

УДК 539.3

ДИНАМИКА ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

БАБИЧ С. Ю.¹, ГЛУХОВ Ю. П.¹, ЛАЗАР В. Ф.²

Институт механики им. Тимошенко¹
Мукачевский государственный университет²

В данной статье в рамках линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена плоская установившаяся задача о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой двухслойного полупространства с начальными напряжениями.

Рассматриваемая среда состоит из слоя и подстилающего его полупространства. Движение слоя описано системой уравнений из теории пластин, учитывающей влияние инерции вращения и поперечного сдвига.

Полупространство состоит из сжимаемого или несжимаемого предварительно напряженного изотропного нелинейно-упругого материала с произвольной формой упругого потенциала. Начальное напряженно-деформированное состояние полупространства является однородным. Граничные поверхности элементов слоистой среды плоские и параллельные между собой.

К свободной границе слоя приложена сосредоточенная нагрузка, движущаяся с постоянной скоростью в течение большого промежутка времени. Относительно системы координат, связанной с этой нагрузкой, существует установившееся плоское деформированное состояние.

Предполагается, что напряжения, возникающие за счет действия нагрузки, значительно меньше начальных напряжений. Указанное предположение позволяет применять линеаризованную теорию упругости для описания дополнительного напряженного состояния, вызванного действием нагрузки.

Поставленная краевая задача решается с помощью интегрального преобразования Фурье. В области изображений Фурье решение задачи сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Решение задачи получено в общем виде для сжимаемого и несжимаемого материалов с произвольным упругим потенциалом для теории конечных и двух вариантов малых начальных деформаций, для случаев неравных и равных корней, для различных условий сопряжения слоя и полупространства и для любой скорости движения нагрузки (дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой).

На основании полученных результатов проведено численное исследование влияния начальных напряжений на значение критических скоростей движения нагрузки и на напряженно-деформированное состояние двухслойной среды.

Численные исследования выполнены для сжимаемого и для несжимаемого материалов соответственно с потенциалом гармонического типа и потенциалом типа Бартенева-Хазановича в рамках теории конечных начальных деформаций.

Анализ полученных результатов позволяет сделать выводы, что начальные (остаточные) напряжения оказывают существенное влияние на значение параметров, характеризующих напряженно-деформированное состояние двухслойного полупространства. Влияние начальных напряжений зависит от скорости движения поверхностной нагрузки, механических параметров элементов слоистой среды и условий их сопряжения.

Ключевые слова: слоистое полупространство, начальные напряжения, подвижная нагрузка

Одной из задач, представляющей значительный научный и практический интерес, является задача о распространении волн в телах под действием приложенных к их границам подвижных нагрузок. Задачи такого рода возникают также при расчете аэродромных и дорожных покрытий, при расчете пластин и оболочек, находящихся в подвижной среде или под действием движущихся штампов и во многих других случаях.

Следует отметить, что как с математической, так и с физической точки зрения, подвижная нагрузка является понятием весьма общего характера. Поэтому основные закономерности действия подвижной нагрузки могут изучаться безотносительно того, в результате какого физического процесса эти проблемы возникли.

Данная статья является математическим обобщением результатов, полученных авторами по данной теме в предыдущих работах [1,2,4].

Постановка задачі

Рассмотрим слой толщиной $2h$, лежащий на полупространстве, начальное напряженно-деформированное состояние которого определяется следующими компонентами вектора перемещений и тензора обобщенных напряжений:

$$u_j^0 = \delta_{ij} (\lambda_i + 1) x_i; \quad \sigma_{ii}^{*0} \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

Где λ_i – удлинения ($\lambda_i = \text{const}$) вдоль осей лагранжевой системы координат x_i , совпадающей в естественном состоянии с декартовой системой координат. Наряду с лагранжевыми координатами введем декартовые координаты ξ_i начального деформированного состояния, связанные с координатами x_i соотношениями $\xi_i = \lambda_i x_i$.

К свободной границе слоя приложена движущаяся с постоянной скоростью v нагрузка, не зависящая от координаты ξ_3 . Такая нагрузка вызывает в рассматриваемой слоистой среде плоское деформированное состояние.

Для решения задачи воспользуемся соотношениями линеаризированной теории упругости сжимаемых тел с начальными напряжениями [3]. Предполагая, что картина деформаций инвариантна относительно времени в движущейся вместе с нагрузкой системе координат (y_1, y_2) , где $y_1 = \xi_1 - vt$; $y_2 = \xi_2$, уравнение установившегося движения полупространства через функцию $\chi(y_1, y_2)$ можно записать в виде

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)} = 0, \quad j=1,2. \quad (2)$$

Корни η_1 и η_2 определяются из уравнения

$$\eta^4 + 2A\eta^2 + A_1 = 0, \quad (3)$$

где коэффициенты A и A_1 в случае сжимаемого материала определяются из соотношений

$$2A\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} = \tilde{\omega}_{2222}(\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) + \tilde{\omega}_{2112}(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2) - (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212})^2; \quad (4)$$

$$2A_1\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} = (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2)(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \tilde{\rho}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \rho;$$

а в случае несжимаемого материала из соотношений

$$2A\tilde{q}_{22}^2\tilde{\alpha}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2\tilde{\alpha}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2(\tilde{\alpha}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) - 2\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}(\tilde{\alpha}_{1122} + \tilde{\alpha}_{1212}); \quad (5)$$

$$2A_1\tilde{q}_{22}^2\tilde{\alpha}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2(\tilde{\alpha}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \tilde{q}_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i q_i; \quad \tilde{\rho} = \rho;$$

В формулах (4) и (5) ρ – плотность материала полупространства в естественном состоянии.

