

ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЙ $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

We obtain the representations of the functions $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, and $\cos z$ by quasireciprocal functional continued fractions of the Thiele type.

Получены представления функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ квазиобратной функциональной цепной дробью типа Тиле.

Вступ. Ланцюгові дроби та їх узагальнення застосовуються при дослідженні задач теорії чисел, наближення функцій, обчислювальної математики тощо [1 – 11]. Функції комплексної змінної наближаються ланцюговими дробами, раціональними функціями [12] та апроксимантами Паде [13, 14]. Розглядаються також задачі наближення узагальненнями ланцюгових дробів у більш загальних функціональних просторах [15, 16].

Існує кілька підходів до зображення функцій комплексної змінної ланцюговими дробами. Відомо, що розв'язок диференціального рівняння Ріккати спеціального вигляду можна подати у вигляді нескінченного ланцюгового дроби. Якщо функція задовольняє диференціальне рівняння Ріккати при певних значеннях коефіцієнтів, то отримуємо розвинення функції в ланцюговий дріб [5]. Інший підхід до розвинення функцій у ланцюгові дроби пов'язаний із визначниками Ганкеля, елементи яких є коефіцієнтами розвинення функції в степеневий ряд в околі деякої точки [2, 6]. У цьому випадку коефіцієнти правильного ланцюгового С-дроби визначаються через відношення визначників Ганкеля. Можна отримати розвинення функції в ланцюговий дріб, скориставшись розвиненням відношення гіпергеометричної функції в ланцюговий дріб. Велику кількість розвинень елементарних та спеціальних функцій у ланцюгові дроби отримано за допомогою вказаних підходів.

Тіле [17] запропонував формулу, яка є аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів. Якщо в околі деякої точки функція має обернені похідні Тіле довільного порядку, то функцію можна розвинути в ланцюговий дріб. Деякі узагальнення формули Тіле для ланцюгових дробів інших виглядів запропоновано в монографії [18].

У даній роботі розглядаються застосування ще одного узагальнення формули Тіле — функціональної формули типу Тіле [19], яка ґрунтується на обернених g -похідних 2-го типу, до зображення функцій $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ квазіоберненим функціональним ланцюговим дробом типу Тіле.

Щодо актуальності запропонованих досліджень варто зазначити наступне. В енциклопедії [2] та довіднику [6] наведено розвинення багатьох функцій у ланцюгові дроби, вказано області збіжності розвинень. Всі розвинення отримано вказаними вище методами. Для функцій $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ не відомі коефіцієнти диференціального рівняння Ріккати, розв'язком якого були б розглядувані функції. Для даних функцій не встановлено формули обернених похідних Тіле n -го порядку та обернених похідних 2-го типу n -го порядку, а тому не вдається отримати розвинення функцій $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ у ланцюговий дріб Тіле та квазіобернений

ланцюговий дріб типу Тіле в загальному вигляді. Можна послідовно знаходити обернені похідні Тіле та обернені похідні 2-го типу цих функцій. У [18] отримано кілька підхідних дробів ланцюгового дробу Тіле (Т-ЛД) та квазіобернених ланцюгових дробів типу Тіле для вказаних функцій. Метод Вісковатова також дозволяє отримати кілька перших підхідних дробів для вказаних функцій [5, с. 162–168; 6, с. 113], але розвинення в ланцюговий дріб не знайдено. Використовуючи тотожність Ойлера, можна записати степеневі ряди функцій $\sin z$, $\cos z$ загальним ланцюговим Т-дробом, але такі дроби не мають жодних переваг над степеневими рядами [6, с. 201]. Відомо, що побудовані за формулою Обрешкова раціональні наближення функцій $\sin x$ та $\cos x$ мають невисокий порядок точності [5, с. 153]. Узагальненням ланцюгових С-дробів є ланцюгові δ -дроби [20]. Можна послідовно знаходити підхідні дроби ланцюгових δ -дробів вказаних функцій, але не встановлено загальний вигляд розвинення функцій $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ у ланцюгові δ -дроби.

У роботах В. К. Дзядика [21, 22] досліджувалася задача наближення цих функцій діагональними апроксимантами Паде. Коефіцієнти багаточленів чисельника та знаменника апроксиманти Паде $R^{[2n+1, n]}(z)$ визначаються через значення похідних багаточленів $A_{2n+1}(t)$ при $t = 0$ або $t = 1$. В свою чергу багаточлен $A_{2n+1}(t)$ визначається через детермінант $(n + 1)$ -го порядку, останній рядок якого складають непарні степені t , а решта рядків — значення бета-функції $B(k, l)$, $k = 2, 4, \dots, 2n$, $l = 2, 4, \dots, 2n + 2$.

Обернені g -похідні 2-го типу та їх властивості. Нехай функція $f(z)$ аналітична на компакт $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, базис-функція $g(z)$ аналітична та однолиста на \mathcal{Z} . Вибрана множина інтерполяційних вузлів $\mathbf{Z} = \{z_i : z_i \in \mathcal{Z}, z_i \neq z_j, i \neq j, i, j = 0, 1, \dots, n\}$. Елементи послідовностей $\{v_k(g; z)\}$ та $\{V_k(g; z)\}$ визначимо таким чином:

$$f(z) = \frac{1}{v_0(g; z)}, \quad v_k(g; z) = d_k + \frac{g(z) - g(z_k)}{v_{k+1}(g; z)}, \quad z_k \in \mathbf{Z}, \quad d_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$V_0(g; z) = v_0(g; z), \quad V_k(g; z) = v_0(g; z) \circ v_1(g; z) \circ \dots \circ v_k(g; z), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді

$$f(z) = \frac{1}{V_n(g; z)} = \left(d_0 + \frac{g(z) - g(z_0)}{d_1} + \dots + \frac{g(z) - g(z_{n-1})}{d_n} + \frac{g(z) - g(z_n)}{v_{n+1}(g; z)} \right)^{-1}. \quad (1)$$

Розглядається квазіобернений функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле (Т-КФІЛД) [18]

$$D_n(g; z) = \left(d_0 + \frac{g(z) - g(z_0)}{d_1} + \frac{g(z) - g(z_1)}{d_2} + \dots + \frac{g(z) - g(z_{n-1})}{d_n} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Коефіцієнти Т-КФІЛД (2) обчислюються за значенням функції у вузлах \mathbf{Z} через обернені g -різниці 2-го типу:

$$d_0 = \varrho_0^{(2)}[g; z_0; f], \quad d_1 = \varrho_1^{(2)}[g; z_0, z_1; f],$$

$$d_k = \varrho_k^{(2)}[g; z_0, \dots, z_k; f] - \varrho_{k-2}^{(2)}[g; z_0, \dots, z_{k-2}; f], \quad k \geq 2.$$

Обернені g -різниці 2-го типу задовольняють рекурентне співвідношення [19]

$$\begin{aligned} & \varrho_k^{(2)}[g; z_0, \dots, z_k; f] = \\ & = \varrho_{k-2}^{(2)}[g; z_0, \dots, z_{k-2}; f] + \frac{g(z_k) - g(z_{k-1})}{\varrho_{k-1}^{(2)}[g; z_0, \dots, z_{k-2}, z_k; f] - \varrho_{k-1}^{(2)}[g; z_0, \dots, z_{k-1}; f]}, \\ \varrho_0^{(2)}[g; z_0; f] & = \frac{1}{f(z_0)}, \quad \varrho_1^{(2)} = \varrho_1^{(2)}[g; z_0, z_1; f] = \frac{g(z_1) - g(z_0)}{\varrho_0^{(2)}[g; z_1; f] - \varrho_0^{(2)}[g; z_0; f]}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Зауваження 1. Із (1) випливає, що якщо $(g(z) - g(z_n))/v_{n+1}(z) \equiv 0$ при всіх $z \in \mathcal{Z}$, то $f(z) \equiv D_n(g; z)$.

Обернена g -різниця 2-го типу k -го порядку $\varrho_k^{(2)}[g; z_0, \dots, z_k; f]$ є симетричною функцією відносно своїх аргументів z_0, z_1, \dots, z_k [18, с. 180–182].

