

ВЛАСТИВОСТІ ОБЕРНЕНИХ ПОХІДНИХ

New properties of reciprocal derivatives are established.

Установлены новые свойства обратных производных.

1. Вступ. Розвинення функцій у ланцюговий дріб належить до важливих задач теорії наближення разом із наближеннями степеневими рядами, ортогональними многочленами, апроксимаціями Паде і т. п. оскільки такі розвинення можна використовувати для обчислення значень функцій на комп'ютері [1, 2]. Розвинення функцій у ланцюговий дріб отримують із розвинення функції у степеневий ряд шляхом побудови відповідного даному степеневому ряду правильного ланцюгового C -дробу [3–6]. Можна також отримати розвинення функції в ланцюговий дріб, якщо скористатися формулою Тіле [7, 8]. У роботі [9] встановлено еквівалентність цих двох способів розвинення функцій у правильний ланцюговий C -дріб.

У 1909 р. Т. Н. Тіле у роботі [7] увів до розгляду обернені поділені різниці, за допомогою яких визначив обернені похідні для функції однієї дійсної змінної й отримав аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів. Властивості обернених різниць та обернених похідних наведено в [7, 8, 10].

У даній роботі ми встановимо деякі нові властивості обернених похідних.

2. Інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле. Нехай функцію $f(x) \in C([\alpha, \beta])$ задано значеннями в точках множини

$$\Lambda = \{x_i: x_i \in [\alpha, \beta], i = 0, 1, \dots, n, x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\},$$

і $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$.

За значеннями функції в точках множини Λ побудуємо інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле (ІЛДТ) [7]

$$D_n(x) = b_0 + \frac{x - x_0}{b_1} + \frac{x - x_1}{b_2} + \dots + \frac{x - x_{n-1}}{b_n} = b_0 + \prod_{k=1}^n \frac{x - x_{k-1}}{b_k}. \quad (1)$$

Коефіцієнти $b_k, k = 0, 1, \dots, n$, ІЛДТ (1) можна визначити з умови $y_k = D_n(x_k)$ за допомогою одного з двох еквівалентних методів:

а) обчислити послідовність обернених поділених різниць $\Phi_k[x_0, \dots, x_k; f(x)], k = 0, \dots, n$, за формулою [10, 11]

$$\begin{aligned} \Phi_k[x_0, \dots, x_k; f(x)] &= \\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k; f(x)] - \Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}; f(x)]}, \end{aligned}$$

де $\Phi_0[x; f(x)] = f(x)$, а тоді $b_k = \Phi_k[x_0, \dots, x_k; f(x)], k = 0, 1, \dots, n$;

б) використати рекурентну формулу [12]

$$b_0 = y_0, \quad b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}} + \dots + \frac{x_k - x_1}{-b_1} + \frac{x_k - x_0}{y_k - b_0}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Обернена поділена різниця $\Phi_k[x_0, \dots, x_k; f(x)]$ є симетричною функцією лише двох останніх своїх аргументів, x_{k-1}, x_k . Водночас, як показано в [10, 11], лінійна комбінація обернених поділених різниць

$$\rho_k[x_0, \dots, x_k; f(x)] = \Phi_k[x_0, \dots, x_k; f(x)] + \Phi_{k-2}[x_0, \dots, x_{k-2}; f(x)] + \dots + \Phi_{k-2[k/2]}[x_0, x_{k-2[k/2]}; f(x)],$$

яка називається оберненою різницею k -го порядку, симетрична відносно всіх своїх $k + 1$ аргументу.

