УДК 539.3(045)

ОБЧИСЛЕННЯ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛІВ, НЕОБХІДНИХ ДЛЯ ДІАГНОСТИКИ ВОДЕНЬВМІСНИХ МАТЕРІАЛІВ

Стащук М. Г., Пукач П. Я., Лазар В. Ф., Стащук Н. М.

CALCULATION OF SINGULAR INTEGRALS NECESSARY FOR DIAGNOSIS OF HYDROGEN MATERIALS

Stashchuk Mykola, Pukach Peter, Lazar Vasyl, Stashchuk Nazar

У роботі запропоновано ефективні способи обчислення сингулярних інтегралів типу Коші. Перший спосіб полягає у використанні стандартних чисельних методів для обчислення цих інтегралів з обходом особливості у них. Другий спосіб полягає у заміні функції $\varphi(\zeta)$ відрізком ряду Тейлора. Наведено методику обчислення відповідних сингулярних інтегралів. Для натуральних степенів ξ отримано точні формули.

Ключові слова: *Сингулярний інтеграл; теорія функцій комплексної змінної; тріщини; рекурентні співвідношення; похибка обчислень; діагностика, воденьвмісні матеріали.*

The paper deals with a effective methods of calculation of singular Cauchy type integrals. The first method consists in the use of standard numeral methods for the calculation of these integrals with the round of feature at them. The second method consists in replacement of function $\varphi(\zeta)$ by the segment of Tailor row. The method of calculation of the proper singular integrals is resulted. For natural degrees of ξ exact formulas are got.

Key words*: Singular integral; theory of functions of a complex variable; cracks; recurrent ratios; calculation error; diagnostics, hydrogen-containing materials.*

Для діагностики працездатності деталей машин та конструкцій першочерговою задачею є встановлення їх дефектності типу тріщин, порожнин, раковин, заглиблень і т.п. [1 - 2]. Дефекти такого типу, як правило, є осередками наводнення матеріалів [3], створюють концентрацію напружень, яка розраховується засобами теорії функцій комплексної змінної та сингулярних інтегральних рівнянь. Вивченню сингулярного інтеграла в математиці присвячена значна частина окремих публікацій та окремих монографій [4-9], в яких розглядаються та обчислюються такі інтеграли, а також демонструється ефективність їх практичного застосування. Однак, обчислення вказаних інтегралів завжди є трудомістким, а тому потребує подальшого вдосконалення й розробки нових, більш ефективних, методів їх обчислення. У зв’язку із цим, у даному повідомленні саме й зроблена спроба обчислення згаданих інтегралів з допомогою нового та ефективного підходу, який грунтується на використанні узагальненої функції типу Гріна [10].

Найбільш поширеним прикладом сингулярного інтеграла є інтеграл вигляду

$$I(x)=\int_{-l}^{l}\frac{\varphi(\xi)\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi-x}d\xi . \qquad (1)$$

Такий інтеграл має важливе значення в описі процесів руйнування матеріалів шляхом поширення тріщиноподібних порожнин [1-3,5,7,10,11]. Але, як правило, його обчислюють спеціальними методами.

Розглянемо спочатку сингулярний інтеграл (1) при $\varphi(\xi)=1$, тобто інтеграл

$$I_0(x)=\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi-x}d\xi . \qquad (2)$$

Спосіб обчислення цього інтеграла відомий [1, 2]. Вигляд його функціональної залежності від x є таким:

$$I_0(x)=\begin{cases} -\pi x, & |x|<l \\ \pi\left(\sqrt{x^2-l^2}-x\right), & |x|>l \end{cases}, \quad (3)$$

Обчислимо тепер сингулярні інтеграли вигляду

$$I_n(x)=\int_{-l}^{l}\frac{\xi^n\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi-x}d\xi,\ (n\in N), \quad (4)$$