Означення 1. Якщо існує границя, скінченне значення або нескінченність, коли інтерполяційні вузли z_0, z_1, \dots, z_k прямують до деякого $z \in \mathcal{Z}$ оберненої g -різниці 2-го типу k -го порядку $\varrho_k^{(2)}[g; z_0, \dots, z_k; f]$, то граничне значення називається оберненою g -похідною 2-го типу k -го порядку.

Обернену g -похідну 2-го типу k -го порядку в точці $z \in \mathcal{Z}$ позначають через $^{[k]}f_g(z)$. З означення випливає, що $^{[k]}f_g(z) = \varrho_k^{(2)}[g; \underbrace{z, \dots, z}_{k+1}; f] = \lim_{z_0, z_1, \dots, z_k \rightarrow z} \varrho_k^{(2)}[g; z_0, z_1, \dots, z_k; f]$.

Теорема 1 [19]. 1. Якщо при деякому значенні t визначники

$$\begin{aligned} F_m^{(1)}(z) & = \begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \dots & (g^{m-1}f)' & (g^m)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \dots & (g^{m-1}f)'' & (g^m)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \dots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m)^{(2m)} \end{vmatrix}, \\ F_m^{(2)}(z) & = \begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \dots & (g^{m-1}f)' & (g^m f)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \dots & (g^{m-1}f)'' & (g^m f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \dots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m f)^{(2m)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

відмінні від нуля в деякій точці $z \in \mathcal{Z}$, то в указаній точці функція $f(z)$ має обернену g -похідну 2-го типу $(2m)$ -го порядку і

$$^{[2]}f_g(z) = \frac{\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f' & (fg)' \\ f'' & (fg)'' \end{vmatrix}}, \quad ^{[2m]}f_g(z) = \frac{F_m^{(1)}(z)}{F_m^{(2)}(z)}, \quad m = 2, 3, \dots$$

2. Якщо при деякому значенні t визначники

$$F_m^{(3)}(z) = \begin{vmatrix} f & g & gf & \dots & g^{m-1} & g^{m-1}f & g^m f & g^{m+1}f \\ f' & g' & (gf)' & \dots & (g^{m-1})' & (g^{m-1}f)' & (g^m f)' & (g^{m+1}f)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \dots & (g^{m-1})'' & (g^{m-1}f)'' & (g^m f)'' & (g^{m+1}f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(k)} & g^{(k)} & (gf)^{(k)} & \dots & (g^{m-1})^{(k)} & (g^{m-1}f)^{(k)} & (g^m f)^{(k)} & (g^{m+1}f)^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$F_m^{(4)}(z) = \begin{vmatrix} f & g & gf & \dots & g^{m-1} & g^{m-1}f & g^m & g^m f \\ f' & g' & (gf)' & \dots & (g^{m-1})' & (g^{m-1}f)' & (g^m)' & (g^m f)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \dots & (g^{m-1})'' & (g^{m-1}f)'' & (g^m)'' & (g^m f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(k)} & g^{(k)} & (gf)^{(k)} & \dots & (g^{m-1})^{(k)} & (g^{m-1}f)^{(k)} & (g^m)^{(k)} & (g^m f)^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$k = 2m + 1,$$

відмінні від нуля в деякій точці $z \in \mathcal{Z}$, то в цій точці функція $f(z)$ має обернену g -похідну 2-го типу $(2m + 1)$ -го порядку i

$${}^{[1]}f_g(z) = -\frac{f^2(z)g'(z)}{f'(z)}, \quad {}^{[2m+1]}f_g(z) = \frac{F_m^{(3)}(z)}{F_m^{(4)}(z)} \quad m = 1, 2, \dots$$

Теорема 2 [19]. Нехай існують скінченні відмінні від нуля обернені g -похідні 2-го типу функцій $u = f(z)$ та $v = h(z)$. Обернені g -похідні 2-го типу суми, різниці, добутку та частки цих функцій визначаються за формулами

$${}^{[1]}(u \pm v)_g = \frac{(u \pm v)^2 \cdot {}^{[1]}v_g \cdot {}^{[1]}u_g}{u^2 \cdot {}^{[1]}v_g \pm v^2 \cdot {}^{[1]}u_g},$$

$${}^{[1]}(uv)_g = \frac{u v \cdot {}^{[1]}u_g \cdot {}^{[1]}v_g}{u \cdot {}^{[1]}v_g + v \cdot {}^{[1]}u_g}, \quad {}^{[1]}(u/v)_g = \frac{(u/v) \cdot {}^{[1]}u_g \cdot {}^{[1]}v_g}{u \cdot {}^{[1]}v_g - v \cdot {}^{[1]}u_g}.$$

Має місце рекурентна формула знаходження обернених g -похідних 2-го типу [19]

$${}^{[0]}f_g(z) = \frac{1}{f(z)}, \quad {}^{[1]}f_g(z) = \frac{-f^2(z)g'(z)}{f'(z)},$$

$${}^{[k]}f_g(z) = \frac{k g'(z)}{({}^{[k-1]}f_g(z))'} + {}^{[k-2]}f_g(z), \quad k = 2, 3, \dots \tag{3}$$

Якщо базис-функція $g(z)$ аналітична і однолиста в \mathcal{Z} , функція $f(z)$ аналітична в \mathcal{Z} і має скінченні обернені g -похідні 2-го типу довільного порядку в точці $z = z_*$, то в околі точки $z_* \in \mathcal{Z}$ функція $f(z)$ може бути розвинена в квазіобернений функціональний ланцюговий дріб типу Тіле (Т-КФЛД)

$$f(z) = \frac{1}{{}^{[0]}f_g(z_*)} + \frac{g(z) - g(z_*)}{{}^{[1]}f_g(z_*)} + \frac{g(z) - g(z_*)}{2g'(z)/({}^{[1]}f_g(z_*))'} + \dots + \frac{g(z) - g(z_*)}{n g'(z)/({}^{[n-1]}f_g(z_*))'} + \dots \tag{4}$$

Розвинення функції $f(z)$ в Т-КФЛД (4) є формальним. У кожному конкретному випадку після того, як для функції отримано розвинення в Т-КФЛД, потрібно визначити область збіжності ланцюгового дроби та довести збіжність Т-КФЛД до функції.

Розвинення функцій в Т-КФЛД. Розглянемо розвинення функцій комплексної змінної $f(z)$ за базис-функцією $g(z)$ в околі точки $z_* \in \mathcal{Z}$ в Т-КФЛД (4):

$$f(z) = \left(d_0(g(z); z_*) + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{g(z) - g(z_*)}{d_n(g(z); z_*)} \right)^{-1} \tag{5}$$

де

$$d_0(g(z); z_*) = \frac{1}{f(z_*)}, \quad d_1(g(z); z_*) = {}^{[1]}f_g(z_*) = \frac{-f^2(z_*)g'(z_*)}{f'(z_*)},$$

$$d_n(g(z); z_*) = \frac{ng'(z_*)}{({}^{[n-1]}f_g(z_*))'} = {}^{[n]}f_g(z_*) - {}^{[n-1]}f_g(z_*), \quad n = 2, 3, \dots$$
(6)

Зауваження 2. Згідно з (3) та зауваженням 1, якщо ${}^{[n]}f_g(z) = C, C = \text{const}$, для всіх $z \in \mathcal{Z}$ і $g'(z) \neq 0$, то ${}^{[n+1]}f_g(z) = \infty$. В цьому випадку Т-КФЛД є скінченним і функція $f(z)$ зображується скінченним ланцюговим дробом вигляду

$$f(z) = \left(d_0(g(z); z_*) + \prod_{k=1}^n \frac{g(z) - g(z_*)}{d_k(g(z); z_*)} \right)^{-1}.$$

Перейдемо до зображення функцій $\text{ch } z, \text{sh } z, \sin z, \cos z$ Т-КФЛД (5).

