Міністерство освіти і науки України
Мукачівський державний університет
Кафедра психології

Курс лекцій з дисципліни

Статистичні методи у психології

для студентів
денної та заочної форми навчання
спеціальності 053 Психологія
ОС «Магістр»

2019
Мукачево

УДК 159.9.018(042.3)

Розглянуто та рекомендовано до друку Науково-методичною радою Мукачівського державного університету протокол № 5 від «19» грудня 2019 р.
Розглянуто та схвалено на засіданні кафедри психології, протокол № 4 від «31» жовтня 2019 р.

Рецензент: Стегней М.І. доктор економічних наук, професор декан факультету економіки, управління та інженерії МДУ

С 78
Статистичні методи у психології: курс лекцій з дисципліни для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності 053 Психологія ОС «Магістр» / І.О. Корнієнко, О.Ю. Воронова.– Мукачево: МДУ, 2019. – 44 с. (1.8, авт.арк).

Видання містить лекційні матеріали з дисципліни «Статистичні методи у психології» перелік рекомендованих джерел. Призначене для використання студентами в процесі виконання самостійної роботи та підготовки до практичних занять. Курс лекцій розроблений у відповідності до програми дисципліни «Статистичні методи у психології».

© *МДУ*

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Метою курсу лекцій з дисципліни «Статистичні методи у психології» є ознайомлення з основними теоретичними положеннями і вироблення у студентів навичок застосування математичних методів для обробки даних, одержаних при проведенні психологічних досліджень; використання набутих знань при вивченні ряду фахових предметів, підготовці курсової і кваліфікаційної роботи в майбутній професійній діяльності.

Завданнями вивчення курсу є:

- ✓ розкрити суть математичних методів обробки результатів психологічних досліджень і особливості їхнього використання;
- ✓ застосовувати математичні методи при обробці результатів досліджень;
- ✓ інтерпретація результатів і опис у різних видах робіт.
- ✓ ознайомлення з можливостями обробки результатів досліджень за допомогою комп'ютерних засобів.
- ✓ розвиток самостійності у навчальній і професійній діяльності.

Курс лекцій з дисципліни «Статистичні методи у психології» для студентів гуманітарного факультету охоплює всі розділи типової програми і відповідає всім вимогам до Закладів вищої освіти.

Викладання дисципліни має на меті засвоєння знань та практичних навиків застосування математичних методів для обробки даних, одержаних при проведенні психологічних досліджень.

Об'єкт: статистичні критерії, їх застосування при обробці та інтерпретації результатів психологічних досліджень

Зміст курсу: математичні методи в психологічних дослідженнях; типи шкал, таблиці і графіки; первинні описові статистики; нормальний закон розподілу; коефіцієнти кореляції, кореляційний аналіз; параметричні методи порівняння вибірок; непараметричні методи порівняння вибірок, факторний аналіз, кластерний аналіз; PSPP: можливості та процедура введення даних; PSPP: базовий аналіз, PSPP: виведення, форматування і аналіз результатів.

Знати:

- теоретичне обґрунтування вибору статистичних критерії для досягнення мети досліджень;
- основні існуючі математичні методи обробки результатів психологічних досліджень і особливості їхнього використання;
- можливості обробки результатів досліджень за допомогою комп'ютерних засобів.

Вміти:

- визначати, яким методом проводити обробку одержаних при проведенні досліджень числових даних;
- застосовувати математичні методи для обробки даних, користуватися комп'ютерними засобами для обробки експериментальних даних;
- самостійно засвоювати нові, не охоплені курсом методи обробки експериментальних даних.

Загальні компетентності:

ЗК 1 – Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК 2 – Здатність проведення досліджень на відповідному рівні.
ЗК 6 – Здатність діяти на основі етичних міркувань (мотивів).
ЗК 8 – Здатність розробляти та управляти проектами.

Спеціальні (фахові компетентності):

СК 1 – Здатність здійснювати теоретичний, методологічний та емпіричний аналіз актуальних проблем психологічної науки та / або практики.

СК 2 – Здатність самостійно планувати, організовувати та здійснювати психологічне дослідження з елементами наукової новизни та / або практичної значущості.

СК 3 – Здатність обирати і застосувати валідні та надійні методи наукового дослідження та/або доказові методики і техніки практичної діяльності.

СК 4 – Здатність здійснювати практичну діяльність (тренінгову, психотерапевтичну, консультаційну, психодіагностичну та іншу залежно від спеціалізації) з використанням науково верифікованих методів та технік.

СК 9 – Здатність дотримуватися у фаховій діяльності норм професійної етики та керуватися загальнолюдськими цінностями.

Тема 1: ГЕНЕРАЛЬНА СУКУПНІСТЬ І ВИБІРКА

Основні поняття: генеральна сукупність, гіпотеза, вибірка, репрезентативна вибірка, залежна вибірка, незалежна вибірка.

1. Поняття генеральної сукупності і вибірки

Дослідження зазвичай починається з деякого припущення, що вимагає перевірки із залученням фактів.

Це припущення **–** ***гіпотеза*** – формулюється стосовно зв'язку явищ або властивостей в деякій сукупності об'єктів.

Сукупність об'єктів або спостережень, всі елементи якої підлягають вивченню при статистичному аналізі, називається *генеральною сукупністю*.

Вибірка – це обмежена за чисельністю група об'єктів (у психології - респондентів), спеціально відбирається з генеральної сукупності для вивчення її властивостей.

Відповідно, вивчення на вибірці властивостей генеральної сукупності називається вибірковим дослідженням. Практично всі психологічні дослідження є вибірковими, а їх висновки поширюються на генеральні сукупності.

Таким чином, після того, як сформульовано гіпотезу та визначено відповідні генеральні сукупності, перед дослідником *виникає проблема організації вибірки*.

Вибірка повинна бути такою, щоб була обґрунтована генералізація висновків вибіркового дослідження – узагальнення, поширення їх на генеральну сукупність.

Основні критерії обґрунтування висновків дослідження **–** це репрезентативність вибірки та статистична достовірність (емпіричних) результатів.

Репрезентативність вибірки – іншими словами, її показність – це здатність вибірки представляти досліджувані явища досить повно – з точки зору їх мінливості в генеральної сукупності.

Звичайно, повне уявлення про досліджуване явище, у всьому його діапазоні і нюансах мінливості, може дати тільки генеральна сукупність. Тому репрезентативність завжди обмежена в тій мірі, в якій обмежена вибірка. І саме репрезентативність вибірки є основним критерієм при визначенні меж генералізації висновків дослідження. Тим не менш, існують прийоми, що дозволяють отримати достатню для дослідника репрезентативність вибірки.

Перший і основний прийом - це простий випадковий (рандомізований) відбір.

Він передбачає забезпечення таких умов, щоб кожен член генеральної сукупності мав рівні з іншими шанси потрапити до вибірки. Випадковий відбір забезпечує можливість попадання у вибірку самих різних представників генеральної сукупності.

Статистична достовірність або статистична значимість результатів дослідження визначається за допомогою методів статистичного висновку. Зараз лише зазначимо, що вони висувають певні вимоги до чисельності чи обсягу вибірки.

Суворих рекомендацій до попереднього визначення необхідного обсягу вибірки не існує. Відповідь на питання про необхідну і достатню її чисельність дослідник зазвичай отримує занадто пізно – тільки після аналізу даних вже обстеженої вибірки. Отже, можна сформулювати найбільш загальні рекомендації:

□ Найбільший обсяг вибірки необхідний при розробці діагностичної методики - від 200 до 1000-2500 осіб.

□ Якщо необхідно порівнювати 2 вибірки, їх загальна чисельність повинна бути не менше 50 осіб; чисельність порівнюваних вибірок має бути приблизно однаковою.

□ Якщо вивчається взаємозв'язок між будь-якими властивостями, то обсяг вибірки повинен бути не менше 30-35 осіб.

□ Чим більше мінливість досліджуваної властивості, тим більшим повинен бути обсяг вибірки. Тому мінливість можна зменшити, збільшуючи однорідність вибірки, наприклад, за статтю, віком і тощо. При цьому, природно, зменшуються можливості генералізації висновків.

2. Залежні і незалежні вибірки.

Звичайна ситуація дослідження, коли властивість, що цікавить дослідника вивчається на двох або більше вибірках з метою їх подальшого порівняння. Ці вибірки можуть перебувати в різних співвідношеннях – залежно від процедури їх організації.

Незалежні вибірки характеризуються тим, що ймовірність відбору будь-якого досліджуваного однієї вибірки не залежить від відбору будь-якого з випробуваних іншої вибірки.

Навпаки, ***залежні вибірки*** характеризуються тим, що кожному випробуваному однієї вибірки поставлений у відповідність за певним критерієм випробуваний з іншої вибірки.

У загальному випадку залежні вибірки припускають попарний підбір досліджуваних в порівнянні вибірки, а незалежні вибірки – незалежний відбір досліджуваних. Слід зазначити, що випадки «частково залежних» (або «частково незалежних») вибірок неприпустимі: це непередбачуваним чином порушує їх репрезентативність.

Можна виділити дві парадигми психологічного дослідження. Так звана R-методологія передбачає вивчення мінливості деякої властивості (психологічної) під впливом деякого фактора або іншої властивості. Вибіркою є множина досліджуваних. Інший підхід, (Q-методологія, припускає дослідження мінливості суб'єкта (одиничного) під впливом різних стимулів (умов, ситуацій тощо.).

ТЕМА 2: ВИМІРЮВАННЯ І ШКАЛИ

Основні поняття: метричні шкали, неметричні шкали, інтервальна шкала, абсолютна шкала, рангова шкала, номінативна шкала.

1. Поняття вимірювань

Будь-яке емпіричне наукове дослідження починається з того, що дослідник фіксує вираженість властивості, яка його цікавить (або властивостей) в об'єкта або об'єктів дослідження, як правило за допомогою чисел. Таким чином, слід розрізняти об'єкти дослідження (в психології це частіше всього люди, випробовувані), їх властивості (те, що цікавить дослідника, становить предмет вивчення) і ознаки, що відображають в числовій шкалі вираженість властивостей.

Вимірювання в межах здійснених дослідником операцій – це приписування об'єкту числа за певним правилом. Це правило встановлює відповідність між вимірюваною властивістю об'єкта і результатом вимірювання – *ознакою.* У повсякденній свідомості, як правило, немає необхідності розділяти властивості предметів та їх ознаки: такі властивості предметів, як вага і довжина, ми ототожнюємо, відповідно, з кількістю грамів і сантиметрів. Якщо немає необхідності у вимірі, ми обмежуємося порівняльними судженнями: цей чоловік тривожний, а цей – ні, цей більш кмітливий, ніж інший, і т. д.

У науковому дослідженні нам винятково важливо розуміти, що точність, з якою ознака відображає вимірювану властивість, залежить від процедури (операції) вимірювання.

Залежно від того, яка операція лежить в основі вимірювання, виділяють так звані вимірювальні шкали. Вони ще називаються шкалами С. Стівенса, іменем вченого-психолога, який їх запропонував. Ці шкали встановлюють співвідношення між властивостями чисел і вимірюваною властивістю об'єктів.

Шкали поділяють на ***метричні*** (якщо є або може бути встановлена одиниця виміру) і ***неметричні*** (якщо одиниці вимірювання не можуть бути встановлені).

2.Вимірювальні шкали

Номінативна шкала (неметрична), або шкала найменувань. В її основі лежить процедура, яка, зазвичай, не асоціюється з вимірюванням. Користуючись певним правилом, об'єкти групуються за різними класами так, щоб усередині класу вони були ідентичні за вимірюваною властивістю. Кожному класу дається найменування та позначення, зазвичай числове. Потім кожному об'єкту присвоюється відповідне позначення.

При порівнянні об'єктів ми можемо зробити висновок тільки про те, чи належать вони до одного або різних класів, тотожні чи ні за вимірюваною властивістю. Незважаючи на такі обмеження, номінативні шкали широко використовуються в психології, і до них можна застосовувати спеціальні процедури обробки та аналізу даних.

Рангова, або порядкова шкала (неметрична) (як результат ранжування). Як випливає з назви, вимірювання в цій шкалі передбачає приписування об'єктам чисел в залежності від ступеня вираженості вимірювальної властивості.

Існує декілька способів здійснення вимірювань в порядковій шкалі. Але зміст не змінюється: при порівнянні випробовуваних один з одним ми можемо сказати, більше чи менше виражена властивість, але не можемо сказати, наскільки більше або наскільки менше вона виражена, а вже тим більше – у скільки разів більше або менше. При вимірюванні в ранговій шкалі, таким чином, з усіх властивостей чисел враховується те, що вони різні, і те, що одне число більше, ніж інше.

При ранжируванні «вручну», а не за допомогою комп'ютера, слід мати на увазі дві обставини:

1. Встановити для себе і запам'ятати порядок ранжування. Ви можете ранжувати випробовуваних за їх «місцем в групі»: ранг 1 присвоюється тому, у кого найменша вираженість ознаки, і далі – збільшення рангу в міру збільшення рівня ознаки. Або можна ранг 1 приписувати тому, у кого ознака яскраво виражена, 1-е місце даної ознаки (наприклад, «найшвидший»). Суворих правил вибору тут немає, але важливо пам'ятати, в якому напрямку рангувалася ознака.

2. Дотримуватись правила ранжування для з'язаних рангів, коли двоє або більше досліджуваних мають однакову вираженість вимірюваної властивості. У цьому випадку таким випробуваним присвоюється один і той самий, середній ранг.

Інтервальна шкала (метрична). Це такий вимір, при якому числа відображають не тільки відмінності між об'єктами у рівні вираженості властивості (характеристика порядкової шкали), але й те, наскільки більше або менше виражена властивість. Рівним різницям між числами в цій шкалі відповідають рівні різниці в рівні вираженості виміряної властивості. Інакше кажучи, вимірювання в цій шкалі передбачає можливість застосування одиниці виміру (метрики). Об'єкту присвоюється число одиниць виміру, пропорційне вираженості вимірюваної властивості.