виразивши їх значення через відоме значення (3) та комбінацію степеневих функцій. Для цього подаємо $I_n(x)$ так:

$$I_n(x)=\int_{-l}^{l}\frac{\xi^n\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi-x}d\xi=\int_{-l}^{l}\frac{\left(\xi^n-x^n\right)\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi-x}d\xi+x^n\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi-x}d\xi=$$

$$\int_{-l}^{l}\left(\xi^{n-1}+x\xi^{n-2}+\ldots+x^{n-1}\right)\sqrt{l^2-\xi^2}d\xi+x^nI_0(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k\int_{-l}^{l}\xi^{n-k-1}\sqrt{l^2-\xi^2}d\xi+x^nI_0(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}x^{n-k-1}G_k+x^nI_0(x). \quad (5)$$

Тут

$$G_n=\int_{-l}^{l}\xi^n\sqrt{l^2-\xi^2}d\xi. \quad (6)$$

Опишемо процес обчислення інтегралів (6). Очевидно, що $G_1=G_3=\ldots=G_{2k-1}=0$ при $k\in N$. Це випливає з того, що при непарних n підінтегральна функція непарна, а інтеграл від непарної функції в симетричних межах інтегрування рівний нулю.

Обчислимо тепер G_{2n}, де $n=0,1,2,\ldots$. Очевидно, що

$$G_0=\int_{-l}^{l}\sqrt{l^2-\xi^2}d\xi=\frac{1}{2}\pi l^2, \quad (7)$$

як площа півкруга радіуса l. Наступні інтеграли обчислимо за допомогою інтегрування частинами.

$$G_{2n}=\int_{-l}^{l}\xi^{2n}\sqrt{l^2-\xi^2}d\xi=\int_{-l}^{l}\xi^{2n-1}\xi\sqrt{l^2-\xi^2}d\xi=$$

$$-\frac{1}{3}\xi^{2n-1}\left(l^2-\xi^2\right)^{3/2}\Big|_{\xi=-l}^{\xi=l}+\frac{2n-1}{3}\int_{-l}^{l}\xi^{2n-2}\left(l^2-\xi^2\right)^{3/2}d\xi=\frac{2n-1}{3}l^2\int_{-l}^{l}\xi^{2n-2}\sqrt{l^2-\xi^2}d\xi-$$

$$-\frac{2n-1}{3}\int_{-l}^{l}\xi^{2n}\sqrt{l^2-\xi^2}d\xi=\frac{2n-1}{3}l^2G_{2n-2}-\frac{2n-1}{3}G_{2n}.$$

Звідси

$$G_{2n}=\frac{2n-1}{2n+2}l^2G_{2n-2}. \qquad (8)$$

Формула (8) дає зручні рекурентні співвідношення для обчислення G_{2n}, що дуже зручно для обчислення на комп'ютері. Наприклад,

$$G_2=\frac{2-1}{2+2}l^2G_0=\frac{1}{4}l^2G_0=\frac{1}{4}l^2\frac{1}{2}\pi l^2=\frac{1}{8}\pi l^4. \qquad (9)$$

$$G_4=\frac{4-1}{4+2}l^2G_2=\frac{4-1}{4+2}\frac{2-1}{2+2}l^4G_0=\frac{3\cdot 1}{6\cdot 4}\cdot\frac{1}{2}\pi l^6=\frac{1}{16}\pi l^6. \qquad (10)$$

Взагалі

$$G_{2n}=\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1}{(2n+2)\cdot 2n\cdot\ldots\cdot 4}\cdot\frac{1}{2}\pi l^{2n+2},\ n\in N, \qquad (11)$$

Підставляючи у формулу (5) вирази (8) і враховуючи, що для непарних n $G_n=0$, отримуємо вирази для $I_n(x)$. Ось деякі приклади:

$$I_1(x)=\int_{-l}^{l}\frac{\xi\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi-x}d\xi=G_0+xI_0(x)=0{,}5\pi l^2+xI_0(x)=$$
$$=\begin{cases}0{,}5\pi\left(l^2-2x^2\right), & |x|<l\\ 0{,}5\pi\left(2x\sqrt{x^2-l^2}+l^2-2x^2\right), & |x|>l\end{cases}, \qquad (12)$$

$$I_2(x)=\int_{-l}^{l}\frac{\xi^2\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi-x}d\xi=G_1+G_0x+x^2I_0(x)=$$
$$=0{,}5\pi l^2x+x^2I_0(x)=\begin{cases}0{,}5\pi x\left(l^2-2x^2\right), & |x|<l\\ 0{,}5\pi x\left(2x\sqrt{x^2-l^2}+l^2-2x^2\right), & |x|>l\end{cases}. \qquad (13)$$