Якщо в оберненій різниці k -го порядку перейти до границі при $x_0, x_1, \dots, x_k \rightarrow x$, то отримаємо обернену похідну k -го порядку [7], яку позначають через ${}^{(n)}f(x)$. Отже,

$${}^{(n)}f(x) = \lim_{x_0, x_1, \dots, x_n \rightarrow x} \rho_n[x_0, x_1, \dots, x_n; f(x)], \quad n = 1, 2, \dots,$$

і, зокрема,

$${}^1f(x) = \lim_{x_1, x_2 \rightarrow x} \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{1}{f'(x)}. \tag{2}$$

Для обчислення обернених похідних вищих порядків використовують рекурентні співвідношення

$${}^{(0)}f(x) = f(x), \quad {}^1f(x) = \frac{1}{f'(x)}, \tag{3}$$

$${}^{(k)}f(x) = k \cdot {}^{(k-1)}f(x) + {}^{(k-2)}f(x), \quad k = 2, 3, \dots$$

Зауваження 1. Із (3) випливає, що ${}^{(k)}f(x) \neq {}^{(k-1)}f(x)$ і

$${}^{(k-1)}f(x) = \frac{{}^{(k)}f(x) - {}^{(k-2)}f(x)}{k} \quad \text{при } k = 2, 3, \dots$$

Якщо припустити, що існують обернені похідні функції $f(x)$ в околі точки x_* до n -го порядку включно, то отримаємо формулу Тіле [7, 8]

$$f(x) \approx f(x_*) + \frac{x - x_*}{{}^1f(x_*)} + \frac{x - x_*}{2 \cdot {}^2f(x_*)} + \frac{x - x_*}{3 \cdot {}^3f(x_*)} + \dots + \frac{x - x_*}{n \cdot {}^{(n-1)}f(x_*)}.$$

3. Властивості обернених похідних. Нехай функція $f(x)$ у кожній точці відрізка $[\alpha, \beta]$ має похідні (скінченне значення, $+\infty$ чи $-\infty$) до n -го порядку, $n \geq 1$.

Твердження 1. 1. Нехай у деякій точці $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x_0) = 0$. Тоді ${}^1f(x_0) = +\infty$, якщо функція $f(x)$ монотонно зростає в деякому околі точки x_0 , і ${}^1f(x_0) = -\infty$, якщо функція $f(x)$ монотонно спадає в деякому околі точки x_0 .

2. Нехай у деякій точці $x_0 \in (\alpha, \beta)$ $f'(x_0) = \pm\infty$, тоді ${}^1f(x_0) = 0$.

Твердження 1 безпосередньо випливає із (2) та властивостей похідних [13, 14].

Зауваження 2. За аналогією із „звичайними” похідними для обернених похідних можна означити обернену ліву похідну ${}^1f_-(x)$, обернену праву похідну ${}^1f_+(x)$ та аналог похідних чисел [15].

Із твердження 1 та (3) безпосередньо випливає наступне твердження.

Твердження 2. Нехай у деякій точці $x_0 \in (\alpha, \beta)$ має місце $^{(n-2)}f(x_0) = C$, де $C = \text{const}$, $C \neq 0$, $|C| < \infty$. Тоді: 1) якщо $^{(n-1)}f(x_0) = 0$, то $^{(n)}f(x_0) = +\infty$, якщо в деякому околі точки x_0 обернена похідна $^{(n-1)}f(x)$ монотонно зростає, і $^{(n)}f(x_0) = -\infty$, якщо обернена похідна $^{(n-1)}f(x)$ монотонно спадає в деякому околі точки x_0 ; 2) якщо $^{(n-1)}f(x_0) = \pm\infty$, то $^{(n)}f(x_0) = 0$.

Твердження 3. Нехай існують обернені похідні функцій $u = f(x)$ та $v = g(x)$. Тоді обернені похідні суми, різниці, добутку та частки цих функцій визначаються за формулами

$$\backslash(u \pm v) = \frac{\backslash u \backslash v}{\backslash v \pm \backslash u}, \quad (4)$$

$$\backslash(uv) = \frac{\backslash u \backslash v}{\backslash u u + \backslash v v}, \quad (5)$$

$$\backslash(u/v) = \frac{v^2 \backslash u \backslash v}{\backslash v v - \backslash u u}. \quad (6)$$

Зауваження 3. Існування обернених похідних функцій $u = f(x)$ та $v = g(x)$ гарантує існування обернених похідних їх суми, різниці, добутку та частки тільки в тому випадку, коли ці похідні скінченні та відмінні від нуля.