Інтервальні вимірювання широко використовуються в психології. Прикладом можуть бути тестові шкали, які спеціально вводяться при обґрунтуванні рівноінтервальності (метричності) тестової шкали (IQ Векслера, стени, Z-шкала тощо.).

Абсолютна шкала, або шкала відносин (метрична). Вимірювання в цій шкалі відрізняється від інтервального тільки тим, що в ній встановлюється нульова точка, відповідна повній відсутності вираженості вимірюваної властивості.

В силу абсолютності нульової точки, при порівнянні об'єктів ми можемо сказати не тільки про те, наскільки більше або менше виражена властивість, а й про те, у скільки разів (на скільки відсотків і т.п.) більше або менше вона виражена. Вимірявши час вирішення завдання парою досліджуваних, ми можемо сказати не тільки про те, хто і на скільки секунд (хвилин) вирішив завдання швидше, але і про те, у скільки разів (на скільки відсотків) швидше.

Перераховані шкали корисно характеризувати ще й за ознакою їх диференціюючої спроможності (потужності). У цьому відношенні шкали в міру зростання потужності розташовуються таким чином: номінативна, рангова, інтервальна , абсолютна. Таким чином, неметричні шкали свідомо менш потужні – вони відображають менше інформації про відмінність об'єктів (випробовуваних) за вимірюваною властивістю, і, навпаки, метричні шкали більш потужні, вони краще диференціюють випробуваних.

Визначення того, в якій *шкалі виміряне явище* (представлених ознак), – ключовий момент аналізу даних: будь-який наступний крок, вибір будь-якого методу залежить саме від цього.

Зазвичай ідентифікація номінальної шкали, її диференціація від рангової, а тим більше від метричної шкали не викликає особливих проблем.

Значно складніше визначити відмінність між порядковою та метричною шкалами. Проблема пов'язана з тим, що вимірювання в психології, як правило, непрямі. Безпосередньо ми вимірюємо деякі спостережувані явища або події: кількість відповідей на питання, чи завдань, вирішених за відведений час, або час вирішення набору завдань і т. д.

ТЕМА 3: ТАБЛИЧНЕ І ГРАФІЧНЕ ОФОРМЛЕННЯ

Основні поняття: гістограма розподілу частот, графік накопичених частот, полігон розподілу частот, таблиці абсолютних частот, крива розподілу.

1. Таблиця вихідних даних

Зазвичай в ході дослідження ознака, що цікавить дослідника вимірюється не в одного-двох, а у багатьох об'єктів (випробовуваних). Крім того, кожен об'єкт характеризується не одним, а цілим рядом ознак, вимірюваних в різних шкалах. Одні ознаки представлені в номінативній шкалі і вказують на приналежність випробуваних до тієї чи іншої групи (стать, професія, контрольна або експериментальна група тощо). Інші ознаки можуть бути представлені в порядковій або метричній шкалі, тому результати вимірювання для подальшого аналізу найчастіше представляють у вигляді таблиці вихідних даних. Кожен рядок такої таблиці зазвичай відповідає одному об'єкту, а кожен стовпець – одній вимірюваній ознаці. Таким чином, вихідною формою представлення даних є таблиця типу «об'єкт – ознака». У ході подальшого аналізу кожна ознака виступає в якості змінної величини, або просто – змінної, значення якої міняються від об'єкта до об'єкта.

2. Таблиці і графіки розподілу частот

Як правило, аналіз даних починається з вивчення того, як часто зустрічаються ті чи інші значення ознаки (змінної), що цікавить дослідника в наявному масиві спостережень. Для цього будуються таблиці і графіки розподілу частот. Нерідко вони є основою для отримання цінних змістовних висновків дослідження. Якщо ознака приймає лише кілька можливих значень (до 10-15), то таблиця розподілу частот показує наскільки часто зустрічається кожне значення ознаки. Якщо вказується, скільки разів зустрічається кожне значення ознаки, то це – таблиця абсолютних частот розподілу, якщо вказується частка спостережень, що припадають на те чи інше значення ознаки, то говорять про відносні частоти розподілу.

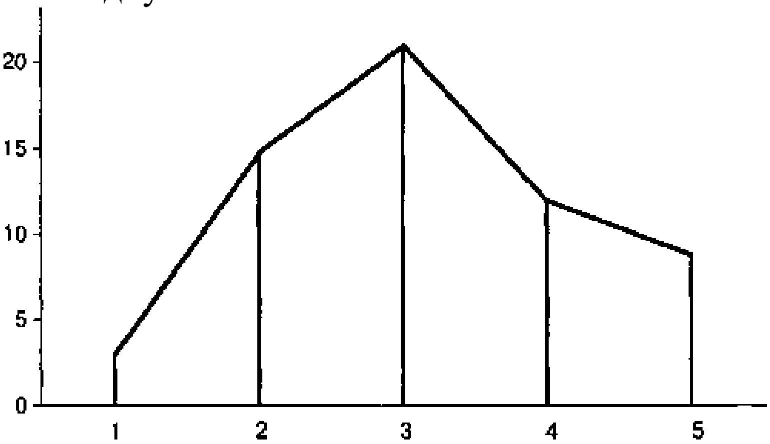
У багатьох випадках ознака може приймати безліч різних значень, наприклад, якщо ми вимірюємо час вирішення тестової задачі. У цьому випадку про розподіл ознаки дозволяє зробити висновок таблиця згрупованих частот, в яких частоти групуються за розрядами або інтервалами значень ознаки.

Ще одним різновидом таблиць розподілу є таблиці розподілу накопичених частот. Вони показують, як накопичуються частоти відповідно до мірі зростання значень ознаки. Навпроти кожного значення (інтервалу) вказується сума частот всіх тих спостережень, величина ознаки у яких не перевищує даного значення (менше верхньої межі даного інтервалу).

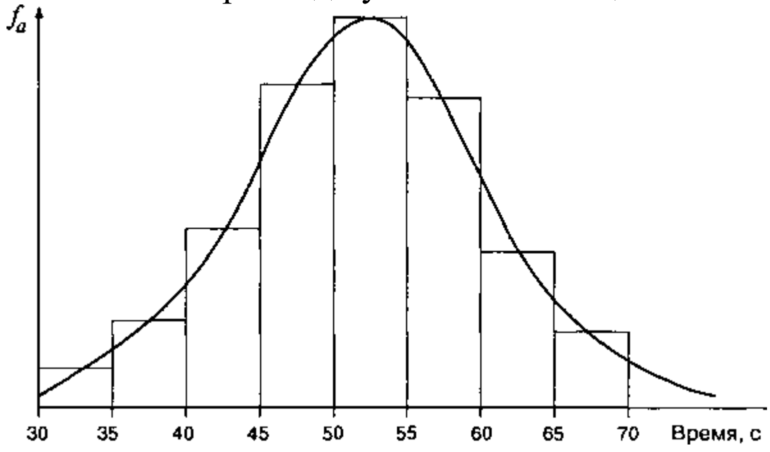
Для наочного уявлення будується графік розподілу частот або графік накопичених частот – гістограма або згладжена крива розподілу.

Гістограма розподілу частот – це стовпчикова діаграма, кожен стовпець якої спирається на конкретне значення ознаки або розрядний інтервал (для згрупованих частот). Висота стовпчика пропорційна частоті відповідного значення. Гістограма накопичених частот відрізняється від гістограми розподілу тим, що висота кожного стовпчика пропорційна частоті, накопиченої до даного значення (інтервалу).

Побудова полігону розподілу частот нагадує побудову гістограми. У гістограмі вершина кожної шпальти, відповідна частоті даного значення (інтервалу) ознаки. А для полігону відзначається точка, відповідна середині цього відрізка. Далі всі крапки з'єднуються ламаною лінією



Полігон розподілу частот самооцінки



Гістограма та графік розподілу частот часу вирішення тестової задачі

ТЕМА 4: ПЕРВИННІ ОПИСОВІ СТАТИСТИКИ

Основні поняття: міра центральної тенденції, мода, медіана, середнє арифметичне, квантилі розподілу, дисперсія, середньоквадратичне відхилення.

До первинних описових статистик зазвичай відносять числові характеристики розподілу виміряної на вибірці ознаки. Кожна така характеристика відображає в одному числовому значенні властивість розподілу безлічі результатів вимірювання, з точки зору їх розташування на числовій осі або з точки зору їх мінливості. Основне призначення кожної з первинних описових статистик – заміна множини значень ознаки, виміряної на вибірці, одним числом (наприклад, середнім значенням як іншою мірою центральної тенденції). Компактний опис групи за допомогою первинних статистик дозволяє інтерпретувати результати вимірювань, зокрема, шляхом порівняння первинних статистик різних груп.

1. Міри центральної тенденції

Міра центральної тенденції – це число, яке характеризує вибірку за рівнем вираженості виміряної ознаки.

Існують три способи визначення «центральної тенденції», кожному з яких відповідає своя міра*: мода, медіана і вибіркове середнє*.

Мода – це таке значення з безлічі вимірів, яке зустрічається найбільш часто. Моді, або модальному інтервалу ознаки, відповідає найбільший підйом (вершина) графіку розподілу частот. Якщо графік розподілу частот має одну вершину, то такий розподіл називається *унімодальним.*

Коли два сусідніх значення зустрічаються однаково часто і частіше, ніж будь-яке інше значення, мода є середнє цих двох значень. Розподіл може мати і не одну моду. Коли всі значення зустрічаються однаково часто, прийнято вважати, що такий розподіл не має моди.

Бімодальний розподіл має на графіку розподілу дві вершини, навіть якщо частоти для двох вершин не строго рівні.

У всій групі може бути і декілька локальних вершин розподілу частот. Тоді виділяють *найбільшу моду і локальні моди*. Ще раз відзначимо, що мода – це значення ознаки, а не його частота.

Медіана – це таке значення ознаки, яке ділить упорядковану (проранжовану) множину даних навпіл так, що одна половина всіх значень виявляється менше медіани, а інша - більше. Таким чином, першим кроком при визначенні медіани є упорядкування (ранжування) всіх значень за зростанням або спаданням. *Далі медіана* визначається таким чином:

□ якщо дані містять непарне число значень (8, 9, 10, 13, 15), то медіана є центральне значення, тобто $Md = 10$;

□ якщо дані містять парне число значень (5, 8, 9, 11), то медіана є точка, що лежить посередині між двома центральними значеннями, тобто. $Md = (8 + 9) / 2 = 8{,}5$.

Середнє (Мх – вибіркове середнє, середнє арифметичне) – визначається як сума всіх значень виміряної ознаки, поділена на кількість підсумованих значень. Якщо деяка ознака X виміряна у групі випробуваних чисельністю N, ми отримаємо значення: x_1 x_2, ..., x_i"..., x_N (де *i* - поточний номер досліджуваного, від 1 до N). Тоді середнє значення *Mx* **визначається за формулою:**

$$M_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ .$$

Властивості середнього. Якщо до кожної змінної додати одне і те саме число *c*, то середнє збільшиться на це число (зменшиться на це число, якщо воно від'ємне):

$$M_{(x_i + c)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i + c) = M_x + c \ .$$

А якщо кожне значення змінної помножити на одне і те саме число *c,* то середнє збільшиться в *c* разів (зменшиться в *c* разів, якщо ділити на *c*):

$$M_{(x_i \cdot c)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot c) = M_x \cdot c \ .$$

Далі ми неодноразово будемо звертатися до такої величини, як відхилення від середнього: (x_i – M_x). З першої, очевидної властивості середнього слідує ще одна важлива властивість, не настільки очевидна: сума всіх відхилень від середнього дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x) = 0 \ .$$

2. Вибір міри центральної тенденції

Кожна міра центральної тенденції має характеристики, які роблять її цінною у певних умовах. Для номінативних даних, зрозуміло, єдиною підходящою мірою центральної тенденції є мода, або модальна категорія – та градація номінативної змінної, яка зустрічається найчастіше.

Для порядкових і метричних змінних, розподіл яких унімодальний і симетричний, мода, медіана і середнє збігаються. Чим більше відхилення від симетричності, тим більше розбіжність між значеннями цих мір центральної тенденції. За цієї розбіжності можна судити про те, наскільки симетричний або асиметричний є розподіл.

Найбільш очевидною і часто використовуваною мірою центральної тенденції є середнє значення. Але його використання обмежується тим, що на величину середнього впливає кожне окреме значення. Якщо яке-небудь значення в групі збільшиться на *c*, то середнє збільшиться на *c*/*N*. Таким чином, середнє значення вельми чутливе до «викидів» – екстремально малих або великих значень змінної.

На величину моди і медіани величина кожного окремого значення не впливає. Наприклад, якщо в групі з 20 вимірювань змінної найбільше значення потроїться за величиною, то не зміниться ні мода, ні медіана. Величина середнього при цьому помітно зміниться. Інакше кажучи, мода і медіана не чутливі до «викидів».

Міри центральної тенденції найчастіше використовуються для порівняння груп за рівнем вираженості ознаки.

Вибіркові середні можна порівнювати, якщо виконуються наступні умови:

- ✓ групи досить великі, щоб судити про форму розподілу;
- ✓ розподіл симетричний;
- ✓ відсутні «викиди».

Якщо хоча б одна з перерахованих умов не виконується, то слід обмежитися модою і медіаною.

3. Квантилі розподілу

Крім мір центральної тенденції в психології широко використовуються міри положення, які називаються квантилі розподілу.