Функція $\text{ch } z$. Нехай базис-функція $g(z) = e^z$. Використовуючи формули (3), знаходимо обернені g -похідні 2-го типу функції $\text{ch } z$. Маємо

$${}^{[0]}(\text{ch } z)_g = \frac{2e^z}{e^{2z} + 1}, \quad {}^{[1]}(\text{ch } z)_g = \frac{(e^{2z} + 1)^2}{2(1 - e^{2z})}, \quad {}^{[2]}(\text{ch } z)_g = \frac{2}{e^z(3 - e^{2z})},$$

$${}^{[3]}(\text{ch } z)_g = \frac{e^{4z} - 6e^{2z} + 1}{2}, \quad {}^{[4]}(\text{ch } z)_g = 0.$$

Оскільки $({}^{[4]}(\text{ch } z)_g)' = 0$, то ${}^{[5]}(\text{ch } z)_g = \infty$ і ланцюговий дріб „обривається” на 4-му поверсі. Звідси випливає, що функцію $\text{ch } z$ в околі точки $z_* \in \mathcal{Z}$, яка належить області визначення обернених g -похідних 2-го типу функції $\text{ch } z$, можна зобразити скінченним Т-КФЛД

$$\text{ch } z = \frac{1}{d_0(e^z; z_*)} + \frac{e^z - e^{z_*}}{d_1(e^z; z_*)} + \frac{e^z - e^{z_*}}{d_2(e^z; z_*)} + \frac{e^z - e^{z_*}}{d_3(e^z; z_*)} + \frac{e^z - e^{z_*}}{d_4(e^z; z_*)},$$

де коефіцієнти, згідно з (6), будуть такими:

$$d_0(e^z; z_*) = \frac{2e^{z_*}}{e^{2z_*} + 1}, \quad d_1(e^z; z_*) = \frac{(e^{2z_*} + 1)^2}{2(1 - e^{2z_*})}, \quad d_2(e^z; z_*) = \frac{2(e^{2z_*} - 1)^2}{e^{z_*}(3 - e^{2z_*})(e^{2z_*} + 1)},$$

$$d_3(e^z; z_*) = \frac{e^{2z_*}(e^{2z_*} - 3)^2}{2(e^{2z_*} - 1)}, \quad d_4(e^z; z_*) = \frac{2}{e^{z_*}(e^{2z_*} - 3)}.$$

Використавши розвинення функції e^z в Т-ЛД [18, с. 250], отримаємо ланцюговий дріб Тіле

$$\mathbf{k}(z_*, z) = e^z - e^{z_*} = e^{z_*} \left(\frac{z - z_*}{1} + \frac{z - z_*}{-2} + \frac{z - z_*}{-3} + \frac{z - z_*}{2} + \frac{z - z_*}{5} + \right. \\ \left. + \frac{z - z_*}{-2} + \frac{z - z_*}{-7} + \dots + \frac{z - z_*}{(-1)^n 2} + \frac{z - z_*}{(-1)^n (2n + 1)} + \dots \right). \quad (7)$$

Згідно з теоремою 9.2.2 [18, с. 287], Т-ЛД (7) збігається на всій комплексній площині до функції e^z і на довільному компакт $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ ланцюговий дріб збігається рівномірно.

Тоді зображення функції $\text{ch } z$ Т-КФЛД набирає вигляду

$$\text{ch } z = \frac{1}{d_0(e^z; z_*)} + \frac{\mathbf{k}(z_*, z)}{d_1(e^z; z_*)} + \frac{\mathbf{k}(z_*, z)}{d_2(e^z; z_*)} + \frac{\mathbf{k}(z_*, z)}{d_3(e^z; z_*)} + \frac{\mathbf{k}(z_*, z)}{d_4(e^z; z_*)}.$$

В окремому випадку в околі точки $z_* = \ln 2$, яка належить області визначення обернених g -похідних 2-го типу функції $\text{ch } z$, маємо зображення функції Т-КФЛД

$$\text{ch } z = \frac{1}{4/5} + \frac{\mathbf{k}(\ln 2, z)}{-25/6} + \frac{\mathbf{k}(\ln 2, z)}{-9/5} + \frac{\mathbf{k}(\ln 2, z)}{2/3} + \frac{\mathbf{k}(\ln 2, z)}{1},$$

де

$$\mathbf{k}(\ln 2, z) = 2 \left(\frac{z - \ln 2}{1} + \frac{z - \ln 2}{-2} + \frac{z - \ln 2}{-3} + \dots + \frac{z - \ln 2}{(-1)^{n2}} + \frac{z - \ln 2}{(-1)^n(2n + 1)} + \dots \right).$$

Значення $\ln 2$ можна знайти з потрібною точністю за допомогою одного із відомих розвинень функції $\ln(1 + z)$ у ланцюговий дріб (див., наприклад, [2, с. 202], формула 6.1.17, [6, с. 196], формули 11.2.2, 11.2.3, [18 с. 259], формула 8.54, [18, с. 328], формула 10.26).

Можна отримати інше зображення функції $\text{ch } z$ функціональним ланцюговим дробом, якщо за базис-функцію вибрати $g(z) = e^{z/2}$. Тоді, згідно з формулами (3), обернені g -похідні 2-го типу функції $\text{ch } z$ мають вигляд

$$\begin{aligned} [0] (\text{ch } z)_g &= \frac{2e^z}{e^{2z} + 1}, & [1] (\text{ch } z)_g &= \frac{(e^{2z} + 1)^2}{4e^{z/2}(1 - e^{2z})}, & [2] (\text{ch } z)_g &= \frac{-2e^z(e^{2z} + 3)}{3e^{4z} - 12e^{2z} + 1}, \\ [3] (\text{ch } z)_g &= \frac{2e^{3z/2}(e^{4z} - 10e^{2z} + 5)}{e^{4z} + 14e^{2z} + 1}, & [4] (\text{ch } z)_g &= \frac{2(1 - 5e^{2z})}{e^z(e^{4z} + 40e^{2z} + 15)}, \\ [5] (\text{ch } z)_g &= \frac{e^{3z/2}(e^{4z} + 90e^{2z} + 105)}{12(e^{2z} - 1)}, & [6] (\text{ch } z)_g &= \frac{2}{7e^z(e^{2z} - 3)}, \\ [7] (\text{ch } z)_g &= 4e^{3z/2}(7 - e^{2z}), & [8] (\text{ch } z)_g &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки $([8](\text{ch } z)_g)' = 0$, то Т-КФЛД буде скінченним. Нехай точка $z_* \in \mathcal{Z}$ належить множині визначення обернених g -похідних 2-го типу функції $\text{ch } z$. Тоді, згідно з (6), коефіцієнти зображення функції $\text{ch } z$ Т-КФЛД в околі точки $z = z_*$ набувають значень

$$\begin{aligned} d_0(e^{\frac{z}{2}}; z_*) &= \frac{2e^{z_*}}{e^{2z_*} + 1}, & d_1(e^{\frac{z}{2}}; z_*) &= \frac{(e^{2z_*} + 1)^2}{4e^{\frac{z_*}{2}}(1 - e^{2z_*})}, \\ d_2(e^{\frac{z}{2}}; z_*) &= \frac{-8e^{z_*}(e^{2z_*} - 1)^2}{(e^{2z_*} + 1)(3e^{4z_*} - 12e^{2z_*} + 1)}, \\ d_3(e^{\frac{z}{2}}; z_*) &= \frac{(3e^{4z_*} - 12e^{2z_*} + 1)^2}{4e^{\frac{z_*}{2}}(e^{2z_*} - 1)(e^{4z_*} + 14e^{2z_*} + 1)}, \\ d_4(e^{\frac{z}{2}}; z_*) &= \frac{2(e^{4z_*} + 14e^{2z_*} + 1)^2}{e^{z_*}(e^{4z_*} + 40e^{2z_*} + 15)(3e^{4z_*} - 12e^{2z_*} + 1)}, \\ d_5(e^{\frac{z}{2}}; z_*) &= \frac{e^{\frac{3z_*}{2}}(e^{4z_*} + 40e^{2z_*} + 15)^2}{12(e^{2z_*} - 1)(e^{4z_*} + 14e^{2z_*} + 1)}, \end{aligned}$$

$$d_6(e^{\frac{z}{2}}; z_*) = \frac{72(e^{2z_*} - 1)^2}{7e^{z_*}(e^{2z_*} - 3)(e^{4z_*} + 40e^{2z_*} + 15)},$$

$$d_7(e^{\frac{z}{2}}; z_*) = \frac{49e^{\frac{3z_*}{2}}(e^{2z_*} - 3)^2}{12(1 - e^{2z_*})}, \quad d_8(e^{\frac{z}{2}}; z_*) = \frac{2}{7e^{z_*}(3 - e^{2z_*})}.$$

