рівнянню

$$W'(x)=\mathrm{tr}A(x)W(x),$$

де $\mathrm{tr}A(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)$ – слід матриці $A(x)$. Інтегрування останнього рівняння дає формулу Ліувілля – Остроградського для визначника Вронського

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{tr}A(t)dt}. \tag{11}$$

Наслідком формули (11) є теорема 2.

Структура загального розв'язку лінійної однорідної системи

Формула (3.1.9) показує, що загальним розв'язком лінійної системи $L[Y]=0$ є вектор-функція

$$Y(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iY_i(x)=\Phi(x)C, \tag{12}$$

де $\{Y_i(x)\}_{i=1}^{n}$, $\Phi(x)$ **–** ФСР і фундаментальна матриця системи $L[Y]=0$; $C=(c_1\, c_2 \cdots c_n)$ – стовпець довільних сталих.

Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи

Розглянемо неоднорідну систему $L[Y]=f(x)$. Нехай $Y_0(x)$ – частинний розв'язок цієї системи. Тоді $L[Y-Y_0]=0$, тобто $Y-Y_0$ є розв'язком однорідної системи. Отже, загальний розв'язок неоднорідної системи одержимо, якщо $Y-Y_0=\sum_{i=1}^{n}c_iY_i(x)$, де $\{Y_i(x)\}_{i=1}^{n}$ – фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи,

$\{c_i\}_{i=1}^{n}$ – довільні сталі.

Таким чином, структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи задається формулою

$$Y = Y_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i(x). \tag{13}$$

Матриця Коші

Означення. Матрицею Коші (матрицантом) лінійної однорідної системи $L[Y]=0$ називають квадратну матрицю $K(x,x_0)$ n-го порядку, яка залежить від параметра x_0 і задовольняє системі

$$\begin{cases} L[K(x,x_0)] = 0, \\ K(x_0,x_0) = I. \end{cases} \tag{14}$$

Приклад. Матриця

$$K(x,x_0) = \begin{pmatrix} \cos(x-x_0) & -\sin(x-x_0) \\ \sin(x-x_0) & \cos(x-x_0) \end{pmatrix}$$

є матрицею Коші для лінійної системи

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y(x).$$

Нехай $\Phi(x)$ є будь-якою фундаментальною матрицею системи $L[Y]=0$. Тоді матрицю Коші цієї системи можна знайти за формулою:

$$K(x,x_0) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0). \tag{15}$$

Матричний варіант формули (9) показує, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} L[Y] = 0, \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

просто записується через матрицю Коші

$$Y(x) = K(x,x_0)Y_0.$$

Знаходження частинного розв'язку неоднорідної системи

Розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} L[Y] = f(x), \\ Y(x_0) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

задається формулою

$$Y(x)=\int\limits_{x_0}^{x} K(x,t)\,f(t)dt. \qquad (17)$$

Дійсно, дія оператора L на останню рівність дає

$$L[Y(x)]=K(x,x)\,f(x)+\int\limits_{x_0}^{x} L[K(x,t)]\,f(t)dt=f(x).$$

Приклад. Знайдемо розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} Y'(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y(x)+\begin{pmatrix} e^x \\ 1 \end{pmatrix}, \\ Y(0)=0. \end{cases}$$

Матрицею Коші цієї системи є матриця

$$K(x,x_0)=\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x-x_0) & \mathrm{sh}(x-x_0) \\ \mathrm{sh}(x-x_0) & \mathrm{ch}(x-x_0) \end{pmatrix}.$$

За формулою (17) запишемо розв'язок вихідної задачі:

$$Y(x)=\int\limits_0^x \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x-t) & \mathrm{sh}(x-t) \\ \mathrm{sh}(x-t) & \mathrm{ch}(x-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} dt=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2xe^x+3e^x+e^{-x}-4 \\ 2xe^x+e^x-e^{-x} \end{pmatrix}.$$

3.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо систему двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку відносно двох невідомих функцій $y_1(x),\, y_2(x)$

$$y_i'(x)=\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\,y_k(x)+f_i(x), \quad i=1\div 2, \qquad (1)$$

де $(a_{ik})_{i,k=1}^2$ – задані числа, а $(f_i(x))_{i=1}^2$ – як і раніше, задані функції.