Предположим, что движение слоя может быть описано системой уравнений из теории пластин, учитывающей влияние инерции вращения и поперечного сдвига. Для пластины, находящейся под воздействием поперечных и тангенциальных поверхностных сил, соответствующие уравнения приведены в [10]. В системе координат (y_1, y_2) уравнения теории пластин могут быть записаны как

$$\begin{aligned}
 2h \left(\frac{2G_1}{1-\nu_1} - \rho_1 v^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \tau &= P_1; \\
 2h (\kappa G_1 - \rho_1 v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} - 2\kappa G_1 h \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - q &= P_2; \\
 \frac{2h^2}{3} \left(\frac{2G_1}{1-\nu_1} - \rho_1 v^2 \delta_0 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2\kappa G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} - \varphi \right) - \tau &= 0;
 \end{aligned} \tag{6}$$

В уравнениях (6) G_1 , ν_1 и ρ_1 суть соответственно модуль сдвига, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины; u и w – перемещения срединной поверхности пластины ($y_2 = 0$), а δ_0 – постоянная, которая принимает значение 1 или 0 в зависимости от учета или пренебрежения инерцией вращения пластины при выводе уравнений (6); φ – угол поворота поперечного сечения пластины; κ – коэффициент сдвига Тимошенко; q и τ – соответственно нормальные и касательные напряжения, действующие на поверхности раздела пластины и полупространства; P_1 и P_2 – касательные и нормальные составляющие нагрузки на свободной поверхности пластины. Величина изгибающего момента в пластине определяется по формуле

$$M = \frac{4 G_1 h^3}{3 (1-\nu_1)} \frac{d\varphi}{dy_1} \tag{7}$$

Рассмотрим два случая контакта между пластиной и полупространством при $y_2 = -h$:

жесткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = \tau; \quad \tilde{Q}_{22} = q; \quad u_2 = w; \quad u_1 = u + h\varphi; \tag{8}$$

нежесткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \quad \tau = 0; \quad \tilde{Q}_{22} = q; \quad u_2 = w. \tag{9}$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений движения (2) и (6) при граничных условиях (8) или (9).

Используя уравнения движения пластины (6) и условия (8) и (9) граничные условия можно записать в общем виде

$$\begin{aligned}
 \delta_1 \theta_1 \left(\frac{d^2 u_1}{dy_1^2} - h \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} \right) - \tilde{Q}_{21} &= \delta_1 P_1 \\
 \theta_3 \frac{d^2 u_2}{dy_1^2} - 2\kappa h G_1 \frac{d\varphi}{dy_1} - \tilde{Q}_{22} &= P_2 \\
 \theta_2 \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} + 2\kappa G_1 \left(\frac{du_2}{dy_1} - \varphi \right) - \delta_1 \tilde{Q}_{21} &= 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\theta_1 = 2h \left(\frac{2G_1}{1-\nu_1} - \rho_1 v^2 \right); \quad \theta_2 = \frac{2h^2}{3} \left(\frac{2G_1}{1-\nu_1} - \delta_0 \rho_1 v^2 \right); \quad \theta_3 = 2h (\kappa G_1 - \rho_1 v^2).$$

Параметр δ_1 равен 1 при жестком контакте и 0 при нежестком контакте.

Значения функций $\eta_1^2(\mathbf{v})$ и $\eta_2^2(\mathbf{v})$ определяют вид уравнений движения (2) и соответственно выбор формы решения рассматриваемых уравнений. Влияние скорости движения нагрузки на значение корней уравнения (3) для сжимаемого и несжимаемого полупространства подробно исследовано в работах [1,2]. Запишем решение задачи в общем виде для равных и неравных корней уравнения (3).

Напряжения, перемещения и скорости перемещений в полупространстве через функции $\chi^{(j)}$ определяются по формулам [3]

$$\tilde{Q}_{ij} = \left(\alpha_{ij}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_{2-\delta_{ij}}} + \left(\alpha_{ij}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_{1+\delta_{ij}}}; \quad i, j = 1, 2; \quad (11)$$

$$u_i = -\beta_{i1}^{(i)} \frac{\partial^2 \chi^{(i)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\beta_{i1}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{i2}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \quad (12)$$

$$\dot{u}_i = \mathbf{v} \left[\beta_{i1}^{(i)} \frac{\partial^3 \chi^{(i)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left(\beta_{i1}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{i2}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial y_1} \right]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \quad (13)$$

где в случае сжимаемого материала

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}^{(11)} &= \tilde{\omega}_{ii22} (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho} \mathbf{v}^2) - \tilde{\omega}_{ii11} (\tilde{\omega}_{1212} + \tilde{\omega}_{2211}); & \alpha_{ii}^{(12)} &= \tilde{\omega}_{ii11} (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho} \mathbf{v}^2); & \alpha_{ii}^{(21)} &= \tilde{\omega}_{ii22} \tilde{\omega}_{2112}; \\ \alpha_{ii}^{(22)} &= \tilde{\omega}_{ii11} \tilde{\omega}_{2222} - \tilde{\omega}_{ii22} (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{2121}); & \alpha_{ij}^{(11)} &= \tilde{\omega}_{ij21} (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho} \mathbf{v}^2); & \alpha_{ij}^{(22)} &= \tilde{\omega}_{ij12} \tilde{\omega}_{2222}; \\ \alpha_{ij}^{(12)} &= \tilde{\omega}_{ij12} (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho} \mathbf{v}^2) - \tilde{\omega}_{ij21} (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{2121}); & \alpha_{12}^{(21)} &= \tilde{\omega}_{ij21} \tilde{\omega}_{2112} - \tilde{\omega}_{ij12} (\tilde{\omega}_{1212} + \tilde{\omega}_{2211}); \\ \beta_{11}^{(1)} &= \beta_{21}^{(2)} = \beta = \tilde{\omega}_{1212} + \tilde{\omega}_{2211}; & \beta_{i2}^{(j)} &= \tilde{\omega}_{2jj2}; & \beta_{i1}^{(j)} &= \tilde{\omega}_{1jj1} - \tilde{\rho} \mathbf{v}^2; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \end{aligned}$$

а в случае несжимаемого материала

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}^{(ii)} &= (-1)^i \tilde{q}_{jj}^{-1} \tilde{\kappa}_{1212} - \delta_{j2} \tilde{\rho} \mathbf{v}^2 \tilde{q}_{11}^{-1}; & \alpha_{jj}^{(ii)} &= \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{ii}^{-2} (\tilde{\kappa}_{iiii} - \delta_{j2} \tilde{\rho} \mathbf{v}^2) + \tilde{\kappa}_{jjjj} \tilde{q}_{jj}^{-1} - \tilde{q}_{ii}^{-1} (2\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}); \\ \alpha_{ij}^{(12)} &= -\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{ij21}; & \alpha_{ij}^{(22)} &= \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{ij12}; & \alpha_{ij}^{(11)} &= \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{ij21}; & \alpha_{ij}^{(21)} &= -\tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{ij12}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \\ \alpha_{22}^{(12)} &= \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{\rho} \mathbf{v}^2); & \alpha_{11}^{(12)} &= \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} \alpha_{22}^{(12)}; & \alpha_{11}^{(21)} &= \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{2112}; & \alpha_{22}^{(21)} &= \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{11}^{-1} \alpha_{11}^{(21)}; \\ \beta_{11}^{(1)} &= \beta_{12}^{(2)} = \beta = \tilde{q}_{11}^{-1}; & \beta_{21}^{(2)} &= \beta_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}; & \beta_{11}^{(2)} &= \beta_{22}^{(1)} = 0; \end{aligned}$$