Функція $\operatorname{ch} z$ зображується скінченним Т-КФЛД вигляду

$$\operatorname{ch} z = \left(d_0(e^{z/2}; z_*) + \prod_{k=1}^8 \frac{e^{z/2} - e^{z_*/2}}{d_k(e^{z/2}; z_*)} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Легко показати [18], що обернені похідні Тіле функції $e^{z/2}$ обчислюються за формулами

$${}^{(2n)}(e^{z/2}) = (-1)^n e^{z/2}, \quad {}^{(2n+1)}e^z = (-1)^n 2(n+1) e^{-z/2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

В околі точки $z_* \in \mathcal{Z}$ коефіцієнти розвинення функції в Т-ЛД будуть такими:

$$b_0(z_*) = e^{\frac{z_*}{2}}, \quad b_1(z_*) = 2e^{-\frac{z_*}{2}},$$

$$b_{2n}(z_*) = (-1)^n 2e^{\frac{z_*}{2}}, \quad b_{2n+1}(z_*) = (-1)^n 2(2n+1)e^{-\frac{z_*}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Після еквівалентних перетворень отримаємо ланцюговий дріб Тіле

$$\mathbf{h}(z_*, z) = e^{z/2} - e^{z_*/2} = e^{z_*/2} \left(\frac{z-z_*}{2} + \frac{z-z_*}{-2} + \frac{z-z_*}{-6} + \frac{z-z_*}{2} + \frac{z-z_*}{10} + \right. \\ \left. + \frac{z-z_*}{-2} + \frac{z-z_*}{-14} + \dots + \frac{z-z_*}{(-1)^n 2} + \frac{z-z_*}{(-1)^n 2(2n+1)} + \dots \right). \quad (9)$$

Згідно з теоремою 9.1.7 [18, с. 283], ланцюговий дріб (9) збігається на всій комплексній площині до функції $e^{z/2}$ і на довільному компакт $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ збіжність буде рівномірною.

Підставимо (9) у (8). Зображення функції Т-КФЛД набирає вигляду

$$\operatorname{ch} z = \left(d_0(e^{z/2}; z_*) + \prod_{k=1}^8 \frac{\mathbf{h}(z_*, z)}{d_k(e^{z/2}; z_*)} \right)^{-1}.$$

В окремому випадку при $z_* = \ln 4$ маємо

$$\operatorname{ch} z = \left(\frac{8}{17} + \frac{\mathbf{h}(\ln 4, z)}{-289/120} + \frac{\mathbf{h}(\ln 4, z)}{-7200/9809} + \frac{\mathbf{h}(\ln 4, z)}{332929/57720} + \frac{\mathbf{h}(\ln 4, z)}{231361/1051294} + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{h}(\ln 4, z)}{1659842/21645} + \frac{\mathbf{h}(\ln 4, z)}{4050/82901} + \frac{\mathbf{h}(\ln 4, z)}{-16562/45} + \frac{\mathbf{h}(\ln 4, z)}{-1/182} \right)^{-1}.$$

Функція $\operatorname{sh} z$. Як і у попередньому випадку, можна отримати зображення функції $\operatorname{sh} z$ Т-КФЛД, якщо за базис-функцію взяти $g(z) = e^z$ або $g(z) = e^{z/2}$.

Виберемо за базис-функцію $g(z) = \operatorname{th} \frac{z}{2}$. За формулами (3) знаходимо обернені g -похідні 2-го типу функції $\operatorname{sh} z$:

$${}^{[0]}(\operatorname{sh} z)_g = \frac{1}{\operatorname{sh} z}, \quad {}^{[1]}(\operatorname{sh} z)_g = \frac{-2 \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}}{\operatorname{ch} z}, \quad {}^{[2]}(\operatorname{sh} z)_g = \frac{-\operatorname{sh} \frac{3z}{2}}{2 \operatorname{ch}^3 \frac{z}{2}}, \quad {}^{[3]}(\operatorname{sh} z)_g = -2.$$

Оскільки $({}^{[3]}(\operatorname{sh} x)_g)' = 0$, то ${}^{[4]}(\operatorname{sh} z) = \infty$. Із (6) випливає, що коефіцієнти зображення функції $\operatorname{sh} z$ в околі точки $z_* \neq 0$ в Т-КФЛД набувають значень

$$d_0\left(\operatorname{th} \frac{z}{2}; z_*\right) = \frac{1}{\operatorname{sh} z_*}, \quad d_1\left(\operatorname{th} \frac{z}{2}; z_*\right) = \frac{-2 \operatorname{sh}^2 \frac{z_*}{2}}{\operatorname{ch} z_*},$$

$$d_2\left(\operatorname{th} \frac{z}{2}; z_*\right) = \frac{\left(\operatorname{th}^2 \frac{z_*}{2} + 1\right)^2}{-2 \operatorname{th} \frac{z_*}{2}}, \quad d_3\left(\operatorname{th} \frac{z}{2}; z_*\right) = \frac{-2}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{z_*}{2}}.$$

Зображення функції $\operatorname{sh} z$ скінченним Т-КФЛД матиме вигляд

$$\operatorname{sh} z = \left(d_0\left(\operatorname{th} \frac{z}{2}; z_*\right) + \prod_{k=1}^3 \frac{\operatorname{th} \frac{z}{2} - \operatorname{th} \frac{z_*}{2}}{d_k\left(\operatorname{th} \frac{z}{2}; z_*\right)} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Легко переконатися [18, с. 256], що обернені похідні Тіле функції $\operatorname{th} \frac{z}{2}$ обчислюються за формулами

$${}^{(4n)}\left(\operatorname{th} \frac{z}{2}\right) = \operatorname{th} \frac{z}{2}, \quad {}^{(4n+1)}\left(\operatorname{th} \frac{z}{2}\right) = \frac{2(2n+1)\left(n \operatorname{th}^2 \frac{z}{2} - n - 1\right)}{\operatorname{th}^2 \frac{z}{2} - 1}, \quad {}^{(4n+2)}\left(\operatorname{th} \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{th} \frac{z}{2}},$$

$${}^{(4n+3)}\left(\operatorname{th} \frac{z}{2}\right) = \frac{2(n+1)\left((2n+3) \operatorname{th}^2 \frac{z}{2} - 2n - 1\right)}{\operatorname{th}^2 \frac{z}{2} - 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Якщо $z_* \notin G$, де $G = \{0\} \cup \{i\pi(2n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$, то коефіцієнти розвинення функції $\operatorname{th}(z/2)$ в Т-ЛД в околі точки $z = z_*$ мають вигляд

$$b_0(z_*) = \operatorname{th} \frac{z_*}{2}, \quad b_{4n+1}(z_*) = -\frac{2(4n+1)}{\operatorname{th}^2 \frac{z_*}{2} - 1}, \quad b_{4n+2}(z_*) = -\frac{\operatorname{th}^2 \frac{z_*}{2} - 1}{\operatorname{th} \frac{z_*}{2}},$$

$$b_{4n+3}(z_*) = \frac{2(4n+3) \operatorname{th}^2 \frac{z_*}{2}}{\operatorname{th}^2 \frac{z_*}{2} - 1}, \quad b_{4n+4}(z_*) = \frac{\operatorname{th}^2 \frac{z_*}{2} - 1}{\operatorname{th} \frac{z_*}{2}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тоді після еквівалентних перетворень маємо розвинення функції $\operatorname{th} \frac{z}{2}$ в Т-ЛД