Зазначимо, що вся загальна теорія систем лінійних диференціальних рівнянь, наведена в попередньому параграфі, очевидно, працює для систем зі сталими коефіцієнтами. При цьому саме для таких систем існують універсальні методи побудови загальних розв'язків, до розгляду яких і перейдемо. Більш того, як буде показано далі, ця задача має скоріше алгебраїчний характер, ніж диференціальний.

Зручно записати систему (1) у матричній формі. Для цього, як і раніше, уведемо позначення

$$Y(x)=(y_1(x),\, y_2(x))^T\,,\ A=(a_{ik})_{i,k=1}^2,\ f(x)=(f_1(x),\, f_2(x))^T\,.$$

Тоді система (3.2.1) зображується так:

$$Y'(x)=AY(x)+f(x)\,. \tag{2}$$

Загальний розв’язок лінійної однорідної системи

Побудову загального розв’язку (2) почнемо з однорідної системи

$$Y'(x)=AY(x)\,. \tag{3}$$

Застосуємо до її розв’язання метод Ейлера, згідно з яким частинні розв’язки системи будемо шукати в такому вигляді:

$$Y(x)=e^{\lambda x}U\,, \tag{4}$$

де λ – числовий параметр, а U – сталий вектор двовимірного координатного простору. Підстановка вектор-функції (4) у систему (3) зводить визначення невідомих λ і U до розв’язання алгебраїчної проблеми власних векторів і власних значень матриці системи

$$AU=\lambda U\,. \tag{5}$$

Таким чином, вектор-функція (4) є розв’язком системи (3), коли число λ є власним значенням, а вектор U – відповідним власним вектором матриці A.

Скористаємось відомими результатами лінійної алгебри. Для розв'язання задачі знаходження власних значень і власних векторів матриці A складемо характеристичне рівняння

$$\det(A-\lambda I)\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\det A=0\,.$$

Розглянемо різні випадки коренів характеристичного рівняння.

1. Корені характеристичного рівняння $\{\lambda_i\}_{i=1}^2$ – власні значення матриці A – є дійсними і різними. Тоді кожному власному значенню λ_i відповідає дійсний власний вектор U_i, причому вектори $\{U_i\}_{i=1}^2$ є лінійно незалежними. Згідно з методом Ейлера фундаментальною системою розв'язків лінійної системи (3) є вектор функції $\{e^{\lambda_i x}U_i\}_{i=1}^2$, а її загальний розв'язок має вигляд

$$Y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}U_1+c_2e^{\lambda_2 x}U_2,$$

де $\{c_i\}_{i=1}^2$ є довільними сталими.

Приклад. Розв’яжемо систему

$$\begin{cases} y_1'(x) = -2y_1(x) + 2y_2(x), \\ y_2'(x) = 2y_1(x) + y_2(x). \end{cases}$$

Для матриці системи $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ розв’яжемо задачу на власні значення і власні вектори. Характеристичним рівнянням буде таке рівняння:

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

коренями якого є числа $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$. Їм відповідають власні вектори

$$U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тепер можна записати фундаментальну систему розв'язків вихідної лінійної системи

$$\left\{ e^{-3x}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

а також її загальний розв’язок

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1 e^{-3x}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

де $\{c_i\}_{i=1}^2$ є довільними сталими.

2. Корені характеристичного рівняння $\{\lambda_i\}_{i=1}^2$ є дійсними і однаковими. Такий випадок має місце, коли дискримінант характеристичного рівняння дорівнює нулю

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$$

і

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}.$$

При цьому ранг матриці $A - \lambda_1 I$ може дорівнювати або 0, або 1. Перший випадок є тривіальним, оскільки він відповідає діагональній матриці A ($a_{12} = a_{21} = 0,\ a_{11} = a_{22}$). Для неї система (3) розпадається на два окремих лінійних диференціальних рівняння першого порядку, які можна розв'язувати незалежно одне від одного. Розглянемо другий випадок. Для нього рядки матриці $A-\lambda_1 I$ є лінійно залежними, отже, алгебраїчна система $(A-\lambda_1 I)U=0$ звидиться до одного рівняння $(a_{11}-a_{22})u_1+2a_{12}u_2=0$, яке задає тільки один власний вектор

$$U_1=\begin{pmatrix} 2a_{12} \\ a_{22}-a_{11} \end{pmatrix}.$$

Очевидно одного розв'язку $Y_1(x)=e^{\lambda_1 x}U_1$ недостатньо для формування фундаментальної системи розв'язків. Доведемо, що ще одним розв'язком, лінійно незалежним з $Y_1(x)$ буде такий:

$$Y_2(x)=e^{\lambda_1 x}U_2, \tag{6}$$

де

$$(A-\lambda_1 I)U_2=U_1. \tag{7}$$

По перше, перевіримо умову сумісності системи (7). За теоремою Кронекера – Капелі треба перевірити рівність рангів матриці системи