$$I_3(x)=\int_{-l}^{l}\frac{\xi^3\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi-x}d\xi=G_2+G_1x+G_0x^2+x^3I_0(x)=$$
$$=0{,}125\pi l^4+0{,}5\pi l^2x^2+x^3I_0(x)= \qquad (14)$$
$$=\begin{cases}0{,}125\pi l^4+0{,}5\pi x^2\left(l^2-2x^2\right), & |x|<l\\ 0{,}125\pi l^4+0{,}5\pi x^2\left(2x\sqrt{x^2-l^2}+l^2-2x^2\right), & |x|>l.\end{cases}$$

Аналізуючи формули (12) – (14), можна зауважити, що для $I_n(x)$ виконуються такі рекурентні співвідношення:

$$I_1(x)=G_0+xI_0(x),$$
$$I_2(x)=G_1+G_0x+x^2I_0(x)=G_1+xI_1(x), \qquad (15)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_n(x)=G_{n-1}+G_{n-2}x+\ldots+G_0x^{n-1}+x^nI_0(x)=G_{n-1}+xI_{n-1}(x).$$

Ми показали, що аналогічно можна обчислити також інтеграли, у яких як функцію $\varphi(\xi)$ взяти й інші степені змінної ξ. Для цього дуже зручні співвідношення (8) та (15). Оскільки формули (15) мають рекурентний вигляд, то обчислення інтеграла виду (5) є дуже швидким. Це дає можливість швидко і точно обчислювати такі інтеграли за допомогою комп'ютера. При цьому не виникає проблема сингулярністі, бо значення $I_0(x)$ для скінченних значень x відоме і теж скінченне, а більше особливостей ніяких немає. Зауважимо також, що на похибку обчислення інтеграла (5) буде мати вплив тільки похибка, з якою подається значення x та проміжні результати при записі у розрядну сітку комп'ютера (похибка квантування). Такі ж значення цих інтегралів одержуються й на основі методів, запропонованих в роботах [2,6,10].

У випадку інших функцій, наприклад тригонометричних, гіперболічних і т.п., можна піти двома шляхами: або обчислювати інтеграл (1) наближеними методами (методом лівих або правих прямокутників, трапецій, Сімпсона, тощо), або подавши підінтегральну функцію як відрізок ряду Тейлора (фактично як суму степенів змінної ξ, інтеграл від яких можна обчислити точно, використовуючи співвідношення (15)). Ці два шляхи мають певні недоліки. Перший метод потребує при $|x| \le l$ обходу і спеціального наближення у випадку, коли $\xi = x$, але його добре застосовувати й у випадку $|x| > l$. Другий метод не має цього недоліку, але вимагає знання коефіцієнтів ряду Тейлора для функції $\varphi(\xi)$, тобто фактично знаходження першої похідної та похідних вищих порядків в нулі даної функції. Відомо, що чим вищий порядок похідної, тим більше впливають похибки заокруглення на точність її визначення, тобто метод отримання похідних високих порядків у певній точці нестійкий. На практиці це означає, що з задовільною точністю можна знайти лише похідні низьких порядків, наприклад, до четвертого. Крім того, розклад функції в ряд Тейлора дає добре наближення лише для малих значень довжини проміжку інтегрування l. При великих l треба брати більше членів ряду Тейлора, що при низькій точності знаходження похідних високих порядків може дати високу похибку обчислення інтеграла (1). Але для не дуже великих l цей метод дає добрий результат при незначних обчислювальних затратах. А знання коефіцієнтів ряду Тейлора для деяких функцій (синус, косинус, експонента тощо) дає можливість із задовільною точністю використовувати цей спосіб і при великих l, бо при цьому не потрібно обчислювати похідних високих порядків.