Квантиль – це точка на числовій осі виміряної ознаки, яка ділить всю сукупність упорядкованих вимірювань на дві групи з відомим відношенням їх чисельності. З одним із квантилів ми вже знайомі – це медіана. Це значення ознаки, яке ділить всю сукупність вимірювань на дві рівні за обсягом частини. *Крім медіани часто використовуються процентилі і квартилі.*

Процентиль – це 99 точок – значень ознаки (P_1 ..., P_{99}), які ділять упорядковану (за зростанням) безліч спостережень на 100 частин, рівних за чисельністю. Визначення конкретного значення процентиля аналогічно визначенню медіани. Наприклад, при визначенні 10-го процентиля, P_{10}, спочатку всі значення ознаки упорядковуються по зростанню. Потім відраховується 10% випробовуваних, що мають найменшу вираженість ознаки. P_{10} буде відповідати тому значенню ознаки, який відокремлює ці 10% випробовуваних від решти 90%.

Квартилі – це 3 точки – значення ознаки (P_{25}, P_{50}, P_{75}), які ділять впорядковану (за зростанням) безліч спостережень на 4 частини рівні за чисельністю. Перший квартиль відповідає 25-му процентилю, другий – 50-му процентилю або медіані, третій квартиль відповідає 75-му процентилю.

Процентилі і квартилі використовуються для визначення частоти (повторень) тих чи інших значень (або інтервалів) виміряної ознаки або для виділення часток підгруп та / або окремих випробовуваних.

4. Міри мінливості

Міри центральної тенденції відображають рівень вираженості вимірюваної ознаки. Однак не менш важливою характеристикою є вираженість індивідуальних відмінностей досліджуваних за вимірюваною ознакою. Міри мінливості застосовуються в психології для чисельного вираження величини міжіндивідуальної варіації ознаки.

Найбільш простою і очевидною мірою мінливості *є розмах,* що вказує на діапазон мінливості значень.

Розмах (Range) – це різниця максимального і мінімального значень:

$R = Xmax – Xmin$, де: R – розмах; $Xmax$ – найбільше значення ознаки в сукупності; $Xmin$ – найменше значення ознаки в сукупності.

Зрозуміло, що це дуже нестійка міра мінливості, на яку впливають будь-які можливі «викиди». Більш стійкими є різновиди розмаху: *розмах від 10 до 90-го процентиля* (P_{90} - P_{10}) *або міжквартильний розмах* (P_{75} – P_{25}). Останні дві міри мінливості знаходять своє застосування для опису варіації в порядкових даних.

Для метричних даних використовується дисперсія – величина, назва якої в науці є синонімом мінливості.

Дисперсія (Variance) – міра мінливості для метричних даних, пропорційна сумі квадратів відхилень виміряних значень від їх арифметичного середнього:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x)^2 .$$

Чим більше мінливість в даних, тим більше відхилення значень від середнього, тим більше величина дисперсії. Величина дисперсії виходить при усередненні всіх квадратів відхилень.

$$\overline{D}_x = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x)^2}{N} .$$

Слід відрізняти ***теоретичну (генеральну) дисперсію*** – міру мінливості нескінченного числа вимірів (в генеральній сукупності, популяції в цілому) і емпіричну, або вибіркову, дисперсію – для реально виміряної безлічі значень ознаки. Вище вказана формула для генеральної (теоретичної) дисперсії (D_x), яка, зрозуміло, що не обчислюється. Для обчислень використовується формула вибіркової (емпіричної) дисперсії, що відрізняється знаменником.

Стандартне відхилення (Std. Deviation) (сигма, середньоквадратичне відхилення) – значення квадратного кореня з дисперсії:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - M_x)^2}{N-1}} .$$

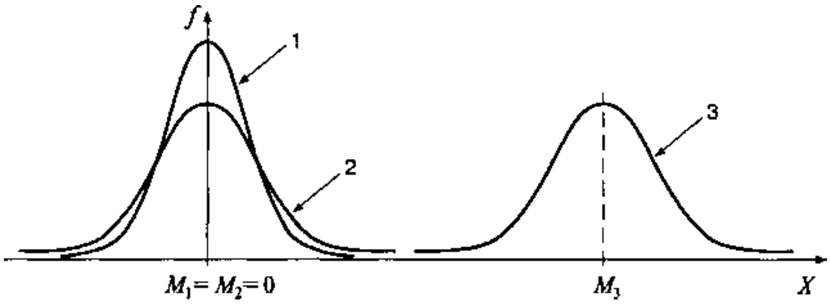
На практиці частіше використовується саме стандартне відхилення, а не дисперсія. Це пов'язано з тим, що сигма виражає мінливість у вихідних одиницях вимірювання ознаки, а дисперсія – в квадратах вихідних одиниць.

Властивості дисперсії:

1. Якщо значення виміряної ознаки не відрізняються один від одного (рівні між собою) – дисперсія дорівнює нулю. Це відповідає відсутності мінливості в даних.

2. Додавання одного і того ж числа до кожного значення змінної не змінює дисперсію:

$$D_{x+c} = D_x, \text{ так как } \sum[(x_i+c) - (M_x+c)]^2 = \sum(x_i - M_x)^2.$$



Додавання константи до кожного значення змінної зміщує графік розподілу цієї змінної на цю константу (змінюється середнє), але мінливість (дисперсія) при цьому залишається незмінною.

3. Множення кожного значення змінної на константу змінює дисперсію в c^2 раз:

$$D_{x \cdot c} = D_x \cdot c^2, \text{ так как } \sum[(x_i c) - (M_x c)]^2 = c^2 \sum (x_i - M_x)^2.$$

При об'єднанні двох вибірок з однаковою дисперсією, але з різними середніми значеннями дисперсія збільшується.

Отже, при об'єднанні двох груп до внутрішньогрупової дисперсії кожної групи додається дисперсія, обумовлена відмінністю між групами (їх середніми). І чим більше розходження між середніми значеннями, тим більше зростає дисперсія об'єднаних груп.

Стандартизація або z-перетворення даних – це перетворення вимірювань в стандартну z-шкалу з середнім $M = 0$; $\sigma = 1$. Спочатку для змінної, виміряної на вибірці, обчислюють середнє M_x стандартне відхилення σ_x. Потім всі значення змінної x, перераховуються за формулою .

$$z_i = \frac{x_i - M_x}{\sigma_x}.$$

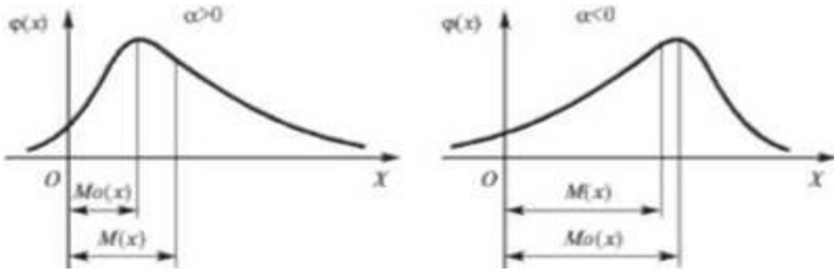
В результаті перетворені значення (z-значення) безпосередньо виражаються в одиницях стандартного відхилення від середнього.

Якщо для однієї вибірки ознаки переведені в z-значення, з'являється можливість порівняння рівня вираженості різних ознак у того чи іншого випробуваного. Для того щоб позбутися неминучих негативних і дробових значень, можна перейти до будь-якої іншої відомої шкали: IQ (середнє 100, сигма 15); T-оцінок (середнє 50, сигма 10); 10-бальною – стенів (середнє 5,5, сигма 2) та ін. Перехід в нову шкалу здійснюється шляхом множення кожного z-значення на задану сигму і додавання середнього:

$$S_i = \sigma_S z_i + M_S.$$

Асиметрія (Skewness) – ступінь відхилення графіка розподілу частот від симетричного виду щодо середнього значення. Якщо вихідні дані переведені в z-значення.

$$As = \frac{\sum_i z_i^3}{N}.$$

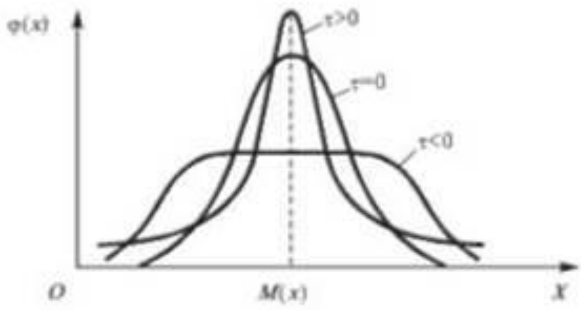


Для симетричного розподілу асиметрія дорівнює 0. Якщо частіше зустрічаються значення менше середнього, то говорять про *лівосторонню, або позитивну асиметрії* (As>0). Якщо ж частіше зустрічаються значення більше середнього, то *асиметрія – правобічна, або негативна (As<0). Чим більше відхилення від нуля, тим більше асиметрія.*

Ексцес – міра плосковершинності або гострокутості графіку розподілу виміряної ознаки. Якщо вихідні дані переведені в z-значення, показник ексцесу визначається за формулою:

$$Ex = \frac{\sum_i z_i^{\,4}}{N} - 3 \,.$$

При симетричному одномодальному розподілі ексцес зазвичай позитивний (*Ex*>0), якщо крива розподілу гострокута, і негативний (*Ex* <0), якщо крива розподілу плосковершинна. За величиною коефіцієнтів асиметрії та ексцесу можна зробити припущення, наприклад, про нормальність розподілу досліджуваної випадкової величини, хоча це вимагає більш суворої перевірки. Для нормального розподілу коефіцієнти асиметрії та ексцесу дорівнюють нулю.



Гострокутий розподіл характеризується *позитивним ексцесом* (*Ex*>0), а *плосковершинний – негативним* (-3<*Ex*<0). «Середньовершинний» (нормальний) розподіл має нульовий ексцес (*Ex* = 0).

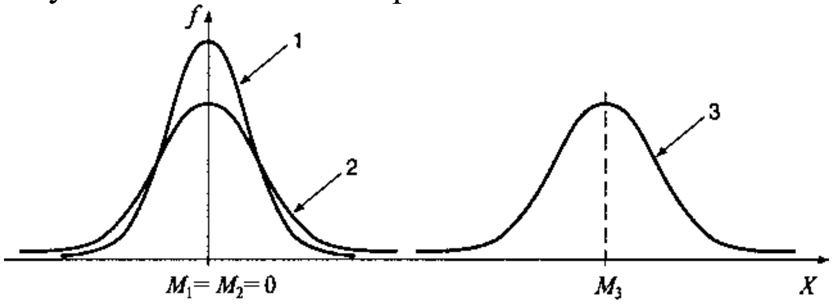
ТЕМА 5: НОРМАЛЬНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Основні поняття: нормальна крива, вихідні тестові оцінки, тестові норми, квантільні графіки, лінійна стандартизація, нелінійна нормалізація.

Нормальний закон розподілу відіграє найважливішу роль у застосуванні чисельних методів у психології. Він лежить в основі вимірів, розробки тестових шкал, методів перевірки гіпотез.

1. Нормальний розподіл як стандарт

Кожній психологічній (або ширше - біологічній) властивості відповідає свій розподіл у генеральній сукупності. ***Найчастіше він є нормальним і характеризується своїми параметрами: середнім (Мх) і стандартним відхиленням (σ).*** Тільки ці два значення відрізняють одну від одної нескінченну безліч нормальних кривих, однакової форми, заданої рівнянням. Середнє значення задає положення кривої на числовій осі та виступає як деяка вихідна, нормативна величина виміру. Стандартне відхилення задає ширину цієї кривої, залежить від одиниць виміру і виступає як масштаб вимірювання.



Нормальні криві, 1-ший розподіл відрізняється від 2-го стандартним відхиленням ($\sigma_1 < \sigma_2$), 2-е від 3-го – середнім арифметичним ($M_2 < M_3$)

Все різноманіття нормальних розподілів може бути зведене до одної кривої, якщо застосувати z-перетворення. Тоді кожна властивість буде мати середнє 0 і стандартне відхилення 1. Графік нормального розподілу для $M=0$ *і* $\sigma=1$ і є одиничним нормальним розподілом, який використовується як стандарт – еталон.

Розглянемо його важливі властивості.

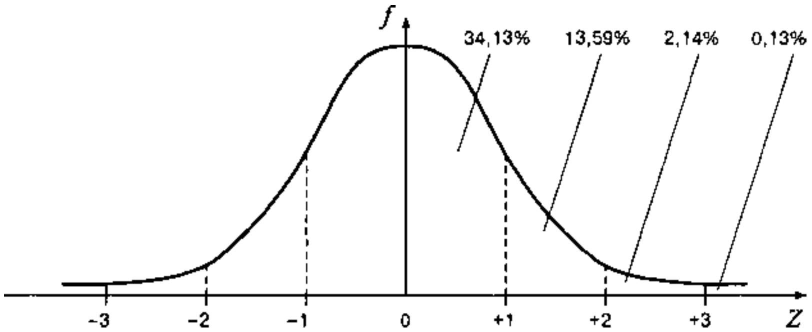
- Одиницею виміру одиничного нормального розподілу являється стандартне відхилення.

- Крива наближається до осі *Z* по краях асимптотично – ніколи не торкаючись її.

- Крива симетрична щодо $M=0$. Її асиметрія і ексцес дорівнюють нулю.

- Крива має характерний вигин: точка перегину лежить точно на відстані в одну σ від *M*.

- Площа між кривою і віссю Z рівна 1.



Таким чином:

- якщо Хі має нормальний розподіл з середнім Мі стандартним відхиленням σ, то $Z = (x - M_x)/\sigma$ характеризується одиничним нормальним розподілом з середнім 0 і стандартним відхиленням 1;

Отже, найбільш важливою загальною властивістю різних кривих нормального розподілу є однакова частка площі під кривою між одними і тими ж двома значеннями ознаки, вираженими в одиницях стандартного відхилення. Корисно пам'ятати, що для будь-якого нормального розподілу існують наступні відповідності між діапазонами значень і площею під кривою:

M± σ відповідає = 68% (точно — 68,26%) площі

M± 2σ відповідає = 95% (точно — 95,44%) площі;

M± 3σ відповідає = 100% (точно — 99,72%) площі.