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}-a_{22}}{2} & a_{12} \\ a_{21} & \dfrac{a_{22}-a_{11}}{2} \end{pmatrix}$$

і розширеної матриці

$$(A-\lambda_1 I\,|\,U_1)=\begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}-a_{22}}{2} & a_{12} & 2a_{12} \\ a_{21} & \dfrac{a_{22}-a_{11}}{2} & a_{22}-a_{11} \end{pmatrix}.$$

Це твердження випливає з того, що доданий останній стовпець у розширеній матриці є пропорційним з другим стовпцем цієї матриці.

Таким чином, система (7) має розв'язок U_2. Такий вектор називається приєднаним до власного вектора U_1.

Тепер покажемо, що вектори U_1, U_2 є лінійно незалежними. Складемо лінійну комбінацію векторів U_1, U_2 з деякими числами α_1, α_2 і прирівняємо її до нуля $\alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2=0$. Помножимо обидві частини цієї рівності зліва на матрицю $A-\lambda_1 I$

$$(A-\lambda_1 I)(\alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2)=0 \Rightarrow \alpha_1(A-\lambda_1 I)U_1+\alpha_2(A-\lambda_1 I)U_2=0.$$

Користуючись тим, що U_1 є власним вектором, а U_2 задовольняє (7), з останньої рівності отримаємо $\alpha_2 U_1=0$, звідки $\alpha_2=0$, оскільки власний вектор не може бути нульовим. Тоді $\alpha_1 U_1=0$ і знову $\alpha_1=0$. Отриманий результат означає, що вектори U_1, U_2 є лінійно незалежними. Тоді розв'язки

$$\{e^{\lambda_1 x}U_1, e^{\lambda_1 x}U_2\}$$

утворюють фундаментальну систему і загальний розв'язок лінійної системи (5) має вигляд

$$Y(x)=c_1 e^{\lambda_1 x}U_1+c_2 e^{\lambda_1 x}U_2,$$

де $\{c_i\}_{i=1}^{2}$ є довільними сталими.

Приклад. Розв’яжемо систему

$$\begin{cases} y_1'(x)=2y_1(x)-y_2(x), \\ y_2'(x)=y_1(x)+4y_2(x). \end{cases}$$

Для матриці системи $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ розв’яжемо задачу на власні значення і власні вектори. Характеристичним рівнянням буде таке рівняння:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda+9=0,$$

коренями якого є числа $\lambda_1=3, \lambda_2=3$. Їм відповідає тільки один власний вектори

$$U_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Приєднаним до вектора U_1 є вектор $U_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Отже, фундаментальною системою розв'язків вихідної системи є системи вектор-функцій

$$\left\{e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{3x}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

а її загальний розв’язок задається у вигляді

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Характеристичне рівняння має комплексний корінь $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Тоді у рівняння також є і комплексно спряжений корінь $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$. Такій парі власних значень матриці системи відповідає пара комплексних власних векторів U_1, U_2, причому $U_2 = \bar{U}_1$. Тоді фундаментальна система розв'язків вихідної диференціальної системи містить комплекснозначні вектор-функції

$$\{e^{(\alpha+i\beta)x} U_1, e^{(\alpha-i\beta)x} \bar{U}_1\}. \tag{8}$$

Користуючись властивістю 1 розв'язків лінійних однорідних систем (див. п. 3.1), замість функцій (8) можна записати розв’язки системи, які приймають тільки дійсні значення

$$\frac{1}{2}[e^{(\alpha+i\beta)x} U_1 + e^{(\alpha-i\beta)x} \bar{U}_1] \equiv \mathrm{Re}[e^{(\alpha+i\beta)x} U_1], \tag{9}$$

$$\frac{1}{2i}[e^{(\alpha+i\beta)x} U_1 - e^{(\alpha-i\beta)x} \bar{U}_1] \equiv \mathrm{Im}[e^{(\alpha+i\beta)x} U_1], \tag{10}$$

причому вони є лінійно незалежними. Щоб у цьому переконатися слід обчислити визначник Вронського системи вектор-функцій (9), (10). Він дорівнює

$$W(x) = e^{2\alpha x} \det\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix}, \tag{3.2.11}$$

де $U_{11} = \mathrm{Re}U_1$, $U_{12} = \mathrm{Im}U_1$. Визначник (3.2.11) відмінний від нуля, оскільки у протилежному випадку існувало б дійсне число $\mu : U_{11} = \mu U_{12}$. Це би означало, що $U_1 = (1 + i\mu)U_{11}$, тобто що дійсний вектор U_{11} також є власним вектором, який відповідає комплексному власному значенню $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, що неможливо.