Розглянемо перший спосіб обчислення інтеграла (1). При $|x| \le l$ подаємо його так:

$$I(x) = \int_{-l}^{l} \frac{\varphi(\xi)\sqrt{l^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi = \int_{-l}^{l} \frac{(\varphi(\xi) - \varphi(x))\sqrt{l^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi +$$

$$+ \varphi(x)\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi \approx \int_{-l}^{x-\delta} \frac{(\varphi(\xi) - \varphi(x))\sqrt{l^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi + \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{(\varphi(\xi) - \varphi(x))\sqrt{l^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi +$$

$$+ \int_{x+\delta}^{l} \frac{(\varphi(\xi) - \varphi(x))\sqrt{l^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi + \varphi(x) I_0(x) \approx \int_{-l}^{x-\delta} \frac{(\varphi(\xi) - \varphi(x))\sqrt{l^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi +$$

$$2\delta\varphi'(x)\sqrt{l^2 - x^2} + \int_{x+\delta}^{l} \frac{(\varphi(\xi) - \varphi(x))\sqrt{l^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi + \varphi(x) I_0(x).$$

При $-l \le \xi \le x - \delta$ і $x - \delta \le \xi \le l$ інтеграл (1) можна обчислити стандартними наближеними методами з довільною точністю, а при $|\xi - x| < \delta$ його можна наблизити виразом $2\delta\varphi'(x)\sqrt{l^2 - x^2}$. Таке наближення тим точніше, чим менше δ. Воно позбавляє необхідності обчислення величини $|\xi - x|^{-1}$ при $\xi \approx x$.

При $|x| > l$ інтеграл (1) можна обчислити наближено стандартними методами, оскільки ситуації $\xi \approx x$ там уже немає і, отже, особливості в такому інтегралі немає.

У другому методі можна оцінити похибку обчислень, що можна продемонструвати на наступному прикладі.

Нехай $I(x) = \int\limits_{-l}^{l} \frac{\sin\xi\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi - x}d\xi$. Відомо, що $\sin\xi = \xi - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^5}{120} - \ldots$. Тоді

$$I_9(x) = \int\limits_{-l}^{l} \frac{\sin\xi\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi - x}d\xi = \int\limits_{-l}^{l} \frac{\left(\xi - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^5}{120} - \ldots\right)\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi - x}d\xi =$$

$$= I_1(x) - \frac{I_3(x)}{6} + \frac{I_5(x)}{120} - \frac{I_7(x)}{5040} + \frac{\sin^{(9)}(\theta x)}{(2n+1)!}I_{2n+1}(x),\ 0 < \theta < 1.$$

$$|I(x) - I_9(x)| \le \frac{M_9}{9!}\left|\int\limits_{-l}^{l} \frac{\xi^9\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi - x}d\xi\right| \le \frac{M_9 l^{10}}{9!}|I_0(x)| \le 0{,}00002(\max(|x|, l))^{11},$$

Тут позначено $M_9 = \max\left|\sin^{(9)}(\xi)\right| = 1,\ 0 < \xi < |x|$. Наприклад, при $l = 1, -2 \le x \le 2$ маємо $|I(x) - I_9(x)| < 0{,}05$.

Наведемо приклади, які демонструють програмну реалізацію першого та другого підходів до наближеного обчислення сингулярного інтеграла (1) у випадку функції $\varphi(\xi) = \sin\xi$. У ряді Тейлора для цієї функції взято 7 членів. Результати виконання програм для різних значень l та x наведено на рис. 1, 2.