Три важливих аспекти застосування нормального розподілу:

1. Розробка тестових шкал.

2. Перевірка нормальності вибіркового розподілу для прийняття рішення про те, в якій шкалі виміряна ознака – в метричній або порядковій.

3. Статистична перевірка гіпотез, зокрема, при визначенні ризику прийняття неправильного рішення.

2. Розробка тестових шкал

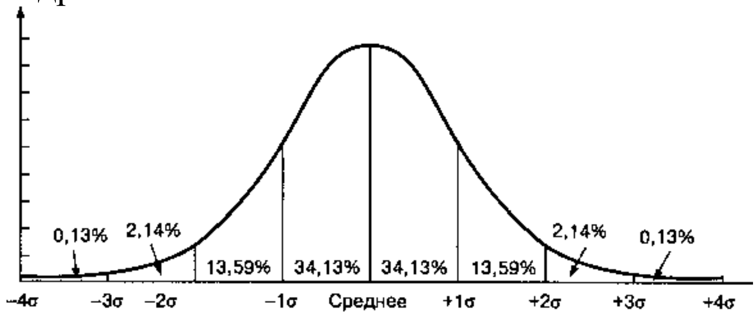
Тестові шкали розробляються для того, щоб оцінити індивідуальний результат тестування шляхом зіставлення його з тестовими нормами, отриманими на вибірці стандартизації. Вибірка стандартизації спеціально формується для розробки тестової шкали – вона повинна бути репрезентативна генеральній сукупності, для якої планується застосовувати певний тест. Згодом при тестуванні передбачається, що і досліджуваний, і вибірка стандартизації належать єдиній генеральній сукупності. Вихідним принципом при розробці тестової шкали є припущення про те, що вимірюється властивість розподілена в генеральній сукупності відповідно нормального закону. Відповідно, вимір тестовою шкалою даної властивості на вибірці стандартизації також має забезпечувати нормальний розподіл. Якщо це так, то тестова шкала є метричною – точніше, рівних інтервалів. Якщо це не так, то властивість вдалося відобразити в кращому випадку – ранговій шкалі.

Таким чином, основна проблема стандартизації тесту полягає в розробці такої шкали, в якій розподіл тестових показників на вибірці стандартизації відповідав би нормальному розподілу.

Вихідні тестові оцінки – це кількість відповідей на ті чи інші питання тесту, час або кількість вирішених завдань і т. д.

Існує безліч стандартних тестових шкал, основне призначення яких – уявлення індивідуальних результатів тестування в зручному для інтерпретації вигляді. Спільним для них є відповідність нормальному розподілу, а розрізняються вони тільки двома показниками: середнім значенням і масштабом (стандартним відхиленням –

а), що визначає дрібність шкали.



Загальна послідовність стандартизації (розробки тестових норм - таблиці перерахунку «сирих» оцінок в стандартні тестові полягає в наступному:

1) визначається генеральна сукупність, для якої розробляється методика і формується репрезентативна вибірка стандартизації;

2) за результатами застосування первинного варіанту тесту будується розподіл «сирих» оцінок;

3) перевіряють відповідність отриманого розподілу нормальному закону;

4) якщо розподіл «сирих» оцінок відповідає нормальному, проводиться лінійна стандартизація;

5) якщо розподіл «сирих» оцінок не відповідає нормальному, то можливі два варіанти:

• перед лінійної стандартизацією виробляють емпіричну нормалізацію;

• проводять нелінійну нормалізацію.

Лінійна стандартизація полягає в тому, що визначаються межі інтервалів «сирих» оцінок, що відповідають стандартним тестовим показникам. Ці межі обчислюються шляхом додавання до середнього «сирих» оцінок (або віднімання з нього) часткою стандартних відхилень, відповідних тестовій шкалі.

Емпірична нормалізація застосовується, коли розподіл «сирих» балів відрізняється від нормального.

Вона полягає у зміні змісту тестових завдань. Наприклад, якщо «сира» оцінка - це кількість завдань, вирішених випробуваними за відведений час, і отримано розподіл з правобічної асиметрією, то це означає, що занадто велика частка випробовуваних вирішує більше половини завдань. У цьому випадку необхідно або додати більш важкі завдання, або скоротити час рішення.

Нелінійна нормалізація застосовується, якщо емпірична нормалізація неможлива або небажана, наприклад, з точки зору витрат часу і ресурсів. У цьому випадку переклад «сирих» оцінок в стандартні проходить через знаходження процентильних кордонів груп у вихідному розподілі, відповідних процентилів кордонів груп в нормальному розподілі стандартної шкали. Кожному інтервалу стандартної шкали ставиться у відповідність такий інтервал шкали «сирих» оцінок, який містить тугішу процентну частку вибірки стандартизації. Величини часткою визначаються за площі під одиничної нормальної кривої, укладеної між відповідними даними інтервалу стандартної шкали г-оцінками.

Тестова методика повинна включати:

- опис вибірки стандартизації;
- характеристику розподілу «сирих» балів із зазначенням середнього і стандартного відхилення;
- найменування, характеристику стандартної шкали;
- тестові норми - таблиці перерахунку «сирих» балів у шкальні.

3. Перевірка розподілу на нормальність

Для перевірки нормальності використовуються різні процедури, які дозволяють з'ясувати, чи відрізняється від нормального вибірковий розподіл виміряної змінної. Необхідність такого зіставлення виникає, коли ми сумніваємося в тому, в якій шкалі представлена ознака – в порядковій або метричній або у адекватної чутливості і диференціюючої здатності використовуваних методів.

Найбільш вагомим аргументом на користь того, що ознака виміряна у метричній шкалі, є відповідність вибірковому розподілу нормальному. Якщо вибірковий розподіл не відрізняється від нормального, то це означає, що вимірювану властивість вдалося відобразити в метричній шкалі (зазвичай - інтервальній).

Існує безліч різних способів перевірки нормальності, з яких ми коротко опишемо лише деякі, припускаючи, що ці перевірки студент буде проводити за допомогою комп'ютерних програм.

Графічний спосіб (Q-Q Plots, P-P Plots) передбачає побудову квантильних графіків або графіків накопичених частот.

Квантільні графіки (Q-Q Plots) будуються таким чином: спочатку визначаються емпіричні значення досліджуваної ознаки, відповідні 5, 10, ..., 95-процентилям. Потім за таблицею нормального розподілу для кожного з цих процентилів визначаються z-значення (теоретичні). Два отриманих ряди чисел задають координати точок на графіку: емпіричні значення ознаки закладаються на осі абсцис, а відповідні їм теоретичні значення - на осі ординат.

Критерії асиметрії та ексцесу. Ці критерії визначають допустиму ступінь відхилення емпіричних значень асиметрії і ексцесу від нульових значень, що відповідають нормальному розподілу. Допустима ступінь відхилення – та, яка дозволяє вважати, що ці статистики суттєво не відрізняються від нормальних параметрів.

$$As_{sd} = 3\sqrt{\frac{6(N-1)}{(N+1)(N+3)}}\ .$$

Причини відхилення від нормальності.

Загальною причиною відхилення форми вибіркового розподілу ознаки від нормального вигляду найчастіше є особливість процедури виміру: використовувана шкала може мати нерівномірну чутливість до вимірюваної властивості у різних частинах діапазону його мінливості.

Наслідки відхилення від нормальності.

Слід зазначити, що завдання отримання емпіричного розподілу, суворо відповідного нормальному закону нечасто зустрічається в практиці дослідження.

У більшості випадків відповідність чи невідповідність нормальності є тією властивістю виміряної ознаки, яку дослідник повинен враховувати при виборі статистичних процедур аналізу даних.

ТЕМА 6: КОЕФІЦІЄНТИ КОРЕЛЯЦІЇ

Основні поняття: коефіцієнт кореляції, нелінійна кореляція, змінна, монотонна функція, немонотонна функція.

1. Поняття коефцієнту кореляції

Коефіцієнт кореляції – двовимірна описова статистика, кількісна міра взаємозв'язку (спільної мінливості) двох змінних.

Автором самого терміну «коефіцієнт кореляції» є Френсіс Гальтон, а найпопулярніший коефіцієнт кореляції був розроблений його послідовником – Карлом Пірсоном.

До теперішнього часу розроблено безліч різних коефіцієнтів кореляції, проблемі вимірювання взаємозв'язку з їх допомогою присвячено багато публікацій.

3 найбільш використовувані коефіцієнти кореляції у психології:

r - Пірсона;

r - Спірмена;

τ - Кендалла.

2. Поняття кореляції

Будь-яке дослідження можна звести до вивчення кореляцій, тому і розроблені різні коефіцієнти кореляції для практично будь-якої дослідницької ситуації. Взаємозв'язок мовою математики зазвичай описують за допомогою функцій, які графічно зображуються у вигляді ліній.

Якщо зміни однієї змінної на одну одиницю завжди призводить до зміни іншої змінної на одну і ту ж величину, функція є лінійною (графік її представляє пряму лінію); будь-який інший зв'язок – нелінійний.

Якщо збільшення однієї змінної пов'язано із збільшенням іншої, то зв'язок – позитивний (прямий), якщо збільшення однієї змінної пов'язано зі зменшенням іншої, то зв'язок – негативний (зворотній). Якщо напрямок зміни однієї змінної не змінюється зі зростанням (убуванням) іншої змінної, то така функція – *монотонна,* в іншому випадку функцію називають *немонотонною.*

Коефіцієнт кореляції – це кількісна міра сили і напряму ймовірного взаємозв'язку двох змінних, яка приймає значення в діапазоні від -1 до +1.

У тому випадку, коли кожному значенню однієї змінної відповідає тільки одне значення іншої змінної (і навпаки), емпіричний взаємозв'язок збігається з функціональним лінійним зв'язком. Показником сили зв'язку являється абсолютна (без урахування знаку) величина коефіцієнта кореляції.

Напрямок зв'язку визначається прямим або зворотним співвідношенням значень двох змінних: якщо зростанню значень однієї змінної відповідає зростання значень іншої змінної, то взаємозв'язок називається прямим (позитивним); якщо зростанню значень однієї змінної відповідає спадання значень іншої змінної, то взаємозв'язок є зворотнім (негативним).

Показником напрямку зв'язку являється знак коефіцієнта кореляції.

3. Коефіцієнт кореляції Пірсона

r-Пірсона (*Pearson r*) застосовується для вивчення взаємозв'язку двох метричних змінних, виміряних на одній і тій самій вибірці. Існує безліч ситуацій, в яких доречно застосування даного коефіцієнта.

Якщо відхилення $(x_i - M_x)$ x $(y_i - My)$ позитивне, то дані досліджуваного свідчать про прямий (позитивний) взаємозв'язок, а якщо від'ємне – то про зворотний (від'ємний) взаємозв'язок. Відповідно, якщо *x* і *y* в основному пов'язані прямо пропорційно, то більшість добутків відхилень будуть позитивними, а якщо вони пов'язані зворотним співвідношенням, то більшість добутків будуть негативними.

Коли зв'язок між змінними прямо пропорційний, ця величина є великою і позитивною – для більшості досліджуваних відхилення збігаються за знаком (високим значенням однієї змінної відповідають високі значення іншої змінної і навпаки). Якщо ж *x* і *y* мають зворотній зв'язок, то для більшості досліджуваних високим значенням однієї змінної будуть відповідати низькі значення іншої змінної.

***Формула коефіцієнта кореляції К. Пірсона*:**

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{cov(x, y)}{\sqrt{s_x^2 s_y^2}},$$

Відзначимо ще раз: на величину коефіцієнта кореляції не впливає те, в яких одиницях *виміру представлені ознаки.* Отже, будь-які лінійні перетворення *ознак (помножені на константу, додавання константи:* $y_i = x_i b + a$ *не змінюють значення коефіцієнта кореляції. Виключенням є множення однієї з ознак на негативну константу: коефіцієнт кореляції міняє свій знак на протилежний.*

4. Рангові кореляції

Якщо обидві змінні, між якими вивчається зв'язок, представлені порядковою шкалою, або одна з них – в порядковій, а інша – в метричній, то застосовуються рангові коефіцієнти кореляції: *r*-Спірмена або *τ*-Кенделла. І той, і інший коефіцієнт вимагає для свого застосування попереднього ранжирування обох змінних.

Коефіцієнт кореляції *r*-Спірмена

Якщо члени групи чисельністю *N* були ранжовані спочатку за змінною *X*, потім – за змінною *У*, то кореляцію між змінними *X* і *У* можна отримати, просто обчисливши коефіцієнт *r*-Пірсона для двох рядів рангів.

За умови відсутності зв'язків в рангах (тобто відсутність рангів, що повторюються) за обома змінними, формула для *r*-Пірсона може бути істотно спрощена в обчислювальному відношенні і перетворена в формулу, відому як *r*-Спірмена:

$$\boldsymbol{r_x = 1 - \frac{6\sum_i d_i^2}{N(N^2-1)}}$$

Коефіцієнт кореляції *r*-Спірмена дорівнює коефіцієнту кореляції *r*- Пірсона, розрахованому для двох попередньо ранжованих змінних.

Коефіцієнт кореляції $\boldsymbol{\tau}$-Кендалла

Альтернативу кореляції *r*-Спірмена для рангів представляє кореляція τ-Кендалла. В основі кореляції, запропонованої Кендаллом, лежить ідея про те, що про напрям зв'язку можна судити, попарно порівнюючи між собою випробовуваних: якщо у пари випробовуваних зміна за *X* збігається за направленістю зі зміною за *У*, то це свідчить про позитивний зв'язок, якщо не збігається – то про негативний зв'язок.

$$\tau=\frac{P-Q}{N(N-1)/2}=\frac{P-Q}{P+Q}=1-\frac{4Q}{N(N-1)}=\frac{4P}{N(N-1)}-1$$

Де P – число збігів, Q – число інверсій.