$$\mathbf{p}(z_*, z) = \operatorname{th} \frac{z}{2} - \operatorname{th} \frac{z_*}{2} = \frac{(z - z_*)\left(\operatorname{th}^2 \frac{z_*}{2} - 1\right)}{-2} + \frac{(z - z_*) \operatorname{th} \frac{z_*}{2}}{-1} + \frac{z - z_*}{6 \operatorname{th} \frac{z_*}{2}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{z - z_*}{1} + \frac{(z - z_*)\operatorname{th} \frac{z_*}{2}}{-10} + \frac{(z - z_*)\operatorname{th} \frac{z_*}{2}}{-1} + \frac{z - z_*}{14\operatorname{th} \frac{z_*}{2}} + \frac{z - z_*}{1} + \dots \\
& \dots + \frac{(z - z_*)\operatorname{th} \frac{z_*}{2}}{-2(4k + 1)} + \frac{(z - z_*)\operatorname{th} \frac{z_*}{2}}{-1} + \frac{z - z_*}{2(4k + 3)\operatorname{th} \frac{z_*}{2}} + \frac{z - z_*}{1} + \dots. \quad (11)
\end{aligned}$$

Ланцюговий дріб (11) збігається до функції $\operatorname{th} z/2$ скрізь на комплексній площині, за винятком точок множини G , і на довільному компакт $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C} \setminus G$ збіжність буде рівномірною.

Підставимо розвинення $\mathbf{p}(z_*, z)$ в (10) і отримаємо зображення функції $\operatorname{sh} z$ Т-КФЛД

$$\operatorname{sh} z = \left(d_0 \left(\operatorname{th} \frac{z}{2}; z_* \right) + \prod_{k=1}^3 \frac{\mathbf{p}(z_*, z)}{d_k \left(\operatorname{th} \frac{z}{2}; z_* \right)} \right)^{-1}.$$

В окремому випадку в околі точки $z_* = \ln 2$ маємо

$$\operatorname{sh} z = \left(\frac{4}{3} + \frac{\mathbf{p}(\ln 2, z)}{-\frac{1}{5}} + \frac{\mathbf{p}(\ln 2, z)}{-\frac{50}{27}} + \frac{\mathbf{p}(\ln 2, z)}{-\frac{9}{5}} \right)^{-1}.$$

Функція $\operatorname{sh} z$. В якості базис-функції виберемо функцію $g(z) = e^{iz/2}$. Тоді обернені g -похідні 2-го типу функції $\sin z$ будуть такими:

$$\begin{aligned}
^{[0]} (\sin z)_g &= \frac{2ie^{iz}}{e^{i2z} - 1}, & ^{[1]} (\sin z)_g &= \frac{i(e^{i2z} - 1)^2}{4e^{iz/2}(e^{i2z} + 1)}, & ^{[2]} (\sin z)_g &= \frac{-2ie^{iz}(e^{i2z} - 3)}{3e^{i4z} + 12e^{i2z} + 1}, \\
^{[3]} (\sin z)_g &= -\frac{2ie^{i3z/2}(e^{i4z} + 10e^{i2z} + 5)}{e^{i4z} - 14e^{i2z} + 1}, & ^{[4]} (\sin z)_g &= \frac{2i(5e^{i2z} + 1)}{e^{iz}(e^{i4z} - 40e^{i2z} + 15)}, \\
^{[5]} (\sin z)_g &= \frac{ie^{i3z/2}(e^{i4z} - 90e^{i2z} + 105)}{12(e^{i2z} + 1)}, & ^{[6]} (\sin z)_g &= \frac{-2i}{7e^{iz}(e^{i2z} + 3)}, \\
^{[7]} (\sin z)_g &= -4ie^{i3z/2}(e^{i2z} + 7), & ^{[8]} (\sin z)_g &= 0.
\end{aligned}$$

Функція $\sin z$ має лише 8 скінченних g -похідних 2-го типу, а отже, функція зображується скінченним Т-КФЛД. Нехай $z_* \in \mathcal{Z}$ належить області визначення обернених g -похідних 2-го типу функції $\sin z$, тоді з (6) випливає, що коефіцієнти Т-КФЛД набувають значень

$$\begin{aligned}
d_0(e^{\frac{iz}{2}}; z_*) &= \frac{2ie^{iz_*}}{e^{i2z_*} - 1}, & d_1(e^{\frac{iz}{2}}; z_*) &= \frac{i(e^{i2z_*} - 1)^2}{4e^{\frac{iz_*}{2}}(e^{i2z_*} + 1)}, \\
d_2(e^{\frac{iz}{2}}; z_*) &= \frac{-8ie^{iz_*}(e^{i2z_*} + 1)^2}{(e^{i2z_*} - 1)(3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1)}, \\
d_3(e^{\frac{iz}{2}}; z_*) &= \frac{-i(3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1)^2}{4e^{\frac{iz_*}{2}}(e^{i2z_*} + 1)(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)},
\end{aligned}$$

$$d_4(e^{\frac{iz}{2}}; z_*) = \frac{2i(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)^2}{e^{iz_*}(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)(3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_5(e^{\frac{iz}{2}}; z_*) = \frac{ie^{i3z_*/2}(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)^2}{12(e^{i2z_*} + 1)(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_6(e^{iz/2}; z_*) = -\frac{72i(e^{i2z_*} + 1)^2}{7e^{iz_*}(e^{i2z_*} + 3)(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)},$$

$$d_7(e^{iz/2}; z_*) = -\frac{49ie^{i3z_*/2}(e^{i2z_*} + 3)^2}{12(e^{i2z_*} + 1)}, \quad d_8(e^{iz/2}; z_*) = \frac{2i}{7e^{iz_*}(e^{i2z_*} + 3)}.$$

Отримали зображення функції $\sin z$ Т-КФЛД

$$\sin z = \left(d_0(e^{iz/2}; z_*) + \prod_{k=1}^8 \frac{e^{iz/2} - e^{iz_*/2}}{d_k(e^{iz/2}; z_*)} \right)^{-1}. \quad (12)$$

Легко показати, що коефіцієнти розвинення функції $e^{iz/2}$ в околі точки $z = z_*$ в Т-ЛД будуть такими:

$$b_0(z_*) = e^{iz_*/2}, \quad b_{2n-1}(z_*) = i(-1)^n 2(2n-1)e^{-iz_*/2},$$

$$b_{2n}(z_*) = (-1)^n 2e^{iz_*/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тоді після еквівалентних перетворень отримуємо розвинення в Т-ЛД

$$\mathbf{n}(z_*, z) = e^{iz/2} - e^{iz_*/2} = e^{iz_*/2} \left(\frac{z - z_*}{-2i} + \frac{z - z_*}{-2} + \frac{z - z_*}{6i} + \frac{z - z_*}{2} + \right. \\ \left. + \frac{z - z_*}{-10i} + \frac{z - z_*}{-2} + \dots + \frac{z - z_*}{(-1)^n 2(2n-1)i} + \frac{z - z_*}{(-1)^n 2} + \dots \right). \quad (13)$$

Використовуючи теорему 11.2.1 [18, с. 342], можна довести, що ланцюговий дріб (13) збігається до функції $e^{iz/2}$ на всій комплексній площині і на довільному компакт $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ збіжність буде рівномірною.