Припустимо, що праві частини в (4)–(6) визначено.

Доведення. Із (2) маємо

$$\backslash(u \pm v) = \frac{1}{(u \pm v)'} = \frac{1}{u' \pm v'} = \frac{1}{1/\backslash u \pm 1/\backslash v} = \frac{\backslash v \backslash u}{\backslash v \pm \backslash u}.$$

Міркуючи аналогічно, у випадку добутку функцій отримуємо

$$\backslash(uv) = \frac{1}{(uv)'} = \frac{1}{u'v + uv'} = \frac{1}{v/\backslash u + u/\backslash v} = \frac{\backslash v \backslash u}{\backslash v v + \backslash u u}.$$

У випадку частки функцій u і v маємо

$$\backslash(u/v) = \frac{1}{(u/v)'} = \frac{v^2}{u'v - uv'} = \frac{v^2}{v/\backslash u - u/\backslash v} = \frac{v^2 \backslash v \backslash u}{\backslash v v - \backslash u u}.$$

Твердження 4. Для всіх $n = 0, 1, 2, \dots$

$$^{(2n)}(Cf(x)) = C^{(2n)}f(x), \quad ^{(2n+1)}(Cf(x)) = \frac{1}{C}^{(2n+1)}f(x), \quad C = \text{const}.$$

Доведення. Скористаємося методом повної математичної індукції. При $n = 0, 1$

$$\backslash(Cf(x)) = \frac{1}{C} \backslash f(x),$$

$$\backslash\backslash(Cf(x)) = 2 \backslash\backslash(Cf(x)) + Cf(x) = \frac{2}{\left(\frac{1}{C} \backslash f(x)\right)'} + Cf(x) = C \backslash\backslash f(x).$$

Припустимо, що твердження має місце при всіх $n = 1, 2, \dots, k$. Тоді при $n = k + 1$ із (3) отримуємо

$$^{(2k+2)}(Cf(x)) = \frac{2k+2}{\left(^{(2k+1)}(Cf(x))\right)'} + ^{(2k)}(Cf(x)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2k+2}{\left(\frac{1}{C} (2k+1)f(x)\right)'} + C (2k)f(x) = C (2k+2)f(x), \\
^{(2k+3)}(Cf(x)) &= \frac{2k+3}{\left((2k+2)(Cf(x))\right)'} + ^{(2k+1)}(Cf(x)) = \\
&= \frac{2k+3}{\left(C (2k+2)f(x)\right)'} + \frac{1}{C} (2k+1)f(x) = \frac{1}{C} (2k+3)f(x).
\end{aligned}$$

Отже, і в цьому випадку твердження справджується.

Твердження 5. Нехай $C = \text{const}$. Для кожного $n = 0, 1, 2, \dots$ мають місце співвідношення

$$^{(2n)}(f(x) + C) = ^{(2n)}f(x) + C, \quad ^{(2n+1)}(f(x) + C) = ^{(2n+1)}f(x).$$

Доведення. Скористаємося методом повної математичної індукції. Легко бачити, що при $n = 0$ твердження справджується. Припустимо, що воно справджується при $n = 1, \dots, k$. Тоді при $n = k + 1$ із (3) маємо

$$\begin{aligned}
^{(2k+2)}(f(x) + C) &= \frac{2k+2}{\left((2k+1)(f(x) + C)\right)'} + ^{(2k)}(f(x) + C) = \\
&= \frac{2k+2}{\left((2k+1)f(x)\right)'} + ^{(2k)}f(x) + C = ^{(2k+2)}f(x) + C, \\
^{(2k+3)}(f(x) + C) &= \frac{2k+3}{\left((2k+2)(f(x) + C)\right)'} + ^{(2k+1)}(f(x) + C) = \\
&= \frac{2k+3}{\left((2k+2)f(x) + C\right)'} + ^{(2k+1)}f(x) = ^{(2k+3)}f(x).
\end{aligned}$$

І в цьому випадку твердження має місце.