Таким чином, дійсні вектор-функції (9), (10) утворюють фундаментальну систему розв'язків для системи (3) та її загальний розв'язок має вигляд

$$Y(x) = c_1 \mathrm{Re}[e^{(\alpha+i\beta)x} U_1] + c_2 \mathrm{Im}[e^{(\alpha+i\beta)x} U_1],$$

де $\{c_i\}_{i=1}^2$ є довільними сталими.

Приклад. Розв’яжемо систему

$$\begin{cases} y_1'(x) = -2y_1(x) - y_2(x), \\ y_2'(x) = y_1(x) - 2y_2(x). \end{cases}$$

Для матриці системи $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ розв’яжемо задачу на власні значення і власні вектори. Характеристичним рівнянням буде таке рівняння:

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0,$$

коренями якого є числа $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = -2 + i$, дорівнює

$$U_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді комплекснозначний розв'язок вихідної системи має вигляд

$$e^{(-2+i)x}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розділимо його дійсну і уявну частини

$$e^{(-2+i)x}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2x}(\cos x + i\sin x)\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= e^{-2x}\left[\cos x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + ie^{-2x}\left[\sin x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Таким чином, фундаментальну систему розв'язків складають вектор-функції

$$\left\{e^{-2x}\left[\cos x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right],\ e^{-2x}\left[\sin x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right\},$$

а загальний розв'язок вихідної системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1e^{-2x}\left[\cos x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + c_2e^{-2x}\left[\sin x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Лінійні неоднорідні системи

Розглянемо систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$Y'(x) = AY(x) + f(x). \tag{12}$$

Передусім зауважимо, що згідно з формулою (3.1.13) загальний розв'язок такої системи має структуру

$$\boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{Y}_0(x) + \boldsymbol{Y}_1(x), \tag{13}$$

де $\boldsymbol{Y}_0(x)$ – загальний розв'язок однорідної системи, $\boldsymbol{Y}_1(x)$ – частинний розв'язок неоднорідної системи. Як було показано вище, загальний розв'язок однорідної системи задається формулою (3.1.12). Частинний розв'язок неоднорідної системи виражається через матрицю Коші у вигляді інтеграла (3.1.17).

Опишемо інший підхід до побудови загального розв'язку системи (12), який називають методом варіації довільних сталих (порівняти з п. 2.4).

Нехай $\Phi(x)$ – деяка фундаментальна матриця відповідної однорідної системи. Загальний розв'язок однорідної системи має вигляд

$$\boldsymbol{Y}_0(x) = \Phi(x)\boldsymbol{C},$$

де $\boldsymbol{C}$ – стовпець довільних сталих. Тепер загальний розв'язок неоднорідної системи будемо шукати у вигляді

$$\boldsymbol{Y}(x) = \Phi(x)\boldsymbol{C}(x), \tag{14}$$

де $\boldsymbol{C}(x)$ – стовпець невідомих функцій. Підстановка вектор-функції (14) у систему (12) приводить до системи відносно $\boldsymbol{C}(x)$

$$\Phi(x)\boldsymbol{C}'(x) = \boldsymbol{f}(x) \Rightarrow \boldsymbol{C}'(x) = \Phi^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x) \Rightarrow \boldsymbol{C}(x) = \int \Phi^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)dx + \tilde{\boldsymbol{C}},$$

де $\tilde{\boldsymbol{C}}$ – стовпець довільних сталих. Підстановка $\boldsymbol{C}(x)$ у (3.2.14) остаточно дає

$$\boldsymbol{Y}(x) = \Phi(x)\int \Phi^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)dx + \Phi(x)\tilde{\boldsymbol{C}}. \tag{15}$$

Зауважимо, що інтегральна складова останньої формули тільки зовнішнім виглядом відрізняється від інтеграла (3.1.17).