Коефіцієнт рангу τ-Кендалла часто використовується для статистичної оцінки в перевірці статистичних гіпотез для визначення чи можуть дві змінні розглядатись як статистично залежні.

При підрахунку τ-Кендалла «вручну» дані спочатку впорядковуються по змінній *X*. Потім для кожного випробуваного підраховується, скільки значень нижче актуального значення є нижчими за нього. Стосовно інверсій – відповідно вищі. Результати записується в стовпці «збіги» та «інверсії». Сума всіх значень стовпців «збіги» і є P - загальне число збігів, та Q-кількість інверсій підставляється в формулу для обчислення т-Кендалла.

τ-Кендалла здається більш простим в обчислювальному відношенні. Але, при зростанні чисельності вибірки, на відміну від *r*-Спірмена, обсяг обчислень τ-Кендалла зростає не пропорційно, а в геометричній прогресії. Так, при N = 12 необхідно перебрати 66 пар досліджуваних, а при N = 48 – вже 1128 пар, тобто обсяг обчислень зростає більше, ніж у 17 разів.

Відзначимо важливу особливість рангових коефіцієнтів кореляції. Для метричної кореляції *r*-Пірсона значенням +1 або –1 відповідає пряма або зворотна пропорція між змінними, що графічно являє собою пряму лінію. Максимальним за модулем ранговим кореляціям (+1, –1) зовсім не обов'язково відповідають прямо або обернено пропорційні зв'язки між вихідними змінними *X* і *У*: достатній лише монотонний функціональний зв'язок між ними. Іншими словами, рангові кореляції досягають свого максимального за модулем значення, якщо більшому значенню однієї змінної завжди відповідає більше значення іншої змінної (+1) або більшому значенню однієї змінної завжди відповідає менше значення іншої змінної і навпаки (-1)

Проблема пов'язаних (однакових) рангів

У вимірах часто зустрічаються однакові значення. При їх ранжуванні виникає проблема зв'язаних рангів. *У цьому випадку діє особливе правило ранжування: об'єктам з однаковими значеннями приписується один і той самий, середній ранг.*

За наявності однакових (зв'язаних) рангів формули рангової кореляції r- Спірмена і τ-Кендалла не підходять. Хоча сума рангів і не змінюється, але мінливість даних стає меншою. Відповідно, зменшується можливість оцінити ступінь зв'язку між виміряними властивостями.

При використанні кореляції Спірмена у разі зв'язаних рангів можливі два підходи:

- якщо зв'язків небагато (менше 10% для кожної змінної), то вирахувати *r*- Спірмена наближено за формулою;

$$\frac{6\sum_i d_i^2}{N(N^2-1)}$$

- при більшій кількості зв'язків застосувати до ранжування даних класичну формулу *r*- Пірсона – це завжди дозволить визначити рангову кореляцію незалежно від наявності зв'язків в рангах.

При використанні кореляції τ-Кендалла в разі наявності пов'язаних рангів в формулу вносяться поправки, і тоді виходить загальна формула для обчислення коефіцієнта кореляції τ-Кендалла незалежно від наявності або відсутності зв'язків в рангах.

$$\tau_b = \frac{P-Q}{\sqrt{[N(N-1)/2]-K_x}\sqrt{[N(N-1)/2]-K_y}},$$

5. Часткові кореляції

Дуже часто дві змінні корелюють одна з одною тільки за рахунок того, що обидві вони узгоджено змінюються під впливом деякої третьої змінної. Іншими словами, насправді зв'язок між відповідними властивостями відсутній, але проявляється у статистичному взаємозв'язку (кореляції) під впливом загальної причини.

Для числового визначення ступеню взаємозв'язку двох змінних за умови виключення впливу третьої застосовують коефіцієнт часткової кореляції. Для обчислення часткової кореляції достатньо знати три коефіцієнта кореляції – *r*- Пірсона між змінними *X*, *У* і *Z* (r_{xy}, r_{xz}, і r_{yz})

$$r_{xy-z} = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}}$$

Часткова кореляція r_{xy-z} дорівнює r_{xy}, при будь-якому фіксованому значенні Z (в тому випадку, якщо Z лінійно корелює з *X* і *У*). Наприклад, якщо значення часткової кореляції швидкості читання *X* і зрілості моральних суджень *У* з урахуванням віку Z дорівнює 0,2 ($r_{xy-z} = 0{,}2$) і вік лінійно корелює і з *X* і з *У*, то будь-якій групі дітей одного і того ж віку r_{xy} буде теж дорівнювати 0,2.

Слід бути особливо обережним, намагаючись дати інтерпретацію частковій кореляції з позицій причинності. Наприклад, якщо Z корелює і з *X* і з *У*, а часткова кореляція r_{xy-z}, близька до нуля, з цього не обов'язково випливає, що саме Z являється загальною причиною для X і $У$.

6. Кореляція бінарних даних

Як зазначалося раніше, якщо одна з двох змінних представлена в номінативній шкалі, а інша – в числовій (рангової або метричної), то зв'язок між цими змінними краще вивчати шляхом порівняння груп за рівнем вираженості числової змінної.

Те ж стосується проблеми вивчення зв'язку між двома номінативними змінними. Хоча і для цього випадку існують коефіцієнти кореляції ($К$ - Чупрова, $С$ - Пірсона), але можливість їх інтерпретації досить обмежена, зокрема тому, що вони відображають лише силу зв'язку, але не її напрямок. Тому і в цьому випадку проблему зв'язку між двома номінативними змінними краще вивчати шляхом порівняння градацій однієї змінної з розподілу іншої змінної.

Таблиця спряженості 2х2

ОЗНАКИ		Ознака Х		Підсумок
		0	1	
Ознака У	0	a	b	$a+b$
	1	c	d	$c+d$
Підсумок		$a+c$	$b+d$	N

У цьому випадку допустиме застосування r-Пірсона безпосередньо до вихідних даних – двом бінарним змінним, які приймають значення 0 або 1, виміряним для кожного члена вибірки чисельністю N. Результат застосування r-Пірсона до двох бінарних змінних називається «фі-коефіцієнтом спряженості» (Phi). Якщо дані представлені в чотирьохкомірковій таблиці спряженості, то застосовується формула, яка істотно спрощує розрахунки:

$$\varphi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}},$$

де a, b, c, d відповідають позначенням в чотирьохкоміркової таблиці.

Отже, φ-коефіцієнт є просто r-Пірсона, обчислений для бінарних даних, алгебраїчно. Відповідно, інтерпретація коефіцієнта подібна інтерпретації r-Пірсона. Але використання φ-коефіцієнта істотно обмежене. Чим більша асиметрія розподілу 0 і 1 по кожній змінній, тим менш точно φ-коефіцієнт відображає зв'язок між бінарними змінними. Інакше кажучи, застосування φ-коефіцієнта вимагає приблизної рівності кількості 0 і 1 у кожній змінній.

7. Вибір коефіцієнта кореляції

При вивченні зв'язків між змінними застосування Пірсона безпосередньо до вихідних даних є найбільш поширеним. У кожному разі, виявлена кореляція чи ні, необхідний візуальний аналіз графіків розподілу змінних і графіка двовимірного розсіювання, якщо дослідника дійсно цікавить зв'язок між відповідними змінними. Застосовуючи r-Пірсона, необхідно переконатися, що:

- обидві змінні не мають вираженої асиметрії;
- відсутні викиди;
- зв'язок між змінними монотонний.

Якщо хоча б одна з умов не виконується, можна спробувати застосувати рангові коефіцієнти кореляції: r-Спірмена або τ-Кендалла. Але і рангові кореляції мають свої обмеження. Їх можна застосувати, якщо:

- обидві змінні представлені в кількісній шкалі (метричній або ранговій);
- зв'язок між змінними є монотонним (не змінює свій знак зі зміною величини однієї із змінних).

Якщо є припущення, що кореляція обумовлена впливом третьої змінної, і всі три змінні допускають застосування r-Пірсона для обчислення кореляції між ними, можлива перевірка цього припущення шляхом обчислення коефіцієнта часткової кореляції цих змінних (при фіксованих значеннях третьої змінної). Якщо значення часткової кореляції двох змінних за абсолютною величиною помітно менше, ніж їх парна кореляція, то парна кореляція обумовлена впливом третьої змінної.

ТЕМА 7: ПАРАМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ПОРІВНЯННЯ ВИБІРОК

Основні поняття: параметричні методи, критерій t-Стьюдента, критерій F-Фішера, критерій U-Манна-Уітні.

1. Загальні поняття про параметричні методи

Порівняння двох вибірок за ознакою, виміряною в метричній шкалі, зазвичай передбачає порівняння середніх значень з використанням параметричного критерію t-Стьюдента.

Слід розрізняти три ситуації відношення вибірок між собою: випадок незалежних і залежних вибірок і порівняння одного середнього значення із заданою величиною (критерій t-Стьюдента для однієї вибірки).

До параметричних методів відноситься і порівняння дисперсій двох вибірок за критерієм F-Фішера. Іноді цей метод призводить до цінних змістовних висновків, а в разі порівняння середніх для незалежних вибірок порівняння дисперсій є обов'язковою процедурою.

При порівнянні середніх або дисперсії двох вибірок перевіряється ненаправлена статистична гіпотеза про рівність середніх (дисперсій) в генеральній сукупності. Відповідно, при її відхиленні допустимо прийняття двосторонньої альтернативи про конкретний напрямок відмінностей у відповідності із співвідношенням вибіркових середніх (дисперсій). Для прийняття статистичного рішення в таких випадках застосовуються двосторонні критерії і, відповідно, критичні значення для перевірки ненаправлених альтернатив.

2. Критерій *t-С*тьюдента для однієї вибірки

Метод дозволяє перевірити гіпотезу про те, що середнє значення досліджуваної ознаки M_x відрізняється від деякого відомого значення A.

Перевіряється статистична гіпотеза: H_0: $M_{x}=A$. При її відхилення приймається альтернативна гіпотеза про те, що $M_x <> A$.

Вихідне припущення: розподіл ознаки у вибірці приблизно відповідає нормальному вигляду.

Структура вихідних даних, значення досліджуваної ознаки визначені для кожного члена вибірки, яка репрезентативна досліджуваній генеральній сукупності.

Альтернатива методу: немає.

Формула для емпіричного значення критерію *t* -Стьюдента:

$$t_э = \frac{|M - A|}{\sigma/\sqrt{N}},\ df = N - 1.$$

3. Критерій *t*-*С*тьюдента для незалежних вибірок

Метод дозволяє перевірити гіпотезу про те, що середні значення двох генеральних сукупностей, з яких вилучені порівнювані незалежні вибірки, відрізняються одне від одного. Незалежність вибірок передбачає відсутність пар корелюючих значень ознаки. Це припущення порушується, якщо, наприклад, 1-ша вибірка складалася з чоловіків, а 2-га - з їхніх дружин, і два ряди значень виміряної ознаки могли б корелювати.

Перевіряється статистична гіпотеза H_0: $M_1=M_2$. При її відхиленні приймається альтернативна гіпотеза про те, що $M_1 <> M_2$.

Вихідні припущення для статистичної перевірки:

□ одна вибірка вилучається з однієї генеральної сукупності, а інша вибірка, незалежна від першої, вилучається з іншої генеральної сукупності;

□ розподіл досліджуваної ознаки в обох вибірках приблизно відповідає нормальному;

□ дисперсії ознаки в двох вибірках приблизно однакові (гомогенні).

$$t_э = \frac{|M_1 - M_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$

або

$$t = \frac{|M_1 - M_2|}{\sqrt{\frac{(N_1-1)\sigma_1^2+(N_2-1)\sigma_2^2}{N_1+N_2-2}\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}},\ \text{де}\quad df = N_1 + N_2 - 2.$$

Структура вихідних даних: досліджувана ознака виміряна у об'єктів (досліджуваних), кожен з яких належить до однієї з двох порівнюваних незалежних вибірок.

Обмеження: розподіл ознаки у обох вибірках суттєво не відрізняються від нормального; у разі різної чисельності порівнюваних вибірок їх дисперсії статистично достовірно не відрізняються (перевіряються за критерієм *F*- Фішера – при обчисленнях «вручну», за критерієм Лівена - при обчисленнях на комп’ютері).

Альтернатива методу, непараметричний критерій U-Манна-Уітні – якщо розподіл ознаки хоча б в одній вибірці суттєво відрізняється від нормального і (або) дисперсії відрізняються статистично достовірно.

4. Критерій *t*-Стьюдента для залежних вибірок

Метод дозволяє перевірити гіпотезу про те, що середні значення двох генеральних сукупностей, з яких вилучені порівнювані залежні вибірки, відрізняються одна від одної. Припущення залежності найчастіше означає, що ознака виміряна на одній і тій самій вибірці двічі, наприклад, до впливу і після нього. У загальному ж випадку кожному представнику однієї вибірки відповідає представник з іншої вибірки (вони попарно об'єднані) так, що два ряди даних позитивно корелюють один з одним. *Слабші види залежності вибірок:* вибірка 1 - чоловіки, вибірка 2 - їх дружини; вибірка 1 - діти, вибірка 2 – їх брати або сестри.

Статистична гіпотеза, що перевіряється, як і в попередньому випадку, H_0: $M_1 = M_2$. При її відхиленні приймається альтернативна гіпотеза про те, що $M_1 <> M_2$. Вихідні припущення для статистичної перевірки:

□ кожному представнику однієї вибірки (з однієї генеральної сукупності) відповідає представник іншої вибірки (з іншої генеральної сукупності);

□ дані двох вибірок позитивно корелюють;

□ розподіл досліджуваної ознаки в обох вибірках відповідає закону нормального розподілу.