Підставляючи (13) у (12), отримуємо зображення функції Т-КФЛД

$$\sin z = \left(d_0(e^{iz/2}; z_*) + \prod_{k=1}^8 \frac{\mathbf{n}(z_*, z)}{d_k(e^{iz/2}; z_*)} \right)^{-1}.$$

Якщо $z_* = -i \ln 4$, то зображення функції $\sin z$ має вигляд

$$\sin z = \left(\frac{8i}{15} + \frac{\mathbf{n}(-i \ln 4, z)}{225i/136} + \frac{\mathbf{n}(-i \ln 4, z)}{-9248i/14415} + \frac{\mathbf{n}(-i \ln 4, z)}{-923521i/4488} + \frac{\mathbf{n}(-i \ln 4, z)}{-121i/78802} + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{n}(-i \ln 4, z)}{30258i/187} + \frac{\mathbf{n}(-i \ln 4, z)}{578i/5453} + \frac{\mathbf{n}(-i \ln 4, z)}{-35378i/51} + \frac{\mathbf{n}(-i \ln 4, z)}{i/266} \right)^{-1}.$$

Якщо в якості базис-функції вибрати $g(z) = \operatorname{tg} \frac{z}{4}$, то із (3) випливає, що функція $\sin z$ має лише сім скінченних перших обернених g -похідних 2-го типу:

$$\begin{aligned}
^{[0]}(\sin z)_g &= \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4}\right)^2}{4 \operatorname{tg} \frac{z}{4} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4}\right)}, & ^{[1]}(\sin z)_g &= \frac{-4 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} - 1\right)^2}{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 1\right) \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} - 6 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 1\right)}, \\
^{[2]}(\sin z)_g &= \frac{\operatorname{tg} \frac{z}{4} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 1\right)^2 \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} - 14 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 9\right)}{4 \left(\operatorname{tg}^6 \frac{z}{4} + 15 \operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 1\right)}, \\
^{[3]}(\sin z)_g &= \frac{-4 \left(3 \operatorname{tg}^8 \frac{z}{4} + 28 \operatorname{tg}^6 \frac{z}{4} - 2 \operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} + 4 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} - 1\right)}{\left(\operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} + 10 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 1\right) \left(3 \operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 3\right)}, \\
^{[4]}(\sin z)_g &= \frac{3 \operatorname{tg}^{10} \frac{z}{4} + 45 \operatorname{tg}^8 \frac{z}{4} - 50 \operatorname{tg}^6 \frac{z}{4} + 170 \operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} + 15 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 9}{16 \operatorname{tg} \frac{z}{4} \left(3 \operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} - 10 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} - 5\right)}, \\
^{[5]}(\sin z)_g &= \frac{-4 \left(3 \operatorname{tg}^6 \frac{z}{4} - 15 \operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} - 15 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} - 1\right)}{3 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 1\right) \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} - 6 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 1\right)}, \\
^{[6]}(\sin z)_g &= \frac{-\operatorname{tg} \frac{z}{4} \left(3 \operatorname{tg}^6 \frac{z}{4} - 21 \operatorname{tg}^4 \frac{z}{4} - 35 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{4} + 21\right)}{16}, & ^{[7]}(\sin z)_g &= -4.
\end{aligned}$$

Нехай точка $z_* \in \mathcal{Z}$ належить множині визначення всіх обернених g -похідних 2-го типу функції $\sin z$. Тоді, згідно з (6), в околі точки $z = z_*$ коефіцієнти Т-КФЛД будуть такими:

$$\begin{aligned}
d_0\left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_*\right) &= \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4}\right)^2}{4 \operatorname{tg} \frac{z_*}{4} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4}\right)}, & d_1\left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_*\right) &= \frac{-4 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} - 1\right)^2}{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right) \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 6 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right)}, \\
d_2\left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_*\right) &= \frac{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right)^2 \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 6 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right)}{4 \operatorname{tg} \frac{z_*}{4} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} - 1\right) \left(3 \operatorname{tg}^6 \frac{z_*}{4} + 15 \operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right)}, \\
d_3\left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_*\right) &= \\
&= \frac{4 \left(3 \operatorname{tg}^6 \frac{z_*}{4} + 15 \operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right)^2}{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right) \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 6 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right) \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} + 10 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right) \left(3 \operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 3\right)}, \\
d_4\left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_*\right) &= \frac{\left(\operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} + 10 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right)^2 \left(3 \operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 3\right)^2}{16 \operatorname{tg} \frac{z_*}{4} \left(3 \operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 10 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} - 5\right) \left(3 \operatorname{tg}^6 \frac{z_*}{4} + 15 \operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1\right)}, \\
d_5\left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_*\right) &=
\end{aligned}$$

$$= \frac{16 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} \left(3 \operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 10 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} - 5 \right)^2}{3 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1 \right) \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 6 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1 \right) \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} + 10 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1 \right) \left(3 \operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 3 \right)},$$

$$d_6 \left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_* \right) = \frac{-9 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1 \right)^2 \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 6 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1 \right)^2}{16 \operatorname{tg} \frac{z_*}{4} \left(3 \operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 10 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} - 5 \right)},$$

$$d_7 \left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_* \right) = \frac{-16}{3 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1 \right) \left(\operatorname{tg}^4 \frac{z_*}{4} - 6 \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} + 1 \right)}.$$

Функцію $\sin z$ можна зобразити Т-КФЛД таким чином:

$$\sin z = \left(d_0 \left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_* \right) + \prod_{k=1}^7 \frac{\operatorname{tg} \frac{z}{4} - \operatorname{tg} \frac{z_*}{4}}{d_k \left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_* \right)} \right)^{-1}. \tag{14}$$

За аналогією з теоремою 8.5.5 [18, с. 251] можна довести, що функція $\operatorname{tg} \frac{z}{4}$ має обернені похідні Тіле довільного порядку, які обчислюються за рекурентним співвідношенням, а отже, функція може бути розвинена в Т-ЛД. Після еквівалентних перетворень різниця $\operatorname{tg} \frac{z}{4} - \operatorname{tg} \frac{z_*}{4}$ зображується Т-ЛД вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(z_*, z) = \operatorname{tg} \frac{z}{4} - \operatorname{tg} \frac{z_*}{4} &= \frac{(z - z_*) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{z_*}{4} \right)}{4} + \frac{(z - z_*) \operatorname{tg} \frac{z_*}{4}}{-1} + \\ &+ \frac{z - z_*}{12 \operatorname{tg} \frac{z_*}{4}} + \frac{z - z_*}{1} + \frac{(z - z_*) \operatorname{tg} \frac{z_*}{4}}{20} + \dots \\ \dots + \frac{z - z_*}{1} + \frac{(z - z_*) \operatorname{tg} \frac{z_*}{4}}{4(4n + 1)} + \frac{(z - z_*) \operatorname{tg} \frac{z_*}{4}}{-1} + \frac{z - z_*}{4(4n + 3) \operatorname{tg} \frac{z_*}{4}} + \dots \end{aligned} \tag{15}$$

Ланцюговий дріб (15) збігається до функції $\operatorname{tg} \frac{z}{4}$ на всій комплексній площині \mathbb{C} , за винятком нулів та особливих точок функції, і на довільному компактi $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ збіжність буде рівномірною.

Підставимо (15) у (14) і отримаємо зображення функції $\sin z$ Т-КФЛД

$$\sin z = \left(d_0 \left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_* \right) + \prod_{k=1}^7 \frac{\mathbf{q}(z_*, z)}{d_k \left(\operatorname{tg} \frac{z}{4}; z_* \right)} \right)^{-1}.$$

В окремому випадку, коли $z_* = \frac{4\pi}{3}$, маємо

$$\sin z = \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3} + \frac{\mathbf{q}\left(\frac{4\pi}{3}, z\right)}{\frac{3}{2}} + \frac{\mathbf{q}\left(\frac{4\pi}{3}, z\right)}{\frac{8\sqrt{3}}{39}} + \frac{\mathbf{q}\left(\frac{4\pi}{3}, z\right)}{\frac{-169}{30}} + \frac{\mathbf{q}\left(\frac{4\pi}{3}, z\right)}{\frac{-150\sqrt{3}}{13}} + \dots \right)^{-1}$$

$$+ \frac{\mathfrak{q}\left(\frac{4\pi}{3}, z\right)}{\frac{-1}{30}} + \frac{\mathfrak{q}\left(\frac{4\pi}{3}, z\right)}{24\sqrt{3}} + \frac{\mathfrak{q}\left(\frac{4\pi}{3}, z\right)}{\frac{1}{6}} \Big)^{-1},$$