Твердження 4 та 5 можна отримати з аналогічних тверджень для обернених різниць шляхом граничного переходу [10]. Крім того, обернені різниці мають наступні властивості.

Твердження 6. Для кожного $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
\rho \left[x_0, x_1, \dots, x_{2n}; \frac{1}{f(x)} \right] &= \frac{1}{\rho[x_0, x_1, \dots, x_{2n}; f(x)]}, \\
\rho \left[x_0, x_1, \dots, x_{2n}; \frac{a + bf(x)}{c + df(x)} \right] &= \frac{a + b\rho[x_0, x_1, \dots, x_{2n}; f(x)]}{c + d\rho[x_0, x_1, \dots, x_{2n}; f(x)]},
\end{aligned}$$

де a, b, c, d — сталі.

Якщо у формулах твердження 6 перейти до границі при $x_1, x_2, \dots, x_{2n} \rightarrow x$, то отримаємо наступні властивості для обернених похідних парного порядку.

Твердження 7. При кожному $n = 0, 1, 2, \dots$

$$^{(2n)}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{^{(2n)}f(x)}, \quad ^{(2n)}\left(\frac{a + bf(x)}{c + df(x)}\right) = \frac{a + b^{(2n)}f(x)}{c + d^{(2n)}f(x)},$$

де a, b, c, d — сталі.

За допомогою методу повної математичної індукції, використовуючи (4) та (5), легко довести наступне твердження.

Твердження 8. Якщо при кожному $i, i = 1, 2, \dots, n$, існує $\backslash f_i(x)$, то

$$\backslash \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) \right) = \frac{\prod_{i=1}^n \backslash f_i(x)}{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \backslash f_j(x)}, \quad (7)$$

$$\backslash \left(\prod_{i=1}^n f_i(x) \right) = \frac{\prod_{i=1}^n \backslash f_i(x)}{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \backslash f_j(x) f_j(x)}. \quad (8)$$

Зауваження 4. Як наслідок із (8) випливає

$$\backslash (f(x)^n) = \frac{\backslash f(x)}{n (f(x))^{n-1}}.$$

Із (4), (5) та (8) легко отримати наступні допоміжні твердження.

Твердження 9. Якщо функції $u = f(x)$ та $v = g(x)$ мають обернені похідні до другого порядку включно, то

$$\backslash (u \backslash u) = \frac{\backslash (\backslash u)}{\backslash (\backslash u) + u}, \quad (9)$$

$$\backslash (v \backslash v - u \backslash u) = \frac{\backslash (\backslash u) \backslash (\backslash v)}{v \backslash (\backslash u) - u \backslash (\backslash v)}, \quad (10)$$

$$\backslash (v^2 \backslash u \backslash v) = \frac{\backslash (\backslash u) \backslash (\backslash v)}{v^2 \backslash u \backslash (\backslash u) + 2v \backslash u \backslash (\backslash u) \backslash (\backslash v) + v^2 \backslash v \backslash (\backslash v)}. \quad (11)$$

Використовуючи (3), (4)–(6) та (9)–(11), можна встановити формули для знаходження других обернених похідних від суми, різниці, добутку та частки двох функцій.