Учитывая (11) и (12), граничные условия (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left[\delta_1 \theta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \left(\beta_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\alpha_{21}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{21}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \chi^{(2)} - \\ & - \left[\delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \left(\alpha_{21}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{21}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1} - \delta_1 \theta_1 h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = \delta_1 P_1; \\ & - 2\kappa h G_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \left[\theta_3 \beta_{21}^{(2)} \frac{\partial^3}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \left(\alpha_{22}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{22}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1} + \\ & + \left[\theta_3 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \left(\beta_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\alpha_{22}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{22}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \chi^{(1)} = P_2; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \theta_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} - 2\kappa G_1 \varphi - \left[(2\kappa G_1 \beta_{21}^{(2)} + \delta_1 \alpha_{21}^{(12)}) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \delta_1 a_{21}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_2} + \\ & + \left[(2\kappa G_1 \beta_{21}^{(1)} - \delta_1 a_{21}^{(11)}) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + (2\kappa G_1 \beta_{22}^{(1)} - \delta_1 a_{21}^{(21)}) \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1} = 0; \end{aligned}$$

Таким образом, задача об установившемся движении двухслойного сжимаемого полупространства при воздействии подвижной нагрузки сводится к нахождению функций $\chi^{(j)}$ и φ из граничных условий (14).

Результаты теоретических и экспериментальных исследований. Решение задачи найдем с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной y_1 и соответствующей формулы обращения. Применяя преобразование Фурье к уравнениям (2), получим

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \chi^{(j)F} = 0; \quad j=1,2.; \quad (15)$$

Определим решение задачи в общем виде для случаев неравных и равных корней, для различных условий сопряжения слоя и полупространства и для любой скорости движения нагрузки (дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой).

Граничные условия (14) в пространстве изображений Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(-\alpha_{21}^{(22)} \frac{d^3}{dy_2^3} - k^2 \delta_1 \theta_1 \beta_{12}^{(2)} \frac{d^2}{dy_2^2} + k^2 \alpha_{21}^{(12)} \frac{d}{dy_2} + k^4 \delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(2)} \right) \chi^{(2)F} - \\ & - ik \left(\alpha_{21}^{(21)} \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(1)} \frac{d}{dy_2} - k^2 \alpha_{21}^{(11)} \right) \chi^{(1)F} + k^2 \delta_1 \theta_1 h \varphi^F = \delta_1 P_1^F; \\ & - 2ik\kappa h G_1 \varphi^F + ik \left(-a_{22}^{(22)} \frac{d^2}{dy_2^2} + k^2 \theta_3 \beta_{21}^{(2)} \frac{d}{dy_2} + k^2 \alpha_{22}^{(12)} \right) \chi^{(2)F} - \\ & - \left(a_{22}^{(21)} \frac{d^3}{dy_2^3} + k^2 \theta_3 \beta_{22}^{(1)} \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 a_{22}^{(11)} \frac{d}{dy_2} - k^4 \theta_3 \beta_{21}^{(1)} \right) \chi^{(1)F} = P_2^F; \\ & \left(k^2 \theta_2 + 2\kappa G_1 \right) \varphi^F - \left[k^2 (2\kappa G_1 \beta_{21}^{(2)} + \delta_1 \alpha_{21}^{(12)}) - \delta_1 a_{21}^{(22)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right] \frac{d \chi^{(2)F}}{dy_2} + \\ & + ik \left[k^2 (2\kappa G_1 \beta_{21}^{(1)} - \delta_1 a_{21}^{(11)}) - (2\kappa G_1 \beta_{22}^{(1)} - \delta_1 a_{21}^{(21)}) \frac{d^2}{dy_2^2} \right] \chi^{(1)F} = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

Решение преобразованного уравнения (15) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$\chi^{F(j)} = \left[1 - \delta_{j2} (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}) \right] \left\{ C_1^{(j)} e^{k_1 k \eta_1 (y_2 + h)} + \left[\delta_{\eta_1 \eta_2} (y_2 + h) + 1 - \delta_{\eta_1 \eta_2} \right] C_2^{(j)} e^{k_2 k \eta_2 (y_2 + h)} \right\}; \quad (17)$$

где $C_m^{(j)}$ ($j, m = 1, 2$) – постоянные интегрирования,

$$\gamma_j = k_j \eta_j; \quad j = 1, 2; \quad \delta_{\eta_1 \eta_2} = \begin{cases} 0, & \eta_1 \neq \eta_2; \\ 1, & \eta_1 = \eta_2; \end{cases} \quad \delta_{j2} = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ 1, & j = 2 \end{cases}$$

Введем постоянные интегрирования

$$C_1^{(1)} = iC_1; \quad C_2^{(1)} = iC_2; \quad C_1^{(2)} = C_1; \quad C_2^{(2)} = C_2; \quad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в (16), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1 , C_2 и φ^F