Структура вихідних даних: маємо два значення досліджуваної ознаки для кожної пари об’єктів.

Обмеження: розподіл ознаки в обох вибірках суттєво не відрізняються від нормального; дані двох вимірювань, відповідних вибіркам, позитивно корелюють.

$$t = \frac{|M_d|}{\sigma_d/\sqrt{N}}, \quad df = N - 1,$$

Альтернативи: критерій Т-Вілкоксона, якщо розподіл хоча б для однієї вибірки істотно відрізняється від нормального; критерій *t*-Стьюдента для незалежних вибірок – якщо дані для двох вибірок не корелюють позитивно.

ТЕМА 8. НЕПАРАМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ПОРІВНЯННЯ ВИБІРОК

Основні поняття: непараметричні методи, статистична гіпотеза, критерій *T*-Вілкоксона, критерій *H*-Краскала-Уоллеса, критерій χ^2-Фрідмана.

1. Загальне поняття про непараметричні методи

До методів порівняння вибірок, відповідно до прийнятої класифікації, ми відносимо способи перевірки статистичних гіпотез про відмінність вибірок за рівнем вираженості ознаки.

Непараметричні методи порівняння вибірок, що розглядаються в даній темі, є аналогами параметричних методів порівняння середніх значень. Непараметричні аналоги параметричних методів порівняння вибірок застосовуються у випадках, коли не виконуються основні припущення, які є в основі параметричних методів порівняння середніх значень.

Умови, коли застосовуються непараметричні методи:

- є підстави вважати, що розподіл значень ознаки в генеральній сукупності не відповідає нормальному закону;

- є сумніви в нормальності розподілу ознаки в генеральній сукупності, але вибірка занадто мала, щоб з вибіркового розподілу робити висновки про розподіл у генеральній сукупності;

- не виконується вимога гомогенності дисперсії при порівнянні середніх значень для незалежних вибірок.

На практиці перевага непараметричних методів найбільш помітна, коли в даних є викиди (екстремально великі чи малі значення).

Основна (нульова) статистична гіпотеза при цьому містить твердження про ідентичність генеральних сукупностей (з яких вилучені вибірки) за рівнем вираженості досліджуваної ознаки.

При порівнянні вибірок з використанням непараметричних критеріїв, як і у випадку параметричних критеріїв, зазвичай перевіряються ненаправлені статистичні гіпотези.

2. Порівняння двох незалежних вибірок

Найпопулярнішим і найбільш чутливим (потужним) аналогом критерія *t*-Стьюдента для незалежних вибірок є критерій *U-Манна-Уітні.*

Альтернативою є критерій серій, який ще простіший в обчислювальному відношенні, але має помітно меншу чутливість, ніж критерій *U*.

Для обрахунку «вручну» застосовують формули:

$$U_x = mn - R_x + \frac{n(n+1)}{2},$$

$$U_y = mn - R_y + \frac{m(m+1)}{2},$$

$$U_x + U_y = mn,$$

Емпіричне значення критерію *U*-Манна-Уітні показує, наскільки співпадають (перетинаються) два ряди значень виміряної ознаки. Чим менше співпадіння, тим більше відрізняються ці два ряди. Основна ідея критерію заснована на представленні всіх значень двох вибірок у вигляді однієї загальної послідовності впорядкованих (проранжованих) значень. Основній (нульовій) статистичній гіпотезі буде відповідати ситуація, коли значення однієї вибірки будуть рівномірно розподілені серед значень іншої вибірки. Навпаки, відхиленню цієї гіпотези буде відповідати ситуація, коли значення однієї з вибірок будуть переважати на одному з кінців об'єднаного ряду – перетин двох рядів тоді буде мінімальним.

При розрахунках «вручну» використовують таблиці критичних значень критерію *U*-Манна-Уітні, з якими порівнюють менше із двох отриманих значень.

3. Порівняння двох залежних вибірок

Найбільш потужним аналогом критерію *t*-Стьюдента для залежних вибірок є критерій *T*-Вілкоксона.

Непараметричним його аналогом є критерій знаків, який ще простіший в обчислювальному відношенні, але має меншу чутливість, ніж критерій *T*-Вілкоксона. Критерій *T* заснований на впорядкуванні величин різниць (зрушень) значень ознаки в кожній парі вимірювань (критерій знаків заснований на врахуванні лише знаку цієї різниці). Відповідно, критерій *T*, будучи менш чутливим аналогом *t*-Стьюдента, більш чутливий порівняно з іншими непараметричними критеріями для повторних вимірів (залежних вибірок).

Критерій *T*-Вілкоксона заснований на ранжуванні абсолютних різниць пар значень залежних вибірок. Далі підраховується сума рангів для позитивних різниць і сума рангів для негативних різниць. Ідея критерію *T* передбачає підрахунок ймовірності отримання мінімальної з цих різниць за умови, що розподіл позитивних або негативних різниць рівноймовірний і дорівнює ½.

Для розрахунків «вручну» не потрібно особливих формул: досить порахувати суми рангів для позитивних і негативних різниць. Потім менша із сум приймається як емпіричне значення критерію, значення якого порівнюється з табличним значенням. Звичайно, чим більше розходження, тим менше емпіричне значення *T*, тим менша ймовірність отримання такого значення за умови рівної ймовірності появи позитивних і негативних різниць, отже, тим менше значення *p*-рівня.

$$W = n(n+1)/2 + mn$$

Критерій знаків *G* (*Sign test*) – менш чутлива до зрушень альтернатива критерію *T*-Вілкоксона. Для того щоб ним скористатися, досить підрахувати кількість негативних і позитивних зрушень.

4. Порівняння більше двох незалежних вибірок

Критерій *H*-Краскала-Уоллеса є непараметричним аналогом однофакторного дисперсійного аналізу (ANOVA) для незалежних вибірок, тому інша його назва – однофакторний дисперсійний аналіз Краскала-Уоллеса. Він дозволяє перевіряти гіпотези про відмінність більше двох вибірок за рівнем вираженості досліджуваної ознаки.

Критерій *H*-Краскала-Уоллеса схожий з критерієм *U*-Манна-Уітні, він оцінює ступінь перетину (збігу) кількох рядів значень виміряної ознаки. Чим менше збігів, тим більше різняться ряди, порівнюваних вибірок. Основна ідея критерію *H*-Краскала-Уоллеса заснована на уявленні всіх значень порівнюваних вибірок у вигляді однієї загальної послідовності впорядкованих (ранжованих) значень, з подальшим обчисленням середнього рангу для кожної з вибірок. Якщо виконується статистична гіпотеза про відсутність відмінностей, то можна очікувати, що всі середні ранги приблизно рівні й близькі до загального середнього рангу.

Емпіричне значення критерію *H*-Краскала-Уоллеса обчислюється після ранжування всіх значень порівнюваних вибірок за формулою:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1),$$

При відхиленні нульової статистичної гіпотези про відсутність відмінностей приймається альтернативна гіпотеза про статистично достовірні відмінності вибірок за досліджуваною ознакою – без конкретизації напрямку відмінностей. Для тверджень про те, що рівень вираженості ознаки в якійсь із порівнюваних вибірок вище або нижче, необхідно парне співвідношення вибірок за критерієм *U*-Манна-Уітні.

5. Порівняння більше двох залежних вибірок

Критерій χ^2-Фрідмана є непараметричним аналогом однофакторного дисперсійного аналізу (ANOVA) для повторних вимірів. Він дозволяє перевіряти гіпотези про відмінність більше двох залежних вибірок (повторних вимірів) за рівнем вираженості досліджуваної ознаки. Критерій χ^2-Фрідмана може бути більш ефективним, ніж його метричний аналог ANOVA у випадках повторних вимірів досліджуваної ознаки на невеликих вибірках. Критерій χ^2-Фрідмана заснований на ранжуванні ряду повторних вимірів для кожного об'єкта вибірки. Потім обчислюється сума рангів для кожної умови (повторних вимірів). Якщо виконується статистична гіпотеза про відсутність відмінностей між повторними вимірюваннями, то можна очікувати приблизну рівність сум рангів для цих умов. Чим більше відрізняються залежні вибірки за досліджуваною ознакою, тим більше емпіричне значення х^2-Фрідмана. Емпіричне значення χ^2-Фрідмана обчислюється після ранжування ряду повторних вимірювань для кожного об'єкта за формулою:

$$\chi^2_э = \left[\frac{12}{Nk(k+1)} \cdot \sum_{i=1}^{k} R_i^2\right] - 3N(k+1),\ df = k-1,$$

При розрахунках «вручну» для визначення рівня користуються таблицями критичних значень. Якщо $k = 3$, $N > 9$ або $k > 3$, $N > 4$, то користуються звичайною таблицею для χ^2, $df = k\text{-}1$. Якщо $k = 3$, $N < 10$ або $k = 4$, $N < 5$, то користуються додатковими таблицями критичних значень χ^2- Фрідмана.

При відхиленні нульової статистичної гіпотези про відсутність відмінностей приймається альтернативна гіпотеза про статистично достовірні відмінності вибірок за досліджуваною ознакою – без конкретизації напрямку відмінностей. Для тверджень про те, що рівень вираженості ознаки в який-небудь з порівнюваних вибірок вище або нижче, необхідно парне співвіднесення вибірок за критерієм *Т*-Вілкоксона.

ТЕМА 9: ФАКТОРНИЙ АНАЛІЗ

Основні поняття: факторний аналіз, факторне навантаження, повна факторизація, аналіз головних компонент, метод головних осей, узагальнений метод найменших квадратів, варімакс – обертання.

1. Історія виникнення факторного аналізу

Виникнення і розвиток факторного аналізу тісно пов'язані з вимірами в психології. Тривалий час факторний аналіз сприймався як математична модель у психологічній теорії інтелекту. Лише починаючи з 50-х років XX століття, одночасно з розробкою математичного обґрунтування факторного аналізу, цей метод стає загальнонауковим. До сьогоднішнього часу факторний аналіз є невід'ємною частиною будь-якої серйозної статистичної комп'ютерної програми і входить в основний інструментарій всіх наук, що мають справу з багатопараметричним описом досліджуваних об'єктів, таких, як соціологія, економіка, психологія, біологія, медицина та інші.

Основна ідея факторного аналізу була сформульована ще Ф. Гальтоном, основоположником вимірювань індивідуальних відмінностей.

Вона зводиться до того, що якщо кілька ознак, виміряних на групі індивідів, змінюються узгоджено, то можна припустити існування однієї загальної причини цієї сумісної мінливості – фактору як прихованої (латентної), безпосередньо не доступної вимірюванню змінної. Далі К. Пірсон в 1901 році висуває ідею «методу головних осей», а Ч. Спірмен, відстоюючи свою однофакторну концепцію інтелекту, розробляє математичний апарат для оцінки даного фактора, виходячи з безлічі вимірів здібностей. У своїй роботі, опублікованій в 1904 році, Ч. Спірмен показав, що якщо ряд ознак попарно корелюють одна з одною, то може бути складена система лінійних рівнянь, що зв'язують всі ці ознаки у один загальний фактор «загальної обдарованості».

З 1950-х років, з появою комп'ютерів, факторний аналіз починає дуже широко використовуватися в психології при розробці тестів, обґрунтування структурних теорій інтелекту й особистості. При цьому, дослідник починає з множини виміряних емпіричних показників, які за допомогою факторного аналізу групуються за факторами (досліджуваними властивостями).

Надалі, у процесі розвитку математичного забезпечення факторного аналізу, накопичення досвіду його використання, насамперед у психології, завдання факторного аналізу узагальнюється.

Як загальнонауковий метод, факторний аналіз стає засобом для заміни набору корелюючих вимірів (шкал) істотно меншим числом нових змінних (факторів).

При цьому основними вимогами є:

а) мінімальна втрата інформації, що міститься у вихідних даних;

б) можливість подання (інтерпретації) факторів через вихідні змінні.

Таким чином, ***головна мета факторного аналізу*** – зменшення розмірності вихідних даних з метою їх стислого опису за умови мінімальних втрат вихідної інформації. ***Результатом факторного аналізу*** є перехід від безлічі вихідних змінних до істотно меншої кількості нових змінних – факторів.

Фактор при цьому інтерпретується як причина спільної мінливості кількох вихідних змінних. Якщо виходити з припущення про те, що кореляції можуть бути пояснені впливом прихованих причин – факторів, то основне призначення факторного аналізу – аналіз кореляцій безлічі ознак.

Інтерпретація факторів – одна з основних задач факторного аналізу. Її вирішення полягає в ідентифікації факторів через вихідні змінні. Факторні навантаження – аналоги коефіцієнтів кореляції, показують ступінь взаємозв’язку відповідних змінних і факторів: *чим більша абсолютна величина факторного навантаження, тим сильніший зв'язок змінної з фактором, тим більше дана змінна обумовлена дією відповідного фактору*.

Кожен фактор ідентифікується за тими змінними, з якими він пов'язаний найбільшою мірою, тобто за змінними, які мають найбільше навантаження за певним фактором.

Отже, можна сформулювати основні завдання факторного аналізу:

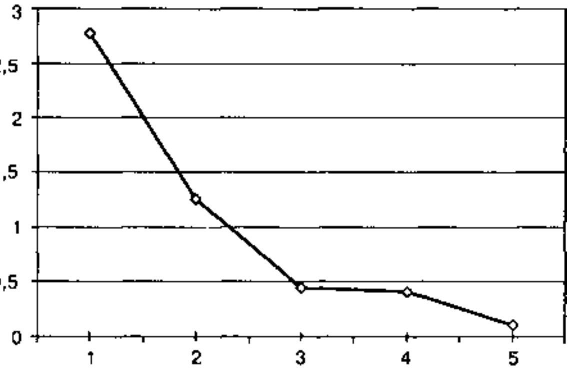
1. Дослідження структури взаємозв'язків змінних. У цьому випадку кожна група змінних буде визначатися фактором, за яким ці змінні мають максимальні навантаження.