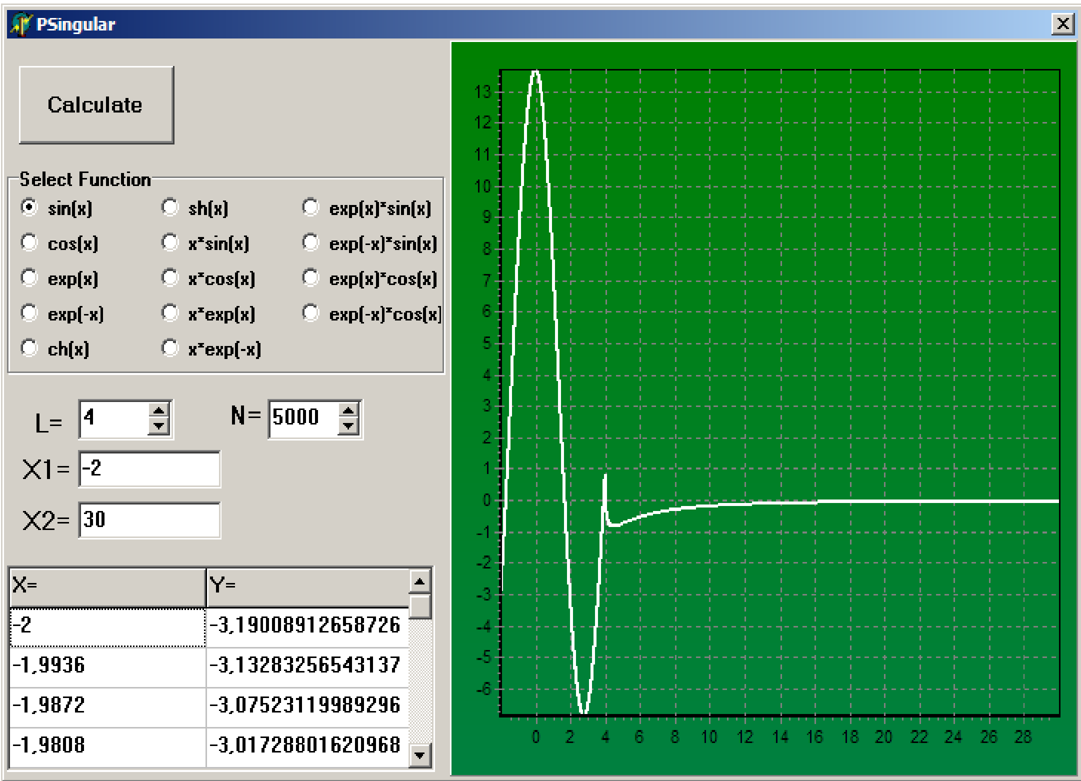

Рис. 1. Значення сингулярного інтеграла, обчисленого методом лівих прямокутників, для x1=-2, x2=30, l=4