$$\begin{aligned} k(a_{11}^{(1)} + ka_{11}^{(2)})C_1 + (a_{12}^{(1)} + ka_{12}^{(2)} + k^2a_{12}^{(3)})C_2 + a_{13}\varphi^F &= k^{-2}\delta_1P_1^F; \\ k^2(a_{21}^{(1)} + ka_{21}^{(2)})C_1 + k(a_{22}^{(1)} + ka_{22}^{(2)} + k^2a_{22}^{(3)})C_2 + a_{23}\varphi^F &= -ik^{-1}P_2^F; \\ k^3a_{31}C_1 + k^2(a_{32}^{(1)} + ka_{32}^{(2)})C_2 + (a_{33}^{(1)} + k^2a_{33}^{(2)})\varphi^F &= 0; \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} &= -\gamma_{21}^{(11)} + \delta_{\eta/2}\gamma_1\gamma_{21}^{(21)}; \quad a_{11}^{(2)} = \delta_1\theta_1(\delta_{\eta/2}\theta_1^{(21)} - \beta_{11}^{(1)}\gamma_1); \quad a_{12}^{(1)} = \delta_{\eta/2}[\gamma_{21}^{(22)} + 2\gamma_2(\alpha_{21}^{(21)} - \alpha_{21}^{(22)}\gamma_2)]; \\ a_{12}^{(2)} &= -[\delta_1\delta_{\eta/2}\theta_1(\beta_{11}^{(1)} + 2\beta_{12}^{(2)}\gamma_2) + (1 - \delta_{\eta/2})\gamma_{21}^{(12)}]; \quad a_{12}^{(3)} = -\delta_1\theta_1\beta_{11}^{(1)}\gamma_2(1 - \delta_{\eta/2}); \quad a_{13} = \delta_1\theta_1h; \\ a_{21}^{(1)} &= \gamma_1\gamma_{22}^{(11)} + \delta_{\eta/2}\gamma_{22}^{(21)}; \quad a_{21}^{(2)} = \theta_3(\theta_2^{(11)} + \delta_{\eta/2}\beta_{21}^{(2)}\gamma_1); \quad a_{22}^{(1)} = \delta_{\eta/2}[\gamma_{22}^{(12)} - 2\gamma_2(\alpha_{22}^{(22)} + a_{22}^{(21)}\gamma_2)]; \\ a_{22}^{(2)} &= \delta_{\eta/2}\theta_3(\beta_{21}^{(2)} - 2\beta_{22}^{(1)}\gamma_2) + (1 - \delta_{\eta/2})\gamma_2\gamma_{22}^{(12)}; \quad a_{22}^{(3)} = \theta_3\theta_2^{(12)}(1 - \delta_{\eta/2}); \quad a_{23} = -2\kappa hG_1; \\ a_{31} &= 2\kappa G_1(\theta_2^{(11)} + \delta_{\eta/2}\gamma_1\beta_{21}^{(2)}) + \delta_1(\delta_{\eta/2}\gamma_1\gamma_{21}^{(21)} - \gamma_{21}^{(11)}); \quad a_{32}^{(1)} = (1 - \delta_{\eta/2})(2\kappa G_1\theta_2^{(12)} - \delta_1\gamma_{21}^{(12)}); \\ a_{32}^{(2)} &= \delta_{\eta/2}\{2\kappa G_1(\beta_{21}^{(2)} - 2\gamma_2\beta_{22}^{(1)}) + \delta_1[\gamma_{21}^{(22)} + 2\gamma_2(\alpha_{21}^{(21)} - a_{21}^{(22)}\gamma_2)]\}; \quad a_{33}^{(1)} = -2\kappa G_1; \quad a_{33}^{(2)} = -\theta_2; \\ \theta_m^{(kj)} &= \beta_{m1}^{(k)} - \beta_{m2}^{(k)}\gamma_j^2; \quad \gamma_{mk}^{(nj)} = \alpha_{mk}^{(1n)} - \alpha_{mk}^{(2n)}\gamma_j^2; \quad j, k, m = 1, 2; \end{aligned}$$

Решение системы (19) можно записать следующим образом

$$C_j = \frac{\delta_1 P_1^F U_1^{(j)} + i P_2^F U_2^{(j)}}{\Delta(k)}; \quad j = 1, 2; \quad \varphi^F = \frac{\delta_1 P_1^F U_1 + i P_2^F U_2}{\Delta(k)}; \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= k^2(b_0 + kb_1 + k^2b_2 + k^3b_3 + k^4b_4 + k^5b_5); \quad U_j^{(1)} = k^{-1}(b_{10}^{(j)} + kb_{11}^{(j)} + k^2b_{12}^{(j)} + k^3b_{13}^{(j)} + k^4b_{14}^{(j)}); \\ U_j^{(2)} &= -(b_{20}^{(j)} + kb_{21}^{(j)} + k^2b_{22}^{(j)} + k^3b_{23}^{(j)}); \quad U_j = k^2(b_{30}^{(j)} + kb_{31}^{(j)} + k^2b_{32}^{(j)}); \quad j = 1, 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= a_{33}^{(1)}(a_{11}^{(1)}a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}); \quad b_1 = a_{33}^{(1)}(a_{11}^{(2)}a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)}a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(1)}a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(2)}a_{21}^{(1)}) + a_{23}(a_{31}a_{12}^{(1)} - a_{11}^{(1)}a_{32}^{(1)}); \\ b_2 &= a_{33}^{(1)}(a_{22}^{(2)}a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(3)}a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(2)}a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(3)}a_{21}^{(1)}) + a_{23}(a_{31}a_{12}^{(2)} - a_{11}^{(1)}a_{32}^{(2)} - a_{11}^{(2)}a_{32}^{(1)}) + \\ &+ a_{33}^{(2)}(a_{11}^{(1)}a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)}a_{21}^{(1)}) + a_{13}(a_{21}^{(1)}a_{32}^{(1)} - a_{31}a_{22}^{(1)}); \quad b_3 = a_{33}^{(2)}(a_{11}^{(2)}a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)}a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(1)}a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(2)}a_{21}^{(1)}) + \\ &+ a_{13}(a_{21}^{(1)}a_{32}^{(2)} + a_{21}^{(2)}a_{32}^{(1)} - a_{31}a_{22}^{(2)}) + a_{23}(a_{31}a_{12}^{(3)} - a_{11}^{(2)}a_{32}^{(2)}) + a_{33}^{(3)}(a_{22}^{(3)}a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(3)}a_{21}^{(1)}); \\ b_4 &= a_{33}^{(2)}(a_{11}^{(2)}a_{22}^{(2)} + a_{11}^{(1)}a_{22}^{(3)} - a_{12}^{(2)}a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(3)}a_{21}^{(1)}) + a_{13}(a_{21}^{(2)}a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(3)}a_{31}); \quad b_5 = a_{33}^{(2)}(a_{22}^{(3)}a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(3)}a_{21}^{(1)}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{10}^{(1)} &= a_{22}^{(1)}a_{33}^{(1)}; \quad b_{11}^{(1)} = a_{22}^{(2)}a_{33}^{(1)} - a_{23}a_{32}^{(1)}; \quad b_{12}^{(1)} = a_{22}^{(3)}a_{33}^{(1)} + a_{33}^{(2)}a_{22}^{(1)} - a_{23}a_{32}^{(2)}; \quad b_{13}^{(1)} = a_{33}^{(2)}a_{22}^{(2)}; \quad b_{14}^{(1)} = a_{33}^{(2)}a_{22}^{(3)}; \\ b_{10}^{(2)} &= a_{12}^{(1)}a_{33}^{(1)}; \quad b_{11}^{(2)} = a_{12}^{(2)}a_{33}^{(1)}; \quad b_{12}^{(2)} = a_{12}^{(3)}a_{33}^{(1)} + a_{33}^{(2)}a_{12}^{(1)} - a_{13}a_{32}^{(1)}; \quad b_{13}^{(2)} = a_{33}^{(2)}a_{12}^{(2)} - a_{13}a_{32}^{(2)}; \quad b_{14}^{(2)} = a_{33}^{(2)}a_{12}^{(3)}; \\ b_{20}^{(1)} &= a_{21}^{(1)}a_{33}^{(1)}; \quad b_{21}^{(1)} = a_{21}^{(2)}a_{33}^{(1)} - a_{23}a_{31}; \quad b_{22}^{(1)} = a_{21}^{(1)}a_{33}^{(2)}; \quad b_{23}^{(1)} = a_{21}^{(2)}a_{33}^{(2)}; \\ b_{20}^{(2)} &= a_{11}^{(1)}a_{33}^{(1)}; \quad b_{21}^{(2)} = a_{11}^{(2)}a_{33}^{(1)}; \quad b_{22}^{(2)} = a_{11}^{(1)}a_{33}^{(2)} - a_{13}a_{31}; \quad b_{23}^{(2)} = a_{11}^{(2)}a_{33}^{(2)}; \\ b_{30}^{(1)} &= a_{21}^{(1)}a_{32}^{(1)} - a_{22}^{(1)}a_{31}; \quad b_{31}^{(1)} = a_{21}^{(1)}a_{32}^{(2)} + a_{21}^{(2)}a_{32}^{(1)} - a_{22}^{(2)}a_{31}; \quad b_{32}^{(1)} = a_{21}^{(2)}a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(3)}a_{31}; \\ b_{30}^{(2)} &= a_{11}^{(1)}a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(1)}a_{31}; \quad b_{31}^{(2)} = a_{11}^{(1)}a_{32}^{(2)} + a_{11}^{(2)}a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(2)}a_{31}; \quad b_{32}^{(2)} = a_{11}^{(2)}a_{32}^{(2)} - a_{12}^{(3)}a_{31}; \end{aligned}$$