2. Ідентифікація факторів як прихованих (латентних) змінних – причин взаємозв'язку вихідних змінних.

3. Обчислення значень факторів для досліджуваних як нових, інтегральних змінних. При цьому число факторів істотно менше числа вихідних змінних. У цьому сенсі факторний аналіз вирішує завдання скорочення кількості ознак з мінімальними втратами вихідної інформації.

2. Проблема кількості факторів

Проблема кількості факторів – це перша проблема при проведенні факторного аналізу. Зазвичай завчасно не відомо, скільки факторів необхідно і достатньо для представлення даного набору змінних. Сама ж процедура факторного аналізу передбачає попереднє внесення числа факторів. Тому дослідник повинен заздалегідь визначити або оцінити їх можливу кількість. Для цього, на першому етапі факторного аналізу зазвичай застосовують аналіз головних компонент і використовують графік власних значень.



Графік власних значень для п’яти показників інтелекту

На рисунку представлений графік власних значень для п’яти компонент. Компонентні навантаження на даному етапі не підлягають інтерпретації, нас цікавлять тільки величини власних значень. Для визначення кількості факторів були запропоновані два критерії. *Перший – критерій Кайзера*: число факторів дорівнює числу компонент, власні значення яких більше 1. Другий спосіб визначення числа факторів – критерій відсіювання Р. Кеттелла, вимагає побудови графіка власних значень. Кількість факторів визначається приблизно за точкою виходу на пологу пряму після різкого спаду.

При цьому перевіряються три гіпотези: якщо K – точка згину, то можлива кількість факторів дорівнює K–1, K і K+1.

За першим критерієм (Кайзера) в нашому прикладі число факторів дорівнює двом, так як перші два власних значення більші за 1. За другим критерієм (Р. Кеттелла) – від двох до чотирьох, так як точці перегину відповідає третя компонента. При визначенні кількості факторів на практиці слід пам'ятати, що вказані критерії є лише зразковим орієнтиром. Остаточне рішення про кількість приймається тільки після інтерпретації факторів.

3. Проблема спільності

Проблема спільності – це друга головна проблема факторного аналізу. Одинична дисперсія кожної змінної представлена у факторному аналізі як сума її сукупності і характерності:

$$1 = h_i^2 + e_i^2$$

де h_i^2 – спільність змінної з номером i, h e_i^2 – її характерність.

Спільність – це частина дисперсії змінної, обумовлена дією загальних факторів. Характерність – частина її дисперсії, обумовлена специфікою даної змінної і помилками виміру. Інакше кажучи, спільність – це повний внесок усіх факторів в одиничну дисперсію змінної, а характерність – це різниця повної одиничної дисперсії змінної та її спільності. Спільність змінної *i* дорівнює сумі квадратів її навантажень по всіх *M* факторах (за рядком факторних навантажень):

$h_i^2=\sum_{k1}^{M} a_{ik}^2$

Повнота факторизації – важливе поняття факторного аналізу, що випливає з визначення спільності. Будь-який елемент факторної структури – факторне навантаження змінної, зведене до квадрату, набуває сенсу частки дисперсії змінної, обумовленої даним фактором. Сумуючи ці частки за рядком, ми отримуємо спільність – частку дисперсії змінної, обумовлену впливом усіх загальних факторів.

Сумарна дисперсія всіх змінних це сума одиничних дисперсій всіх ознак, що дорівнює кількості ознак. Сумуючи долі дисперсій всіх змінних за одним фактором, ми отримуємо сумарну дисперсію всіх змінних обумовлену дією даного фактору. Розділивши сумарну дисперсію, обумовлену дією даного фактору, на кількість ознак, ми отримаємо частку дисперсії, обумовлену даним фактором, або інформативність (потужність) фактору. Сума квадратів всіх елементів факторної структури – факторних навантажень – дорівнює сумі всіх спільностей і сумарній дисперсії всіх змінних, обумовленої загальними факторами. Ця величина, поділена на кількість ознак, відома як ***повнота факторизації.***

Проблема спільності полягає в тому, що вони, як і число загальних факторів, не відомі до початку аналізу, але повинні якимось чином вводитись, так як величини факторних навантажень залежать від величин спільнот.

4.Методи факторного аналізу

Методи факторного аналізу – це різні способи отримання факторної структури при заданій кількості факторів. Ці способи, відрізняються вирішенням проблеми спільностей. Розглянемо найбільш часто вживані методи: аналіз головних компонент, метод головних факторів, факторний аналіз образів (спільності рівні квадрату КМК), метод не виважених найменших квадратів, узагальнений метод найменших квадратів і метод максимальної правдоподібності.

Аналіз головних компонент – інколи використовується в якості факторного аналізу, хоча це і не зовсім коректно. При використанні даного методу спільність кожної змінної отримується автоматично, шляхом сумування квадратів її навантажень за всіма головними компонентами. В результаті факторна структура спотворюється в бік збільшення абсолютних величин факторних навантажень.

Факторний аналіз образів (спільності рівні квадрату КМК) – це метод головних компонент, який застосовується до так званої редукційної кореляційної матриці, у якій замість одиниць на головній діагоналі розташовуються оцінки спільності. Спільність кожної змінної оцінюється попередньо, як квадрат коефіцієнта множинної кореляції (КМК) цієї змінної з усіма іншими. Така оцінка, з точки зору теоретиків факторного аналізу, призводить до більш точних результатів, ніж в аналізі головних компонент. Але значення спільностей недооцінюється, що також призводить до спотворень факторної структури, хоча і меншим, ніж у попередньому випадку.

Метод головних осей дозволяє отримати більш точне вирішення. На першому кроці спільності обчислюються за методом головних компонент. На кожному наступному кроці власні значення і факторні навантаження обчислюються виходячи з попередніх значень спільнот. Кінцеве рішення отримується при виконанні заданого числа ітерацій або досягненні мінімальних відмінностей між спільностями на даному та попередньому кроках.

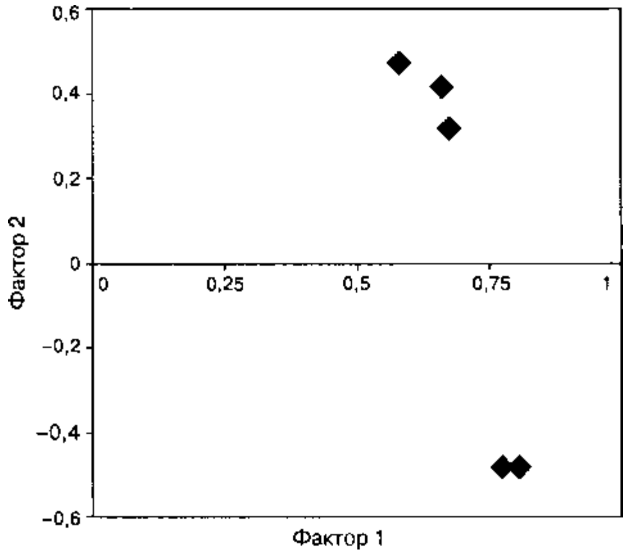
Метод незважених найменших квадратів – мінімізує квадрати залишків (різниць) вихідної та відтворювальної кореляційних матриць (поза головною діагоналлю). На першому кроці оцінюються спільності через квадрат КМК. Потім обчислюється факторна структура і відновлюються коефіцієнти кореляції.

Узагальнений метод найменших квадратів – відрізняється від попереднього тим, що для кожної змінної вводяться спеціальні вагові коефіцієнти. Чим більше спільність змінної, тим в більшій мірі вона впливає на факторну структуру (має більшу вагу).

Метод максимальної правдоподібності також спрямований на зменшення різниці вихідних і обчислюваних кореляцій між ознаками. Додатково цей метод дозволяє отримати важливий показник повноти факторизації – статистичну оцінку «якості підгонки».

5. Проблема обертання та інтерпретація

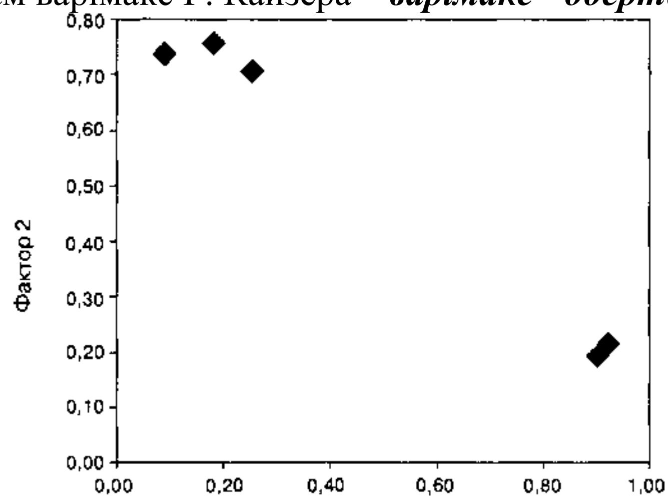
Це третя основна проблема факторного аналізу, вирішення якої пов’язано з геометричним представленням факторної структури. Необхідність вирішення цієї проблеми обумовлена тим, що, як правило, результати факторизації безпосередньо не підлягають інтерпретації. У той же час цінність результату факторного аналізу визначається насамперед можливістю його однозначної інтерпретації. Розглянемо результат застосування методу головних осей до даних про п'ять показників здібностей. Всі змінні мають найбільші навантаження за першим фактором, і неможливо визначити, які змінні ідентифікують другий фактор. Тобто дана факторна структура не піддається інтерпретації. Для відповіді на питання про розподіл змінних за факторами і необхідно вирішити проблему обертання факторів щодо ознак. Факторну структуру графічно можна представити у вигляді точок-ознак у просторі *M* факторів. Місце знаходження кожної точки задається факторними навантаженнями як координатами цієї точки відповідно отриманим факторам.



Відстань кожної точки від початку координат або довжина вектора-змінної дорівнюють сумі квадратів всіх координат цієї точки (кінця вектора-змінної). *Оскільки координати – це факторні навантаження, то довжина кожного вектора дорівнює спільності відповідної змінної.*

Рішення, при якому кожна змінна має велике навантаження тільки за одним фактором, а за рештою її навантаження близьке до нуля, називається простою структурою.

В даний час використовуються аналітичні способи обертання, реалізовані у всіх комп'ютерних програмах факторного аналізу. Робота аналітичних методів подібна геометричному обертанню «вручну». Кожна пара факторів повертається щодо змінних до тих пір, поки не досягається найбільш можлива простота структури. В одних випадках критерієм простоти є факторна складність змінних **(квартімакс),** в інших – індекс складності кожного фактору **(варімакс),** де факторна складність змінної пропорційна числу загальних факторів, пов'язаних з нею, а індекс складності фактора пропорційний числу змінних, пов'язаних з ним. Найбільш широко застосовується обертання, де на кожному кроці простота структури визначається за критерієм варімакс Г. Кайзера – ***варімакс - обертання.***



Факторна структура п'яти показників інтелекту після варімакс-обертання

6. Проблема оцінки значень факторів

Після інтерпретації факторної структури допускається оцінка значень факторів для об'єктів. Це дозволяє перейти від багатьох вихідних змінних до істотно меншого числа факторів як нових змінних. Це може знадобитися досліднику як для більш компактного представлення відмінностей між об'єктами (або їх групами), так і для подальшого аналізу – регресійного, дисперсійного тощо. У цьому сенсі факторний аналіз як загальнонауковий метод виконує завдання скорочення розмірності набору змінних з мінімальними втратами вихідної інформації. В якості оцінки значення фактору k для об'єкта використовується лінійна комбінація значень вихідних змінних X.

Проблема оцінки значень факторів пов'язана з тим, що неможливо точно визначити загальний фактор через вихідні змінні, оскільки кожна з цих змінних містить крім спільності і характерну частину, яку неможливо відокремити. Тому можна отримати лише оцінку значень факторів за вихідними змінними, надійність якої володіє більшою чи меншою визначеністю – залежно від виду вихідних даних і факторної структури.

У зв'язку з надійністю факторних оцінок особливого значення набуває якість вимірювання вихідних змінних. Чим більше вихідні змінні відповідають вимогам, які висуваються до метричних змінних, тим надійніші факторні оцінки. Умовами значимості факторних оцінок є дійсно проста факторна структура, а також високі значення спільності і факторних навантажень змінних.

7. Послідовність факторного аналізу

Факторний аналіз – це покрокова процедура, де на кожному кроці дослідник приймає рішення про подальше перетвореннях даних. Головним орієнтиром на цьому шляху залишається можливість отримання змістовної інтерпретації кінцевих результатів.

Весь процес факторного аналізу можна представити як виконання шести етапів:

1. Вибір вихідних даних.
2. Попереднє визначення проблеми числа факторів.
3. Факторизація матриці інтеркореляцій.
4. Обертання факторів і їх попередня інтерпретація.
5. Прийняття рішення про якість факторної структури.
6. Обчислення факторних коефіцієнтів та оцінок.

Дослідник, залежно від своїх цілей, вирішує, скільки разів повторити цю послідовність, які з етапів будуть пропущені і наскільки глибоко буде опрацьовано кожен з них.

Наприклад, якщо дослідника цікавить тільки структура взаємозв'язків ознак, то досить виконати цю послідовність один раз, без останнього етапу.

ТЕМА 10. КЛАСТЕРНИЙ АНАЛІЗ

Основні поняття: кластерний аналіз, дендрограма, багатовимірне шкалювання.