де

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}\left(\frac{4\pi}{3}, z\right) = & \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{1} + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/3} + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{9} + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{4\sqrt{3}/3} + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{5} + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/3} + \\ & + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{21} + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{4\sqrt{3}/3} + \dots + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{4n+1} + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/3} + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{3(4n+3)} + \frac{z - \frac{4\pi}{3}}{4\sqrt{3}/3} + \dots \end{aligned}$$

Функція $\cos z$. Щоб знайти зображення функції $\cos z$ Т-КФЛД, виберемо в якості базис-функції $g(z) = e^{iz/3}$. Обернені g -похідні 2-го типу функції $\cos z$ знаходимо за формулами (3). Маємо

$$\begin{aligned} [0] (\cos z)_g &= \frac{2e^{iz}}{e^{i2z} + 1}, & [1] (\cos z)_g &= -\frac{(e^{i2z} + 1)^2}{6e^{i2z/3}(e^{i2z} - 1)}, & [2] (\cos z)_g &= \frac{-2e^{iz}(e^{i2z} + 2)}{2e^{i4z} - 9e^{i2z} + 1}, \\ [3] (\cos z)_g &= \frac{10e^{i6z} - 125e^{i4z} + 80e^{i2z} - 1}{6e^{i2z/3}(2e^{i4z} + 23e^{i2z} + 2)}, & [4] (\cos z)_g &= \frac{2e^{iz}(e^{i4z} - 65e^{i2z} + 10)}{10e^{i6z} + 395e^{i4z} + 215e^{i2z} + 1}, \\ [5] (\cos z)_g &= \frac{-3e^{i4z/3}(5e^{i6z} + 525e^{i4z} + 1015e^{i2z} + 42)}{2(e^{i2z} - 1)(e^{i4z} - 245e^{i2z} + 1)}, \\ [6] (\cos z)_g &= \frac{-2(28e^{i4z} + 133e^{i2z} + 1)}{e^{iz}(e^{i6z} - 707e^{i4z} + 2653e^{i2z} - 84)}, \\ [7] (\cos z)_g &= \frac{e^{i4z/3}(e^{i6z} - 1708e^{i4z} + 18186e^{i2z} - 2520)}{18(4e^{i4z} + 73e^{i2z} + 4)}, \\ [8] (\cos z)_g &= \frac{2(4e^{i2z} - 1)}{5e^{iz}(e^{i4z} + 53e^{i2z} + 12)}, \\ [9] (\cos z)_g &= \frac{11e^{i4z/3}(e^{i4z} + 129e^{i2z} + 90)}{18(1 - e^{i2z})}, & [10] (\cos z)_g &= \frac{-2}{55e^{iz}(e^{i2z} - 3)}, \\ [11] (\cos z)_g &= \frac{33e^{i4z/3}(2e^{i2z} - 15)}{2}, & [12] (\cos z)_g &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки $([12](\cos z)_g)' = 0$, то $[13](\cos z)_g = \infty$ і Т-КФЛД „обривається”. Якщо точка $z_* \in \mathcal{Z}$ належить області визначення обернених g -похідних 2-го типу функції $\cos z$, то, згідно з (6), в околі точки $z = z_*$ коефіцієнти Т-КФЛД набувають таких значень:

$$\begin{aligned} d_0(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{2e^{iz_*}}{e^{i2z_*} + 1}, & d_1(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{-(e^{i2z_*} + 1)^2}{6e^{\frac{i2z_*}{3}}(e^{i2z_*} - 1)}, \\ d_2(e^{\frac{z}{3}}; z_*) &= \frac{-6e^{iz_*}(e^{i2z_*} - 1)^2}{(e^{i2z_*} + 1)(2e^{i4z_*} - 9e^{i2z_*} + 1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_3(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{(2e^{i4z_*} - 9e^{i2z_*} + 1)^2}{2e^{i2z_*}/3(e^{i2z_*} - 1)(2e^{i4z_*} + 23e^{i2z_*} + 2)}, \\
 d_4(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{6e^{iz_*}(2e^{i4z_*} + 23e^{i2z_*} + 2)^2}{(2e^{i4z_*} - 9e^{i2z_*} + 1)(10e^{i6z_*} + 395e^{i4z_*} + 215e^{i2z_*} + 1)}, \\
 d_5(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{-(10e^{i6z_*} + 395e^{i4z_*} + 215e^{i2z_*} + 1)^2}{6e^{i2z_*}/3(e^{i2z_*} - 1)(e^{i4z_*} - 245e^{i2z_*} + 1)(2e^{i4z_*} + 23e^{i2z_*} + 2)}, \\
 d_6(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{-2(e^{i2z_*} - 1)^2(e^{i4z_*} - 245e^{i2z_*} + 1)^2}{e^{iz_*}(e^{i6z_*} - 707e^{i4z_*} + 2653e^{i2z_*} - 84)(10e^{i6z_*} + 395e^{i4z_*} + 215e^{i2z_*} + 1)}, \\
 d_7(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{e^{i4z_*}/3(e^{i6z_*} - 707e^{i4z_*} + 2653e^{i2z_*} - 84)^2}{18(e^{i2z_*} - 1)(e^{i4z_*} - 245e^{i2z_*} + 1)(4e^{i4z_*} + 73e^{i2z_*} + 4)}, \\
 d_8(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{18(4e^{i4z_*} + 73e^{i2z_*} + 4)^2}{5e^{iz_*}(e^{i4z_*} + 53e^{i2z_*} + 12)(e^{i6z_*} - 707e^{i4z_*} + 2653e^{i2z_*} - 84)}, \\
 d_9(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{-5e^{i4z_*}/3(e^{i4z_*} + 53e^{i2z_*} + 12)^2}{2(e^{i2z_*} - 1)(4e^{i4z_*} + 73e^{i2z_*} + 4)}, \\
 d_{10}(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{-18(e^{i2z_*} - 1)^2}{11e^{iz_*}(e^{i2z_*} - 3)(e^{i4z_*} + 53e^{i2z_*} + 12)}, \\
 d_{11}(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) &= \frac{605e^{i4z_*}/3(e^{i2z_*} - 3)^2}{18(e^{i2z_*} - 1)}, \quad d_{12}(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{2}{55e^{iz_*}(e^{i2z_*} - 1)}.
 \end{aligned}$$

Зображення функції $\cos z$ в околі точки $z = z_*$ Т-КФЛД має вигляд

$$\cos z = \left(d_0(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) + \prod_{k=1}^{12} \frac{e^{\frac{iz}{3}} - e^{\frac{iz_*}{3}}}{d_k(e^{\frac{iz}{3}}; z_*)} \right)^{-1}. \tag{16}$$

Оскільки функція $e^{iz/3}$ має обернені похідні Тіле довільного порядку, які знаходяться за рекурентним співвідношенням, то коефіцієнти розвинення функції в ланцюговий дріб Тіле в околі точки $z_* \in \mathcal{Z}$ є такими:

$$b_0(z_*) = e^{iz_*/3}, \quad b_{2n-1}(z_*) = (-1)^n 3(2n-1)e^{-iz_*/3}i, \quad b_{2n}(z_*) = (-1)^n 2e^{iz_*/3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Після еквівалентних перетворень маємо розвинення в Т-ЛД

$$\mathbf{u}(z_*, z) = e^{\frac{iz}{3}} - e^{\frac{iz_*}{3}} = e^{\frac{iz_*}{3}} \left(\frac{z - z_*}{-3i} + \frac{z - z_*}{-2} + \dots + \frac{z - z_*}{(-1)^n 3(2n-1)i} + \frac{z - z_*}{(-1)^n 2} + \dots \right). \tag{17}$$

Можна довести, що ланцюговий дріб (17) буде збігатися до функції $e^{iz/3}$ на всій комплексній площині і на довільному компакт $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ збіжність буде рівномірною.