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + \dfrac{1}{x} - \ln x + 2, \\ y_2' = y_2 - 2y_1 + 2\ln x - 1. \end{cases}$$

Матрицею системи є така матриця:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи для неї задачу на власні значення і власні вектори, одержимо

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3;\ \boldsymbol{U}_1 = (1\ \ 1)^T,\ \boldsymbol{U}_2 = (1\ \ -1)^T.$$

Тепер можна записати фундаментальну матрицю системи

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ e^{-x} & -e^{3x} \end{pmatrix}.$$

За формулою (3.2.15) маємо

$$Y(x)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ e^{-x} & -e^{3x} \end{pmatrix}\int e^{-2x}\begin{pmatrix} -e^{3x} & -e^{3x} \\ -e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{-1}-\ln x+2 \\ 2\ln x-1 \end{pmatrix}dx+$$

$$+\Phi(x)C=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ e^{-x} & -e^{3x} \end{pmatrix}\int e^{-2x}\begin{pmatrix} -e^{3x}(x^{-1}+\ln x+1) \\ e^{-x}(-x^{-1}+3\ln x-3) \end{pmatrix}dx+$$

$$+\Phi(x)C=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ e^{-x} & -e^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{x}(\ln x+1) \\ e^{-3x}(1-\ln x) \end{pmatrix}+\Phi(x)C=\begin{pmatrix} \ln x \\ 1 \end{pmatrix}+\Phi(x)C.$$

Контрольні питання до глави 3

1. Сформулюйте теорему існування та єдиності розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.
2. Які властивості мають розв'язки системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (СЛОДР) першого порядку?
3. Дайте означення лінійно залежної (незалежної) системи вектор-функцій на інтервалі.
4. Сформулюйте теорему про лінійно залежні (незалежні) розв'язки СЛОДР першого порядку.
5. Дайте означення фундаментальної системи розв'язків і фундаментальної матриці СЛОДР першого порядку.
6. Запишіть формулу Ліувілля – Остроградського для СЛОДР першого порядку.
7. Запишіть структуру загального розв'язку СЛОДР першого порядку.
8. Запишіть структуру загального розв'язку СЛНДР першого порядку.
9. Дайте означення матриці Коші, які властивості вона має?
10. Запишіть формулу Коші знаходження частинного розв'язку СЛНДР першого порядку.
11. У чому полягає метод Ейлера знаходження частинних розв'язків СЛОДР.

12. Сформулюйте алгоритм знаходження ФСР у випадку дійсних різних коренів характеристичного рівняння.
13. Сформулюйте алгоритм знаходження ФСР у випадку дійсних однакових коренів характеристичного рівняння.
14. Сформулюйте алгоритм знаходження ФСР у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння.
15. У чому полягає метод варіації довільних сталих при розв'язанні СЛОДР першого порядку.

Задачі до глави 3

1. Знайти загальні розв'язки систем:

а) $\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=3x+4y;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dot{x}=x-3y,\\ \dot{y}=3x+y;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\dot{x}=-3x+2y,\\ \dot{y}=-2x+y;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=-x+4y;\end{cases}$

д) $\begin{cases}\dot{x}=4x+y-e^{2t},\\ \dot{y}=-2x+y;\end{cases}$ е) $\begin{cases}\dot{x}=5x-3y+e^{3t},\\ \dot{y}=x+y+5e^{-t};\end{cases}$ ж) $\begin{cases}\dot{x}=x-y+2\sin t,\\ \dot{y}=2x-y.\end{cases}$

2. Розв'язати неоднорідні системи методом варіації довільних сталих:

а) $\begin{cases}\dot{x}=x-y+\dfrac{1}{\cos t},\\ \dot{y}=2x-y;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dot{x}=y+1,\\ \dot{y}=\operatorname{tg}t-x;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\dot{x}=-4x-2y+2(e^{t}-1)^{-1},\\ \dot{y}=6x+3y-3(e^{t}-1)^{-1}.\end{cases}$

3. Знайти розв'язки задач Коші:

а) $\begin{cases}\dot{x}=x+2y+4e^{t},\\ \dot{y}=2x+y-9t;\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-4,\\ y(0)=3,\end{cases}$ б)

$\begin{cases}\dot{x}=x+2y+4e^{t},\\ \dot{y}=2x+y-9t;\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-4,\\ y(0)=3,\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dot{x}=2x+y-3e^{4t},\\ \dot{y}=x+2y+2e^{t};\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-3,\\ y(0)=-1,\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dot{x}=x+2y,\\ \dot{y}=x-5\cos t;\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-1,\\ y(0)=3,\end{cases}$

д) $\begin{cases}\dot{x}=x-y+8t,\\ \dot{y}=5x-y;\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=1,\end{cases}$ е) $\begin{cases}\dot{x}=y-5\sin t,\\ \dot{y}=2x+y;\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Богданський, Ю. В. Диференціальні рівняння [Текст] : навч. посіб. / Ю. В. Богданський. – Київ : Політехніка, 2011. – 216 с.