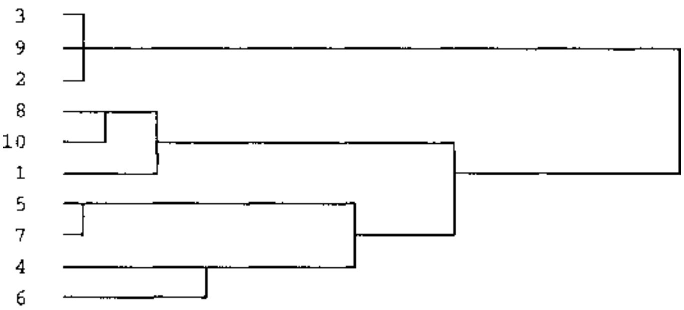
1. Призначення кластерного аналізу

Кластерний аналіз – це метод багатомірного статистичного дослідження, до якого належать збір даних, що містять інформацію про вибіркові об'єкти та упорядкування їх в порівняно однорідні, схожі між собою групи (класи, кластери). При цьому передбачається, що у дослідника немає вихідних даних ні про склад класів, ні про їх відмінності один від одного. Приступаючи до кластерного аналізу, дослідник володіє лише інформацією про характеристики (ознаки) для об'єктів, що дозволяє робити висновок про подібність (відмінність) об'єктів. У літературі часто зустрічаються синоніми кластерного аналізу: автоматична класифікація, таксономічний аналіз, аналіз образів.

Варіанти кластерного аналізу – це безліч простих обчислювальних процедур, що використовуються для класифікації об'єктів. Класифікація об'єктів – це групування їх у класи так, щоб об'єкти в кожному класі були більш схожі один на одного, ніж на об'єкти з інших класів. Більш точно, кластерний аналіз – це процедура впорядкування об'єктів в порівняно однорідні класи на основі попарного порівняння цих об'єктів за попередньо визначеними і виміряними критеріями.

Існує безліч варіантів кластерного аналізу, але найбільш широко використовуються методи, об'єднані назвою ***ієрархічний кластерний аналіз***. Надалі під кластерним аналізом ми будемо розуміти саме цю групу методів. Розглянемо основний принцип ієрархічного кластерного аналізу на прикладі.

Критерій об'єднання об'єктів (кластерів) може бути різним і визначається методом кластерного аналізу. Основним результатом застосування ієрархічного кластерного аналізу є ***дендрограма –*** графічне зображення послідовності об'єднання об'єктів в кластери. Для даного прикладу дендрограма наведена на рисунку.



Дендрограма – графічне зображення послідовності об'єднання об'єктів в кластери

Існує ряд завдань, при вирішенні яких кластерний аналіз є більш ефективним, ніж інші багатовимірні методи:

□ розподіл сукупності випробуваних на групи за виміряними ознаками з метою подальшої перевірки причин міжгрупових відмінностей за зовнішніми критеріями, наприклад, перевірка гіпотез про те, чи проявляються типологічні відмінності між досліджуваними за виміряними ознаками;

□ застосування кластерного аналізу як значно більш простого аналогу факторного аналізу, коли ставиться тільки завдання групування ознак на основі їх кореляцій;

□ класифікація об'єктів на основі безпосередніх оцінок відмінностей між ними (наприклад, дослідження соціальної структури колективу за даними соціометрії – за виявленими міжособистісними вподобаннями).

Незважаючи на відмінність цілей проведення кластерного аналізу, можна виділити загальну його послідовність як ряд відносно самостійних кроків, що грають істотну роль в дослідженні:

1. Відбір об'єктів для кластеризації. Об'єктами можуть бути в залежності від мети дослідження:

а) досліджувані;

б) об'єкти, які оцінюються досліджуваними;

в) ознаки, виміряні на вибірці досліджуваних.

2. Визначення множини змінних, за якими будуть відрізнятися об'єкти кластеризації. Для досліджуваних – це набір виміряних ознак, для оцінюваних об'єктів – суб'єкти оцінки, для ознак – досліджувані. Якщо в якості вихідних даних передбачається використовувати результати попарного порівняння об'єктів, необхідно чітко визначити критерії цього порівняння випробуваними (експертами).

3. Визначення міри відмінності між об'єктами кластеризації. Це перша проблема, яка є специфічною для методів аналізу відмінностей: багатовимірного шкалювання та кластерного аналізу.

4. Вибір і застосування методу класифікації для створення груп схожих об'єктів. Це друга і центральна проблема кластерного аналізу. Її важливість пов'язана з тим, що різні методи кластеризації породжують різні групи для одних і тих самих даних. Хоча аналіз і полягає у виявленні структури, надалі в процесі кластеризації структура привноситься в дані, і дана привнесена структура може не співпадати з реальною.

5. Перевірка достовірності розбиття на класи. Останній етап не завжди необхідний, наприклад, при виявленні соціальної структури групи. Проте слід пам'ятати, що кластерний аналіз завжди розділить сукупність об'єктів на класи, незалежно від того, чи існують вони насправді. Тому марно доводити істотність розподілу на класи, наприклад, на основі достовірності відмінностей між класами за ознаками, включеним в аналіз. Зазвичай, перевіряють стійкість групування на повторній ідентичній вибірці об'єктів. Значимість розподілу перевіряють за зовнішніми критеріями – ознаками, які не увійшли в аналіз.

2. Кластерний та факторний аналіз

Як зазначалося раніше, кластерний аналіз можна застосовувати в ході кореляційного аналізу – для дослідження взаємозв'язків множини змінних, як істотно більш простий і наочний аналог факторного аналізу. У даному випадку представляє інтерес співвіднесення факторного та кластерного аналізу.

Факторний аналіз, як відомо, дозволяє виділити фактори, які інтерпретуються як латентні причини взаємозв'язку груп змінних. При цьому кожен фактор ідентифікується (інтерпретується) через групу змінних, які тісніші пов'язані один з одним, ніж з другими змінними. Нагадаємо, що кластерний аналіз також спрямований на виявлення груп, до складу яких входять об'єкти, що подібні один на одного, ніж на представників інших груп. При цьому, звичайно, кластерний аналіз має зовсім іншу природу, ніж факторний аналіз. Але якщо в якості об'єктів класифікації визначити змінні, а в якості засобів їх відмінності (співпадіння) – кореляції, то кластерний аналіз дозволить отримати той самий результат, що і факторний аналіз.

Важливо відзначити два істотні обмеження факторного аналізу.

По-перше, факторний аналіз неминуче супроводжується втратою вихідної інформації про зв'язки між змінними. І ця втрата часто достатньо відчутна: від 30 до 50%. По-друге, за вимоги «простої структури» випливає, що цінність судження, коли групи змінних, які відповідають різним чинникам, не повинні помітно корелювати одні з іншими. І чим тісніше ці групи зв’язки, тим гірша факторна структура, тим важче фактори піддаються інтерпретації. Не кажучи вже про випадки ієрархічної співпідпорядкованості груп.

Кластерний аналіз позбавлений вказаних недоліків. По-перше, класифікація за допомогою кластерного аналізу за визначенням відображає всю вихідну інформацію про відмінності (зв'язках в даному випадку). По-друге, він не тільки допускає, але і відображає ступінь пов'язаності різних кластерів, включаючи випадки співпідпорядкованості (ієрархічності) кластерів. Таким чином, кластерний аналіз є не тільки більш простою і наочною альтернативою факторного аналізу. У зазначених відносинах він має явні переваги, які доцільно використовувати, принаймні, до спроби застосування факторного аналізу. Як початковий етап дослідження кореляцій, кластерний аналіз дозволить позбутися незгрупованих змінних і виявити ієрархічні кластери, до яких факторний аналіз не чутливий. Цілком ймовірно, що часто після кластерного аналізу немає необхідності у проведенні факторного аналізу. Виняток складають випадки застосування факторного аналізу за його прямим призначенням – для переходу до факторів як до нових інтегральних змінних. Застосовуючи кластерний аналіз для дослідження структури кореляцій, необхідно пам'ятати про дві обставин. По-перше, кореляція є мірою схожості, а не відмінності – її величина зростає (до 1) при збільшенні схожості двох змінних. По-друге, негативні величини кореляції так само свідчать про подібність змінних, як і позитивні, тобто для класифікації необхідно використовувати тільки позитивні кореляції (їх абсолютні значення).

3. Кластерний аналіз і багатовимірне шкалювання

Багатовимірне шкалювання і кластерний аналіз – це методи, засновані на дистанційній моделі: безпосередніми вихідними даними для них є інформація про відмінність об'єктів. Тому важливим є порівняння результатів застосування цих методів щодо одних і тих самих даних. Нагадаємо, що багатовимірне шкалювання, як і факторний аналіз, спрямоване на виявлення невеликого числа шкал. Ці шкали трактуються як критерії, що лежать в основі відмінностей об'єктів та інтерпретуються через об'єкти, поляризовані за цими шкалами. Особливе значення при інтерпретації шкал, на відміну від факторів, приділяється візуалізації координатних уявлень об'єктів у просторі шкал, що пов'язано з неможливістю обертання шкал щодо об'єктів (як факторів щодо ознак в факторному аналізі). Тому особливу цінність при шкалюванні мають дво-, максимум - трьохшкальні рішення. Так само, як і в факторному аналізі, при багатовимірному шкалюванні отримання рішення з малим числом шкал неминуче спричиняє втрату вихідної інформації про відмінність об'єктів.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

Базова

1. Климчук В. О. Математичні методи у психології : Реком. МОНУ як навч. посібник для студ. ВНЗ / В. О. Климчук. – К : Освіта України, 2009. – 288 с.
2. Корольчук М. С. Психологія: схеми, опорні конспекти, методики : навчальний посібник для студ. ВНЗ. Реком. МОНУ / М. С. Корольчук, В. М. Крайнюк, В. М. Марченко ; за заг. ред. М.С. Корольчука. – К : Ельга, Ніка-Центр, 2008. – 320 с.
3. Методологічні та теоретичні проблеми психології : навч. посібник для студ. ВНЗ. Реком. МОНУ / М. С. Корольчук, Ю. Л. Трофімов, В. І. Осьодло, В. В. Стасюк. – К : Ніка-Центр, 2008. – 336 с. – [Авт. кол. на титул. стор. не вказ.].
4. Наследов А. Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных : Учебное пособие / А. Д. Наследов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Речь, 2006. – 392 с.
5. Наследов, А. Д. Применение математических методов в психологии : Учеб. пособие / А. Д. Наследов, С. Г. Тарасов. – Санкт-Петербург : Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2001. – 208 с.
6. Руденко В. М. Математичні методи в психології : Затв. МОНУ як підручник для студ. ВНЗ / В. М. Руденко, Н. М. Руденко. – К : Академвидав, 2009. – 384 с. – (Альма-матер).

Допоміжна

1. Бурлачук Л.Ф., Савченко Е.П. Психодиагностический инструментарий и его применение в условиях социальных служб. / Л.Ф. Бурлачук, Е.П. Савченко – К., 1995.
2. Бурлачук Л.Ф., Морозов С.М. Словарь-справочник по психологической диагностике. / Л.Ф. Бурлачук, С.М. Морозов. – К: Наукова думка, 1989. – 199 с. (7 екз.).
3. Гласс Дж., Стенли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. / Дж.Гласс, Дж.Стенли. –М.:Прогресс, 1976.–495с.
4. Климчук В.О. Викладання курсу "Математичні методи у психології" в умовах кредитно-модульної системи // Соціальна психологія. – 2008. – No2 (28). – С. 180-189.
5. Кричевец А.Н. Математика для психологов: Учебник / А.Н.Кричевец, Е.В. Шикин, А.Г. Дьячков / Под ред. А.Н. Кричевца. М., 2003. – 198 с.
6. Наследов А.Д. SPSS: Компьютерный анализ данных в психологии и социальных науках, 2-е изд. / А.Д. Наследов. – СПб.: Питер, 2007. – 416с.
7. Остапенко Р.И. Математические основыпсихологии / Р.И.Остапенко. – Воронеж: ВГПУ, 2009. –76с.

8. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки п психологии / Е.В.Сидоренко. –СПБ.: Речь, 2000. –350с.
9. Суходольский Г.В. Математические методы психологии. / Г.В. Суходольский. – СПб., –2003. –245 с.
10. Тарасов С.Г. Основы применения математических методов в психологии. / С.Г. Тарасов. – СПб., –1998. –275 с.
11. Телейко А. Б. Математико-статистичні методи в соціології та психології: навч. посібник / А. Б. Телейко, Р. К. Чорней. –Київ : МАУП, 2007 . – 418 с.
12. Фадєєва Т.О. Практичні заняття до курсу «Математичні методи у психології» / Т.О.Фадєєва. –Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2011. – 76с.
13. Шакурова З. А. Основы математической статистики для психологов: Учебное пособие / З.А.Шакурова.–Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2000. –35 с.

Інформаційні ресурси

1. Бібліотека МДУ, Філатова,16 – http://msu.edu.ua/library/
2. Веб сторінка МДУ: www.msu.edu.ua
3. Мукачівська міська бібліотека: http://www.muklib.mk.uz.ua
4. Бібліотека психологічної літератури: http://psylib.kiev.ua/
5. Українські підручники он-лайн: http://pidruchniki.ws/
6. Психологічна бібліотека Псі-фактор: http://psyfactor.org
7. Закарпатська обласна універсальна наукова бібліотека ім. Ф. Потушняка. м.Ужгород, вул. Проспект Свободи, 16 – http://biblioteka.uz.ua/

Навчально-методичне видання

Статистичні методи у психології

Курс лекцій з дисципліни для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності 053 Психологія ОС «Магістр»

Укладачі: І.О. Корнієнко, О.Ю. Воронова

Тираж 10 пр.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 4916 від 16.06.2015 р.

Редакційно-видавничий відділ МДУ,
89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26

МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26
тел./факс +380-3131-21109
Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua
E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua
Веб-сайт Інституційного репозитарію Наукової бібліотеки МДУ: http://dspace.msu.edu.ua:8080
Веб-сайт Наукової бібліотеки МДУ: http://msu.edu.ua/library/