Применим преобразование Фурье к формулам (7), (11) и (13)

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jm}^F &= \left(-k^2 \alpha_{jm}^{(12-\delta_{jm})} + \alpha_{jm}^{(22-\delta_{jm})} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \frac{d \chi^{(2-\delta_{jm})F}}{dy_2} + \\ &+ ik \left(-k^2 \alpha_{jm}^{(11+\delta_{jm})} + \alpha_{jm}^{(21+\delta_{jm})} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^{(1+\delta_{jm})F}; \quad j, m = 1, 2; \\ \dot{u}_j^F &= -ikv \left(-k^2 \beta_{j1}^{(m)} + \beta_{j2}^{(m)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^{(m)F} - k^2 v \beta_{j1}^{(j)} \frac{d \chi^{(j)F}}{dy_2}; \quad j, m = 1, 2; \quad i \neq m; \\ M^F &= \frac{4 ik G_1 h^3}{3 (1 - \nu_1)} \varphi^F; \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом (17), (18) и (20) выражения (21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{mj}^F &= (-i)^{\delta_{mj}} k^2 \Delta^{-1}(k) (\delta_1 P_1^F \Gamma_{mj}^{(1)} + i P_2^F \Gamma_{mj}^{(2)}); \\ \dot{u}_j^F &= i^{2-j} v k^2 \Delta^{-1}(k) (\delta_1 P_1^F \Gamma_2^{(1)} + i P_2^F \Gamma_2^{(2)}); \quad m, j = 1, 2; \\ M^F &= k \Delta^{-1}(k) (i \delta_1 P_1^F \Gamma_\varphi^{(1)} - P_2^F \Gamma_\varphi^{(2)}); \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{mm}^{(j)} &= k (\gamma_1 \gamma_{mm}^{(11)} + \delta_{\eta_1 \eta_2} \gamma_{mm}^{(21)}) U_j^{(1)} e^{k\gamma_1(y_2+h)} - \left\{ \delta_{\eta_1 \eta_2} \left[2\gamma_2 (\gamma_2 \alpha_{mm}^{(21)} + \alpha_{mm}^{(22)}) - \gamma_{mm}^{(12)} \right] - \right. \\ &- k \left\{ \delta_{\eta_1 \eta_2} (y_2 + h) (\gamma_2 \gamma_{mm}^{(12)} + \gamma_{mm}^{(22)}) + (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}) \gamma_2 \gamma_{mm}^{(12)} \right\} \left. \right\} U_j^{(2)} e^{k\gamma_2(y_2+h)}; \\ \Gamma_{mm}^{(j)} &= k (\gamma_{mm}^{(11)} - \delta_{\eta_1 \eta_2} \gamma_1 \gamma_{mm}^{(21)}) U_j^{(1)} e^{k\gamma_1(y_2+h)} + \left\{ \delta_{\eta_1 \eta_2} \left[2\gamma_2 (\gamma_2 \alpha_{mm}^{(22)} - \alpha_{mm}^{(21)}) - \gamma_{mm}^{(12)} \right] + \right. \\ &+ k \left[\delta_{\eta_1 \eta_2} (y_2 + h) (\gamma_{mm}^{(12)} - \gamma_2 \gamma_{mm}^{(22)}) + (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}) \gamma_{mm}^{(12)} \right] \left. \right\} U_j^{(2)} e^{k\gamma_2(y_2+h)}; \\ \Gamma_\varphi^{(j)} &= \frac{4 G_1 h^3 U_j}{3 (1 - \nu_1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении двухслойного упругого полупространства с начальными напряжениями под воздействием подвижной нагрузки в области изображений Фурье имеет вид (22).

Из (22) следует, что значение величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние двухслойного упругого полупространства неограниченно возрастают при $\Delta(k) \rightarrow 0$. При условии существования действительных положительных кратных корней уравнения $\Delta(k) = 0$ возможен резонанс [10].