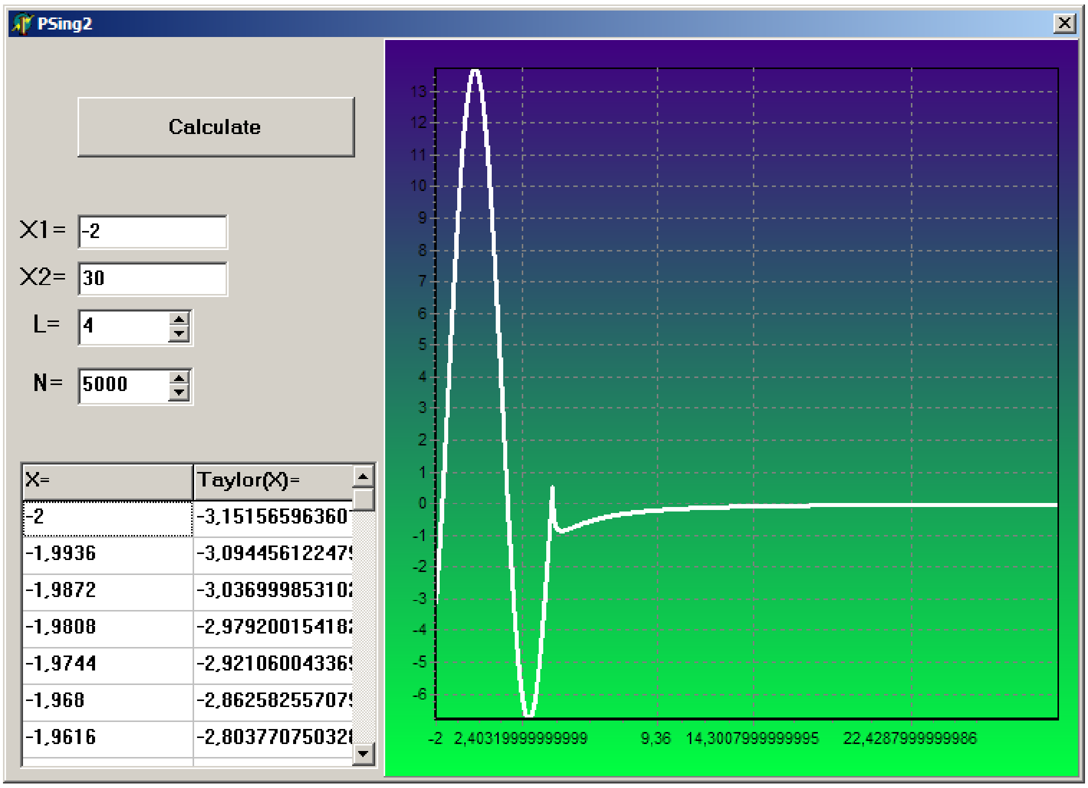

Рис. 2. Значення сингулярного інтеграла, обчисленого методом розкладу в ряд Тейлора, для x1=-2, x2=30, l=4

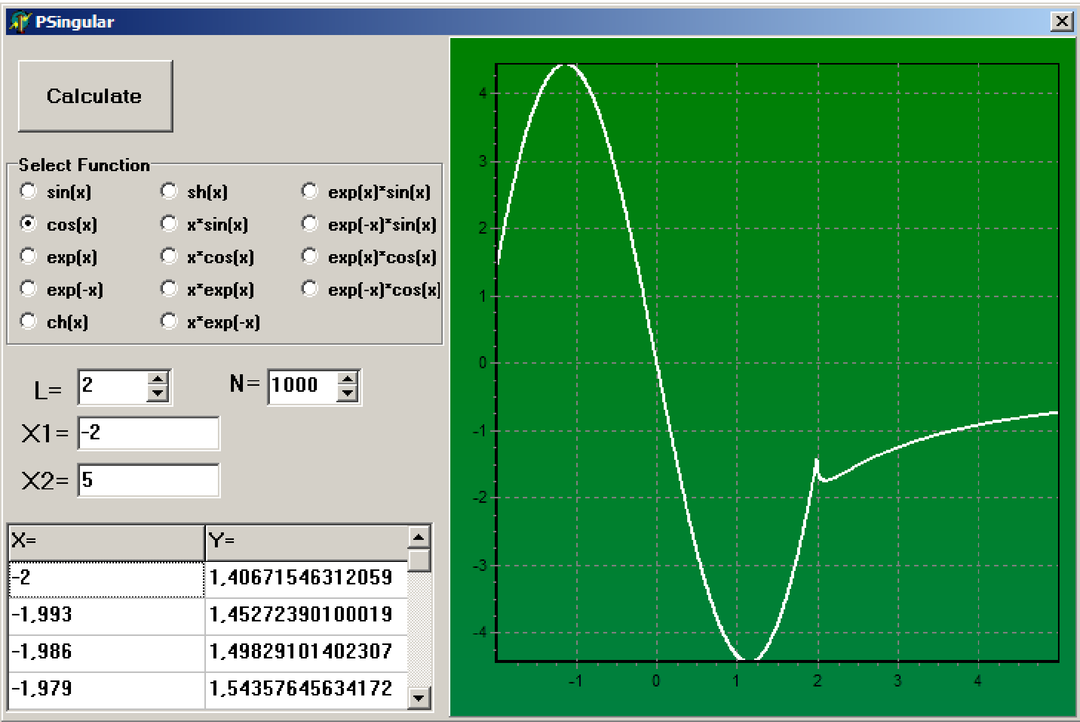

Рис. 3. Значення сингулярного інтеграла, обчисленого методом лівих прямокутників, для x1=-2, x2=5, l=2