Підставляючи (17) у (16), отримуємо зображення функції $\cos z$ Т-КФЛД

$$\cos z = \left(d_0(e^{iz/3}; z_*) + \prod_{k=1}^{12} \frac{\mathbf{u}(z_*, z)}{d_k(e^{iz/3}; z_*)} \right)^{-1}.$$

В окремому випадку, коли $z_* = -i \ln 2$, зображення функції $\cos z$ набирає вигляду

$$\begin{aligned} \cos z = & \left(\frac{4}{5} + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{-25 \sqrt[3]{2}/36} + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{36/5} + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{\sqrt[3]{2}/168} + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{-7056/869} + \right. \\ & + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{755161 \sqrt[3]{2}/53928} + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{103041/69520} + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{-160 \sqrt[3]{2}/2889} + \\ & \left. + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{-27/20} + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{-800 \sqrt[3]{2}/3} + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{-27/880} + \frac{\mathbf{u}(-i \ln 2, z)}{1/55} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Можна також отримати інше зображення функції $\cos z$ Т-КФЛД, якщо за базис-функцію вибрати $g(z) = \operatorname{ctg} \frac{z}{2}$. Обернені g -похідні 2-го типу функції $\cos z$ будуть такими:

$$\begin{aligned} {}^{[0]}(\cos)_g &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2} + 1}{\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2} - 1}, & {}^{[1]}(\cos)_g &= \frac{-\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2} - 1\right)^2}{4 \operatorname{ctg} \frac{z}{2}}, & {}^{[2]}(\cos)_g &= \frac{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2} - 1}{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2} + 1}, \\ {}^{[3]}(\cos)_g &= 2 \operatorname{ctg} \frac{z}{2} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2} + 1\right), & {}^{[4]}(\cos)_g &= 1. \end{aligned}$$

Оскільки $({}^{[4]}(\cos)_g)' = 0$, то Т-КФЛД „обривається” на 4-му поверсі. В точці $z_* \in \mathcal{Z}$, яка належить області визначення обернених g -похідних 2-го типу функції $\cos z$, коефіцієнти Т-КФЛД набувають значень

$$\begin{aligned} d_0 \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2}; z_* \right) &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{z_*}{2} + 1}{\operatorname{ctg}^2 \frac{z_*}{2} - 1}, & d_1 \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2}; z_* \right) &= \frac{\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{z_*}{2} - 1\right)^2}{-4 \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}}, \\ d_2 \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2}; z_* \right) &= \frac{-8 \operatorname{ctg}^2 \frac{z_*}{2}}{\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{z_*}{2} - 1\right)^2 \left(3 \operatorname{ctg}^2 \frac{z_*}{2} + 1\right)}, \\ d_3 \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2}; z_* \right) &= \frac{\left(3 \operatorname{ctg}^2 \frac{z_*}{2} + 1\right)^2}{4 \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}}, & d_4 \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2}; z_* \right) &= \frac{2}{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{z_*}{2} + 1}. \end{aligned}$$

Функція $\cos z$ зображується Т-КФЛД таким чином:

$$\cos z = \left(d_0 \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2}; z_* \right) + \prod_{k=1}^4 \frac{\operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}}{d_k \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2}; z_* \right)} \right)^{-1}. \quad (18)$$

Функція $\operatorname{ctg} \frac{z}{2}$ має обернені похідні Тіле всіх порядків, які визначаються за рекурентним співвідношенням, а отже, функція може бути розвинена в Т-ЛД. Як і у попередніх випадках, отримуємо ланцюговий дріб

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(z_*, z) = \operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2} &= \frac{(z - z_*) \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{z_*}{2}\right)}{-2} + \frac{(z - z_*) \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}}{-1} + \frac{z - z_*}{-6 \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}} + \\ &+ \frac{z - z_*}{1} + \frac{(z - z_*) \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}}{-10} + \frac{(z - z_*) \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}}{-1} + \frac{z - z_*}{-14 \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}} + \dots \\ \dots + \frac{z - z_*}{1} + \frac{(z - z_*) \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}}{-2(4n + 1)} + \frac{(z - z_*) \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}}{-1} + \frac{z - z_*}{-2(4n + 3) \operatorname{ctg} \frac{z_*}{2}} + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

який збігається до функції $\operatorname{ctg} \frac{z}{2}$ на всій комплексній площині, за винятком нулів та особливих точок функції. На довільному компакт $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ланцюговий дріб (19) збігається рівномірно.

Підставивши (19) у (18), отримаємо

$$\cos z = \left(d_0 \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2}; z_* \right) + \prod_{k=1}^4 \frac{\mathbf{v}(z_*; z)}{d_k \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2}; z_* \right)} \right)^{-1}.$$

В окремому випадку при $z_* = \frac{2\pi}{3}$ зображення функції $\cos z$ має вигляд

$$\cos z = \left(2 + \frac{\mathbf{v}\left(\frac{2\pi}{3}; z\right)}{-\sqrt{3}/3} + \frac{\mathbf{v}\left(\frac{2\pi}{3}; z\right)}{-6/5} + \frac{\mathbf{v}\left(\frac{2\pi}{3}; z\right)}{25\sqrt{3}/3} + \frac{\mathbf{v}\left(\frac{2\pi}{3}; z\right)}{1/5} \right)^{-1},$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\left(\frac{2\pi}{3}, z\right) &= \frac{z - \frac{2\pi}{3}}{-1/2} + \frac{z - \frac{2\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/2} + \frac{z - \frac{2\pi}{3}}{-9/2} + \frac{z - \frac{2\pi}{3}}{4\sqrt{3}/2} + \dots \\ &\dots + \frac{z - \frac{2\pi}{3}}{-(4n + 1)/2} + \frac{z - \frac{2\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/2} + \frac{z - \frac{2\pi}{3}}{-3(4n + 3)/2} + \frac{z - \frac{2\pi}{3}}{4\sqrt{3}/2} + \dots. \end{aligned}$$

Зауваження 3. У статті отримано зображення функцій $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ скінченними Т-КФЛД. У кожному з отриманих зображень використовувалось розвинення базис-функції $g(z)$ у ланцюговий дріб Тіле. Можна отримати інші зображення вказаних функцій, якщо базис-функцію розвинути в квазіобернений ланцюговий дріб типу Тіле [18].

Література

1. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.

3. Кучмінська Х. Й. Двовимірні неперервні дробі. – Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, 2010. – 218 с.
4. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
5. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 203 с.
6. Cuyt A., Brevik Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B. Handbooks of continued fractions for special functions. – Berlin etc.: Springer, 2008. – xvi+431 p.
7. Lorentzen L., Waadeland H. Continue fraction with applications. – Amsterdam etc.: North-Holland, 1992. – 606 p.
8. Olds C. D. Continued fractions. New mathematical library. – New York: Random House, 1963. – Vol. 9. – viii+162 p.
9. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1957. – Bd II. – 315 S.
10. Schweiger F. Continues fractions and their generalizations: A short history of f -expansion. – Boston, MA: Docent Press, 2016. – vi+184 p.
11. Wall H. S. Analytic theory of continued fractions. – New York: D. Van Nostrand Co., 1948. – 433 p.
12. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 508 с.
13. Бейкер Дж. (мл.), Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
14. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.
15. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В. Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Ін-т математики НАН України, 1999. – 278 с.
16. Макаров В. Л., Демків І. І. Інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб типу Тіле // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 4. – С. 44–50.
17. Thiele T. N. Interpolationsrechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. – xii+175 S.
18. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами. – Ужгород: Гражда, 2016. – 412 с.
19. Pahirya M. M. A reciprocal g -derivatives of 2-nd type and its properties // Int. J. Adv. Res. Math. – 2017. – 8. – P. 1–11.
20. Lange L. J. δ -Fraction expansions of analytic functions // Anal. Theory Contin. Fract. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1982. – P. 152–175.
21. Дзядык В. К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ // Мат. сб. – 1979. – 108, вып. 2. – С. 247–267.
22. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.

Одержано 02.05.17



МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26

тел./факс +380-3131-21109

Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua

E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua

Веб-сайт Інституційного репозитарію Наукової бібліотеки МДУ: <http://dspace.msu.edu.ua:8080>

Веб-сайт Наукової бібліотеки МДУ: <http://msu.edu.ua/library/>