Результаты исследований функции $\Delta(k)$ для сжимаемого и несжимаемого полупространства и различных случаев сопряжения пластины и полупространства приведены в работах [1,2].

Из полученных в [1,2] результатов следует, что количество критических скоростей движения нагрузки существенно зависит от начальных напряжений в полупространстве, механических характеристик пластины и полупространства и условий их контакта. Влияние начальных напряжений на значения критических скоростей более существенно для сравнительно мягких пластин и для нежесткого контакта. Значение наименьшей критической скорости при нежестком контакте всегда меньше, чем при жестком.

Обсуждение результатов исследования.

Для того, чтобы перейти в формулах (22) к оригиналам следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

Из полученных в [1,2] результатов следует, что вычисление интегралов обращения существенно зависит от скорости движения нагрузки. В зависимости от скорости v знаменатель $\Delta(k)$ в интегралах обращения может иметь действительные положительные корни, а может и не иметь. Если ни один корень не лежит на действительной оси, то интегралы обращения не имеют особенностей и их можно вычислить непосредственно с помощью таблиц [8]. При наличии неравных действительных положительных корней знаменателя $\Delta(k)$ интегралы вдоль контура интегрирования от $-\infty + i\gamma$ до $+\infty + i\gamma$ можно заменить суммой главного значения интеграла и суммой всех вычетов, умноженной на $(-i\pi)$ [11]. В случае существования двойного положительного корня интегралы обращения не существуют даже в смысле Коши, т.е. появляется резонанс.

Так как при постановке задачи предполагалось, что возмущения, вызванные движущейся нагрузкой, очень малы, то резонансная область из рассмотрения была исключена.

На рисунках 1-4 показано, как влияют начальные напряжения в основании на характеристики напряженно-деформированного состояния в двухслойном полупространстве при различных скоростях движения нагрузки (дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой) и условиях контакта пластины и полупространства.

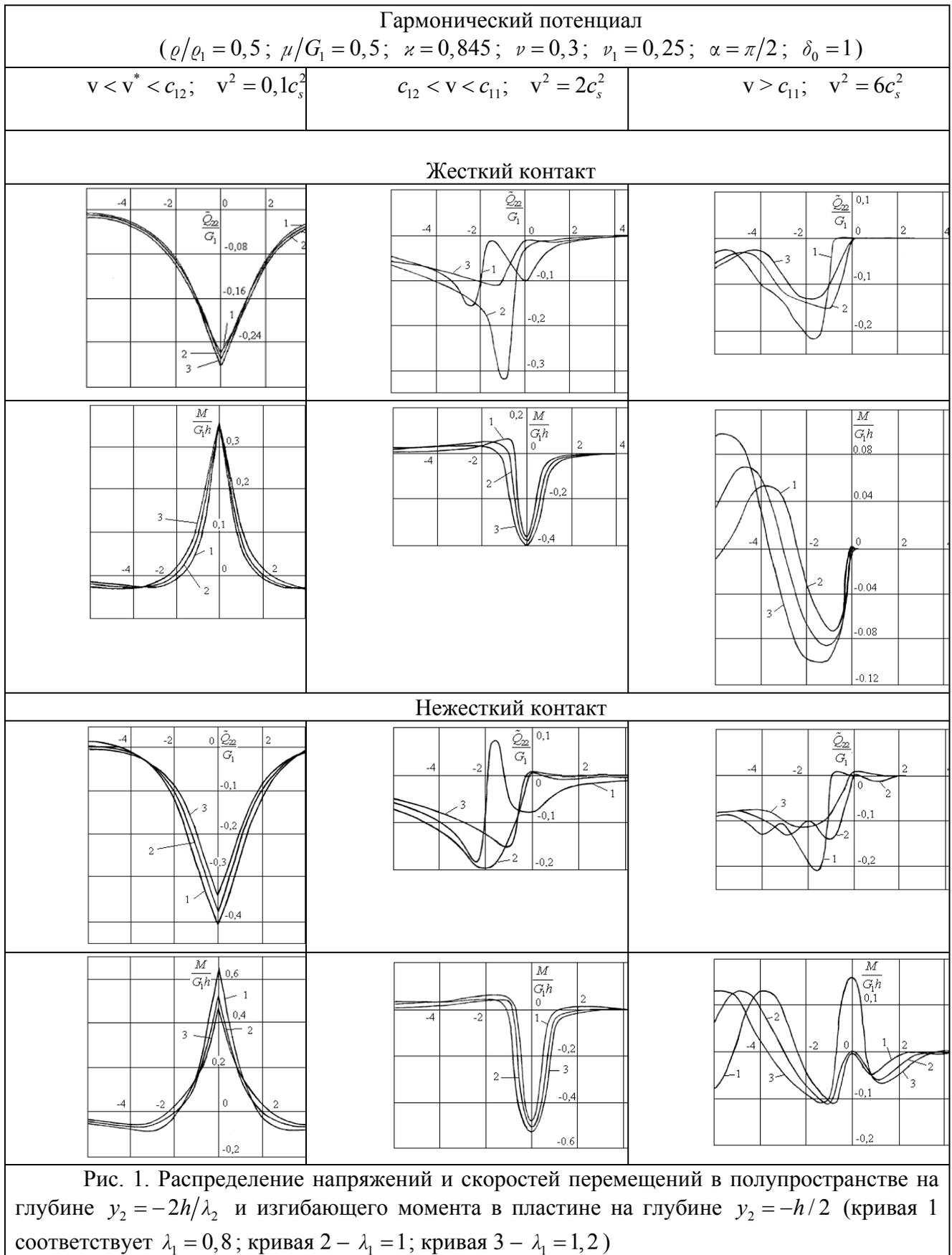
На рисунках используются следующие обозначения: c_{11} и c_{12} - скорости распространения в направлении оси Oy_1 соответственно продольных и поперечных поляризованных волн в неограниченном сжимаемом теле с начальными напряжениями [6], c_1 и c_2 - скорости распространения поперечных волн в направлении осей Oy_1 и Oy_2 в неограниченном несжимаемом теле с начальными напряжениями [5], c_s - скорость движения сдвиговых волн в слое, v^* - критическая скорость движения нагрузки [1,2].