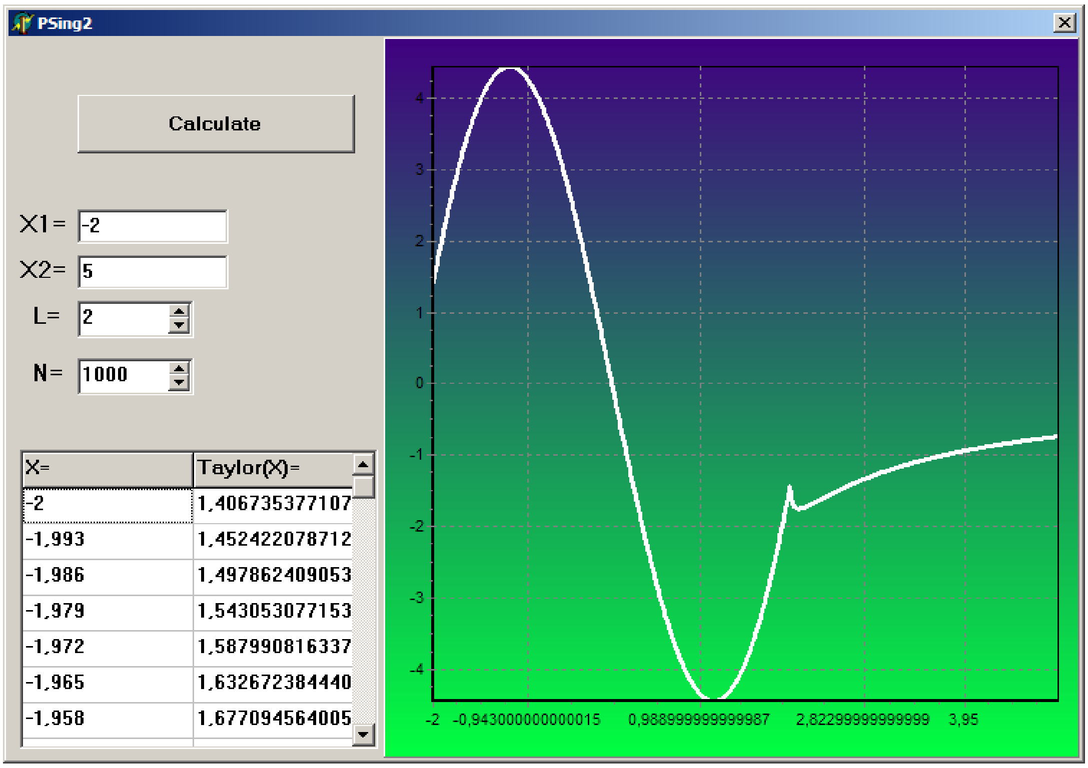

Рис. 4. Значення сингулярного інтеграла, обчисленого методом розкладу в ряд Тейлора, для x1=-2, x2=5, l=2

Як бачимо, значення інтеграла (1) для функції $\varphi(\xi)=\sin\xi$, обчислені методом лівих прямокутників та методом розкладу даної функції, досить близькі, що демонструється відповідними графіками на рис. 1 та 2. Якщо у розкладі функції $\varphi(\xi)$ у ряд Тейлора взяти більшу кількість членів, то точність обчислень буде ще вищою при незначному збільшенні часу виконання програми. Проводились також дослідження для функції $\varphi(\xi)=\cos\xi$, і вони дали такі самі результати щодо близькості значень сингулярних інтегралів, взятих методом лівих прямокутників та методом розкладу в ряд Тейлора. Це демонструють графіки і числові дані, наведені на рис. 3, 4. Але позитивна сторона такого порівняння в тому, що при $|x|\le l$, тобто у випадку, коли у інтегралі (1) виникає особливість, обидва методи дали дуже близькі результати. У такому випадку, при $|x|\le l$ краще застосовувати метод розкладу у ряд Тейлора, бо, як було видно з порівняння часу роботи програм, цей метод набагато швидший. Проте метод лівих прямокутників, хоча й менш швидкодіючий при обчисленні інтегралів виду (1), є більш універсальним, бо не завжди можна з задовільною точністю визначити коефіцієнти ряду Тейлора функції $\varphi(\xi)$.

Такі прості підходи, особливо перший, дуже зручні при обчисленні інтегралів типу Коші в інженерних розрахунках міцності матеріалів з позиції механіки руйнування та інших технічних задачах, де такі інтеграли можуть застосовуватися. Зокрема, до таких задач відносяться задачі контролю якості функціонально градієнтних матеріалів [11] та діагностики пошкоджень в них.

Список використаних джерел

1. Бережницкий Л. Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле / Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
2. Стащук Н. Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами / Н. Г. Стащук. – К.: Наук. думка, 1993. – 358 с.