Гаращенко, Ф. Г. Диференціальні рівняння для інформатиків [Текст] / Ф. Г. Гаращенко, В. Т. Матвієнко, І. І. Харченко. – Київ : ВПЦ «Київ. ун-т», 2008. – 352 с.

Гой, Т. П. Диференціальні рівняння [Текст] : навч. посіб. / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ: Сімик, 2012. – 352 с.

Гудименко, Ф. С. Збірник задач з диференціальних рівнянь [Текст] / Ф. С. Гудименко, І. А. Павлюк, В. О. Волкова. – Київ: Вища школа, 1972. – 152 с.

Копась, І. М. Диференціальні рівняння. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей [Текст] / І. М. Копась. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 126 с.

Кривошея, С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння. Підручник [Текст] / С. А. Кривошея, Н. О. Перестюк, В. М. Бурим. – Київ: Либідь, 2004. – 408 с.

Лавренюк, С. П. Курс диференціальних рівнянь [Текст] / С. П. Лавренюк. – Львів : ВНТЛ, 1997. – 216 с.

Лопатинский, Я. Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Я. Б. Лопатинский. – Киев : Вища школа, 1984. – 200 с.

Ніколаєв, О. Г. Диференціальні рівняння [Текст] : підручник. В 2 кн. Кн. 1 / О. Г. Ніколаєв. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2019. – 232 с.

Перестюк, М. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь [Текст] : навчальний посібник / М. О. Перестюк, М. Я. Свіщук. – Київ : Либідь, 1997. – 192 с.

Пріщенко, О. П. Диференціальні рівняння та їх застосування [Текст] : навч. посіб. / О. П. Пріщенко, Т. Т. Черногор. – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. – 88 с.

Самойленко, А. М. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах: [Текст] : навч. посіб. / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. О. Перестюк. – Київ : Вища школа, 1994. – 455 с.

Самойленко, А. М. Диференціальні рівняння [Текст] / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – Київ : Либідь, 2003. – 600 с.

Шкіль, М. І. Звичайні диференціальні рівняння [Текст] / М. І. Шкіль, М. А. Сотниченко. – Київ : Вища шк., 1992. – 303 с.

Ahmad, S. A Textbook on Ordinary Differential Equations [Text] / S. Ahmad, A. Ambrosetti. – Switzerland: Springer International Publishing, 2015. – 322 p.

Blanchard, P. Differential Equations [Text] / P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall. – USA, Belmont : Thomson Brooks / Cole, 2006. – 829 p.

Robinson, J. C. An Introduction to Ordinary Differential Equations [Text] / J. C. Robinson. – Cambridge : University Press, 2004. – 400 c.

Ross, S. L. Differential Equations [Text] / S. L. Ross. – UK: JOHN WILEY & SONS INC., 2004. – 808 p.

Tenenbaum, M. Ordinary Differential Equations. An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences [Text] / M. Tenenbaum, H. Pollard. – New York: DOVER PUBLICATIONS, INC., 1985. – 808 p.

ЗМІСТ

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
до розділу «ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Навчально методичний посібник
для здобувачів вищої освіти
першого (бакалаврського) рівня спеціальностей:
131»Прикладна механіка»
014 «Середня освіта (Природничі науки)»

Укладачі:

Ніколаєв О.Г.
Лазар В.Ф.

Тираж 10 пр.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої
продукції ДК № 6984 від 20.11.2019 р.

Редакційно-видавничий відділ
МДУ, 89600, м. Мукачево, вул.
Ужгородська, 26

МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26
тел./факс +380-3131-21109
Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua
E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua
Веб-сайт Інституційного репозитарію Наукової бібліотеки МДУ: http://dspace.msu.edu.ua:8080
Веб-сайт Наукової бібліотеки МДУ: http://msu.edu.ua/library/