Твердження 10. Якщо функції $u = f(x)$ та $v = g(x)$ мають обернені похідні до другого порядку включно, то

$$\backslash (u + v) = \frac{(\backslash u + \backslash v)^2 (\backslash u - u) (\backslash v - v)}{(\backslash u)^2 (\backslash u - u) + (\backslash v)^2 (\backslash v - v)} + u + v,$$

$$\backslash (u - v) = \frac{(\backslash v - \backslash u)^2 (\backslash u - u) (\backslash v - v)}{(\backslash v)^2 (\backslash v - v) - (\backslash u)^2 (\backslash u - u)} + u - v,$$

$$\backslash (uv) = \frac{(\backslash u + \backslash v)^2 (\backslash u - u) (\backslash v - v)}{u (\backslash u)^2 (\backslash u - u) - \backslash u \backslash v (\backslash u - u) (\backslash v - v) + v (\backslash v)^2 (\backslash v - v)} + uv,$$

$$\backslash \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{(\backslash v - \backslash u)^2 (\backslash u - u) (\backslash v - v)}{v (v^2 (\backslash v)^2 (\backslash v - v) + \backslash u \backslash v (\backslash v - v) (\backslash u - u) - u (\backslash u)^2 \backslash v (\backslash u - u))} + \frac{u}{v}.$$

Зауваження 5. Із твердження 10 випливає, що питання існування формули n -ї оберненої похідної для суми, добутку та частки двох функцій, тобто деякого аналога формули Лейбніца, залишається відкритим.

Твердження 11. Нехай функція $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ має обернену похідну $f'(x_0)$, для функції $f(x)$ існує однозначна обернена функція $x = g(y)$, яка неперервна у відповідній точці $y = y_0$, де $y_0 = f(x_0)$. Тоді обернена похідна $g'(y_0)$ також існує і виконується

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доведення. З означення оберненої похідної та умов, які накладено на функцію $f(x)$, випливає [13], що обернена функція $g(x)$ має похідну в точці y_0 і $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. Тоді

$$g'(y_0) = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{1/f'(x_0)} = f'(x_0).$$

Твердження 12. Нехай функція $y = f(x)$ має обернену похідну в точці x_0 , а функція $z = g(y)$ має обернену похідну в точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді складна функція $z = F(x) = g(f(x))$ також має в точці x_0 обернену похідну, до того ж

$$F'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Доведення. При умовах, накладених на функцію $f(x)$, з означення оберненої похідної випливає [13], що складна функція $F(x)$ має похідну в точці x_0 і $F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$. Тоді

$$F'(x_0) = \frac{1}{F'(x_0)} = \frac{1}{g'(y_0)f'(x_0)} = \frac{1}{g'(y_0)} \cdot \frac{1}{f'(x_0)} = g'(y_0)f'(x_0).$$

1. Khovanskii A. N. The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory. – Groningen: P. Noordhoff, 1963. – 212 p.
2. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Розвинення деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Математика і інформатика. – 2007. – Вип. 14–15. – С. 107–116.
3. Wall H. S. Analytic theory of continued fractions. – New York: D. Van Nostrand Co., 1948. – 433 p.
4. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1957. – Bd II. – 315 S.
5. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
6. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
7. Thiele T. N. Interpolationsrechnung. – Leipzig: Commission von B. G. Teubner, 1909. – XII + 175 S.
8. Nörlund N. E. Vorlesungen über Differenzenrechnung. – Berlin: Springer, 1924. – 551 S.
9. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Еквівалентність двох методів побудови правильних ланцюгових C -дробів // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 7. – С. 1005–1009.
10. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. – М.: Гостехтеориздат, 1953. – 527 с.
11. Hildebrand F. V. Introduction to numerical analysis. – 2nd ed. – New York: Dover Publ., Inc, 1987. – 669 p.
12. Пагіря М. М. Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. – Вип. 1. – С. 72–79.
13. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1969. – Т. I. – 608 с.
14. Харди Г. Х. Курс чистой математики. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 512 с.
15. Титчмарш Е. Теория функций. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1980. – 464 с.

Одержано 15.07.09



МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26

тел./факс +380-3131-21109

Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua

E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua

Веб-сайт Інституційного репозитарію Наукової бібліотеки МДУ: <http://dspace.msu.edu.ua:8080>

Веб-сайт Наукової бібліотеки МДУ: <http://msu.edu.ua/library/>