3. Stashchuk M. H. Determination of the Distribution of Hydrogen Near Cracklike Defects / M. H. Stashchuk // Materials Science. – 2017. – Vol. 52, № 6. – P. 803–810.
4. Интегральные уравнения / П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский и др. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1966. – 707 с.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Физматгиз, 1962. – 511 с.
7. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
8. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши / Г. Н. Пыхтеев. – Новосибирск: Наука, 1980. – 118 с.
9. Пыхтеев Г. Н. Приближенные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида / Г. Н. Пыхтеев. – Новосибирск: Наука, 1982. – 128 с.
10. Стащук М. Г. До обчислення деяких інтегралів з особливістю типу Коші, необхідних в механіці руйнування матеріалів / М. Г. Стащук, Р. В. Коваленко, А. М. Стащук // Праці наукового Товариства ім. Шевченка. Львів, 2001. – Т. YII. Матеріалознавство і механіка матеріалів. – С. 59–68.
11. Stashchuk M. H. Thermal Stressed States of the Bodies of Revolution made of Functionally Graded Materials / M. H. Stashchuk, E. M. Irza // Materials Science. – 2019. – Vol. 55. – P. 311–319.

References

1. Berezhnitskiy, L.T., Panasyuk, V.V., and N.G. Stashchuk. 1983. *Vzaymodeystvye zhestkykh lyneynykh vklyuchenyy y treshchyn v deformyruemom tele [Interaction of rigid linear inclusions and cracks in a deformable body]*. Kyiv: Nauk. dumka.
2. Stashchuk, N.G. 1993. *Zadachy mekhanyky upruhykh tel s treshchynopodobnыmy defektamy [Problems of the mechanics of elastic bodies with crack-like defects]*. Kyiv: Nauk. dumka.
3. Stashchuk, M.H. 2017. “Zadachy mekhanyky upruhykh tel s treshchynopodobnymy defektamy [Determination of the Distribution of Hydrogen Near Cracklike Defects].” *Materials Science* 52, 6: 803–810.
4. Zabreiko, P. P., Koshelev, A. I., Krasnoselsky, M. A. and others. 1968. *Yntehral'nye uravnenyya [Integral equations]*. Moscow: Nauka.
5. Muskhelishvili, N. I. 1966. *Nekotorye osnovnye zadachy matematycheskoy teoryy upruhosty [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]*. Moscow: Nauka.
6. Muskhelishvili, N. I. 1962. *Synhulyarnye yntehral'nye uravnenyya [Singular integral equations]*. Moscow: Fizmatgiz.
7. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P., and A. P. Datsyshin. 1976. *Raspredelenye napryazhenyy okolo treshchyn v plastynakh y obolochkakh [Stress distribution around cracks in plates and shells]*. Kyiv: Nauk. Dumka.
8. Pykhteev, G. N. 1980. *Tochnye metody vychyslenyya yntehralov typa Koshy [Exact methods for calculating integrals of Cauchy type]*. Novosibirsk: Science.
9. Pykhteev, G. N. 1982. *Pryblyzhennye metody vychyslenyya yntehralov typa Koshy spetsyal'noho vyda [Approximate methods for calculating Cauchy-type integrals of a special form]*. Novosibirsk: Science.
10. Stashchuk, M. G., Kovalenko, R. V., and A. M. Stashchuk. 2001. “Do obchyslennya deyakykh intehraliv z osoblyvistyu typu Koshi, neobkhidnykh v mekhanitsi ruynuvannya materialiv [Before calculating some integrals with a Cauchy-type feature required in the mechanics of destruction of materials].” *Proceedings of the Scientific Society Shevchenko* YII: 59–68.
11. Stashchuk, M. H., and E. M. Irza. 2019. Thermal Stressed States of the Bodies of Revolution made of Functionally Graded Materials. *Materials Science* 55: 311–319.

МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26
тел./факс +380-3131-21109
Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua
E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua
Веб-сайт Інституційного репозитарію Наукової бібліотеки МДУ: http://dspace.msu.edu.ua:8080
Веб-сайт Наукової бібліотеки МДУ: http://msu.edu.ua/library/