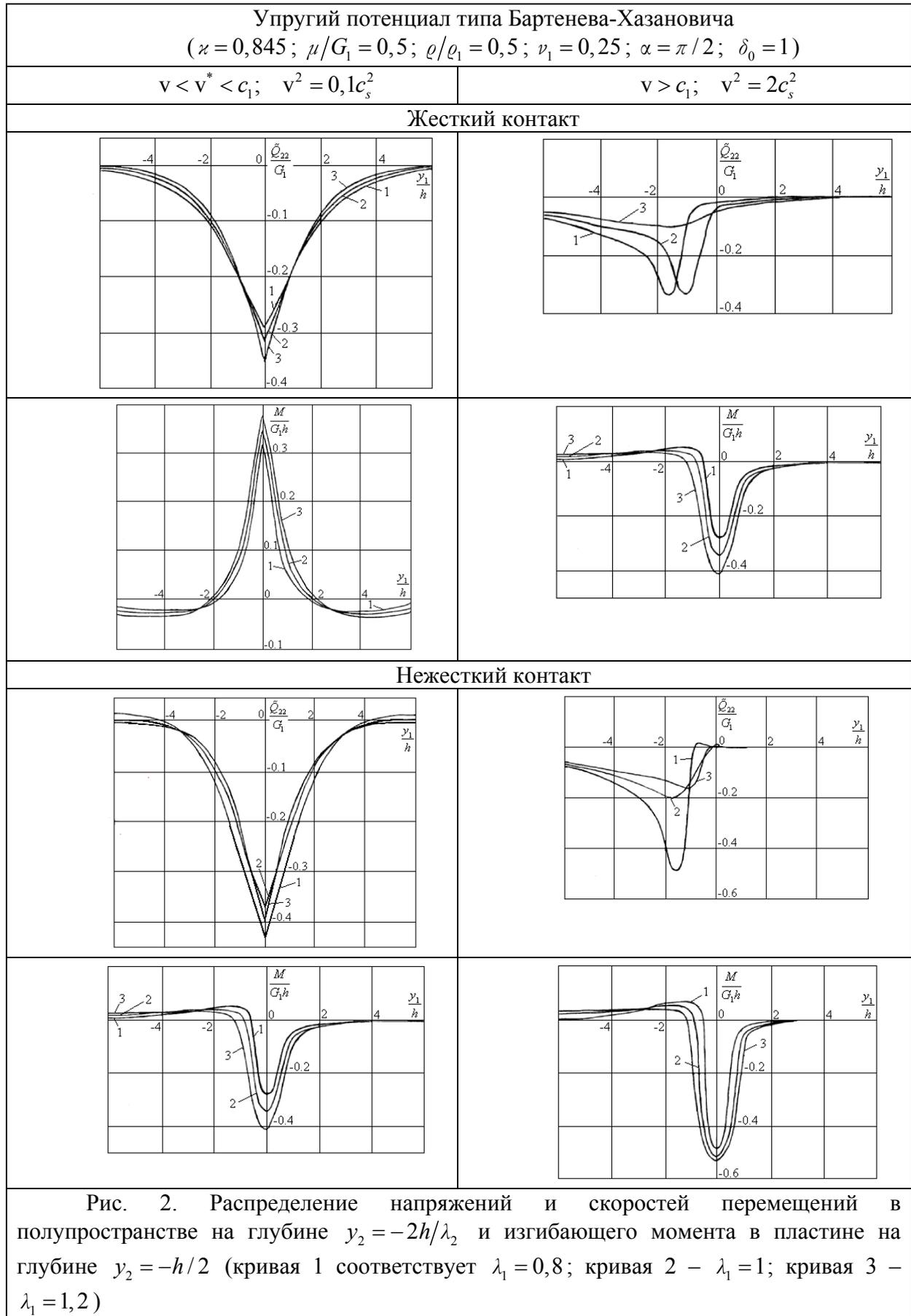
В качестве примеров рассмотрены сжимаемое полупространство с упругим потенциалом гармонического типа и несжимаемое полупространство с потенциалом Бартенева-Хазановича [3]. Предполагалось, что начальное деформированное состояние является плоским и поверхностная нагрузка отсутствует.

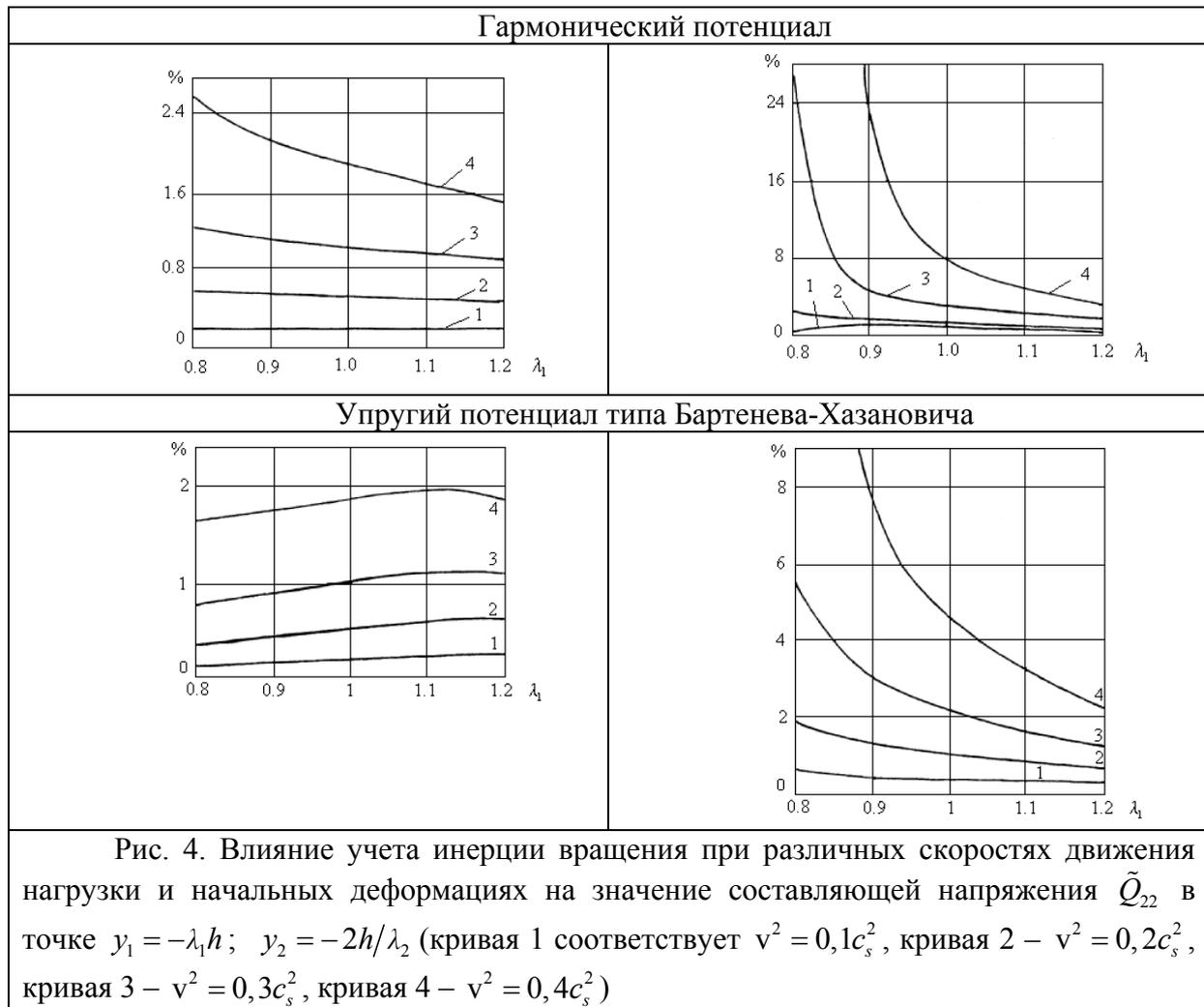
Результаты вычислений приведены для сосредоточенной линейной нагрузки, нормальная и касательная составляющие которой определяются по формулам

$$P_1 = P\delta(y_1)\cos\alpha; \quad P_2 = P\delta(y_1)\sin\alpha; \quad P = G_1;$$

где α – угол наклона нагрузки к оси Oy_1 .







Выводы. Проведенные исследования дают возможность сделать выводы:

1. Наличие начальных напряжений оказывает существенное влияние на распределение напряжений и скоростей перемещений в полупространстве и изгибающий момент в пластине. Это влияние различно в зависимости от положения рассматриваемой точки слоистого тела относительно точки приложения нагрузки.

2. Значения параметров напряженно-деформированного состояния в конкретной точке слоистого тела зависят от начальных напряжений, ее координат и условий контакта. Для докритических скоростей движения нагрузки при жестком контакте напряжения, скорости перемещений в полупространстве и изгибающий момент в пластине меньше, чем при нежестком контакте. При этом в исследуемом диапазоне значений λ_1 темп роста амплитуды исследуемых величин при сжатии больше, чем при растяжении. Затухание с удалением от точки приложения нагрузки при сжатии происходит медленнее, чем при растяжении.

3. Влияние начальных напряжений значительно увеличивается с ростом скорости движения нагрузки. Особенно это проявляется при предварительном сжатии. При жестком контакте влияние скорости и начальных напряжений менее существенно, чем при нежестком контакте. Учет инерции вращения в пределах рассматриваемых скоростей движения поверхностной нагрузки и значений λ_1 в случае жесткого контакта вносит незначительную поправку (меньше 2,6%), но в случае нежесткого контакта отличие в результатах будет очень большим (до 30%). Особенно необходим учет инерции вращения при $\lambda_1 < 1$ и больших скоростях движения нагрузки.

4. Видно, что с ростом скорости симметрия все больше нарушается, причем прямая волна затухает намного быстрее и для сверхзвукового случая практически отсутствует. Однако она полностью не исчезает. Это объясняется, по-видимому, слоистостью среды. Отметим, что качественно подобная картина наблюдалась в работах [7,9].

5. В случае жесткого контакта прямая волна затухает намного быстрее, чем при нежестком контакте.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика.–2008. – 44, № 3.–С.
2. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика.–2008. – 44, № 4.–С.
3. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. - Киев: Наук. думка, 1983. - 296 с.
4. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг, 2007. – Издательство «Кременчуг». – С. 795.
5. Осипов И.О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // Прикладная математика и механика. – 1969. – 33, № 3. – С. 543 – 555.
6. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. - Киев: Наук. думка, 1977. - 151 с.
7. Корбут Б.А., Нагорный Ю.И. Реакция цилиндрической оболочки с наполнителем на действие движущейся нагрузки // Изв. АН СССР. Мех. Тверд. тела. - 1973. - № 3. - С. 111 - 119.
8. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. – М.: Наука, 1966. - 370 с.
9. Пожуев В.И. Влияние величины постоянной скорости движения нагрузки на реакцию пластины, лежащей на упругом основании // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. - 1981. - № 6, -С. 112 - 118.
10. Achenbach J.D., Keshawa S.P., Herrmann G. Moving load on a plate resting on an elastic half space // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1967.- 34, № 4. – P. 183 – 189.
11. Wright J.P., Baron M.L. Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space) // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1970.- 37, № 1. – P.148 – 159.

АНОТАЦІЯ

ДИНАМІКА ДВОШАРОВОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ВПЛИВІ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

У даній статті в рамках лінійованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута плоска встановлена задача про збурення двошарового півпростору, що рухається з постійною швидкістю з поверхневим навантаженням з початковими напруженнями і з довільною формою пружного потенціалу. Розв'язок отримано в загальному вигляді для стисливого і нестисливого півпростору і різних умовах контакту.

Числові результати наведені для півпросторів із стисливого і нестисливого матеріалу відповідно з пружним потенціалом гармонічного типу і пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича при жорсткому і ковзкому умовах контакту.

Ключові слова: шаруваті півпростори, початкові напруги, рухоме навантаження.

SUMMARY

DYNAMICS OF TWO-LAYERED HALF-SPACE WITH INITIAL STRESS WHEN EXPOSED BY MOVING LOAD

This article under the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses reviews the problem of installed flat double-layer half-space disturbance that moves at a constant speed of surface load with initial stresses and any form of elastic potential. The solution has been obtained in a general form for compressible and incompressible half-space and the various contact conditions.

Numerical results have been shown for a half of a compressible and incompressible materials, respectively, with an elastic potential harmonic type and elastic potential type Bartenev-Khazanovich with hard and sliding contact conditions.

Keywords: layered half-space, the initial voltage, moving load.