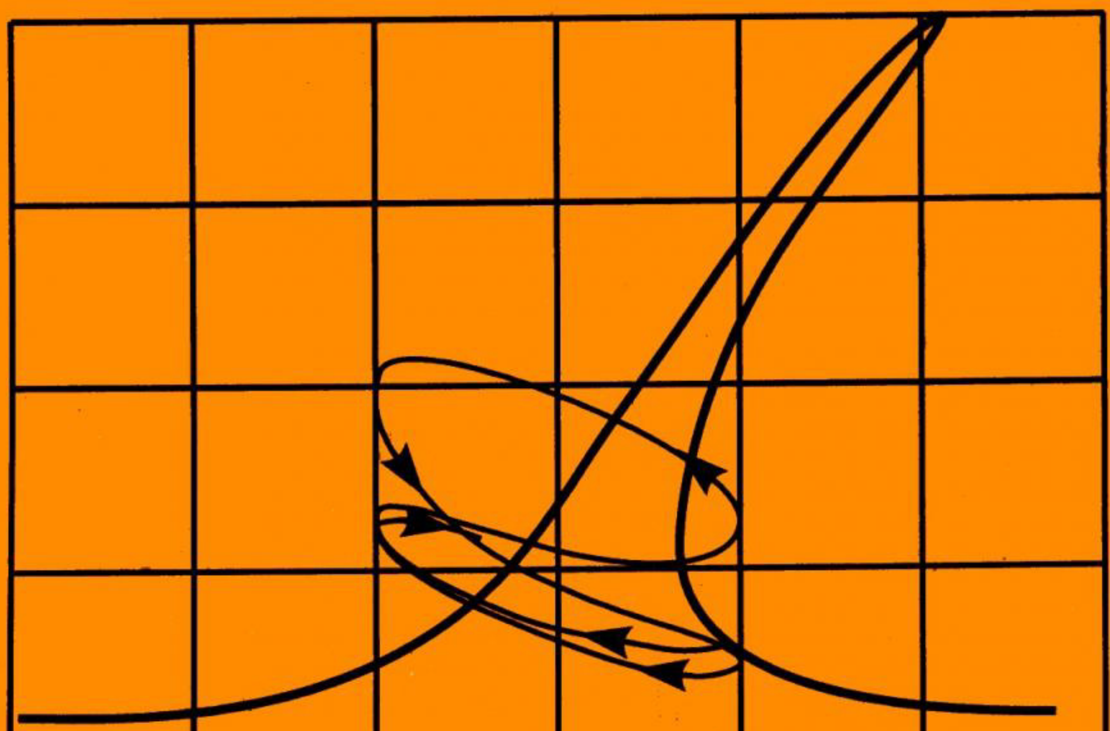
ISSN 1562-3076

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ

2008

Редактори
Ю.О. Митропольський
А.М. Самойленко

Том 11 № 3



УДК 519.624.3

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ У КРАЙОВИХ УМОВАХ

В. В. Маринець

Ужгород. нац. ун-т
Україна, Ужгород, вул. Підгірна, 46
e-mail: math1@univ.uzhgorod.ua

О. Ю. Питьовка

Мукач. технол. ін-т
Україна, Мукачево, вул. Ужгородська, 26
e-mail: nauka@mti.edu.ua

We study a rapidly convergent modification of a two-sided method for approximate integration of a parametrized boundary-value problem for a system of quasilinear second-order differential equations.

Исследуется одна быстросходящаяся модификация двустороннего метода приближенного интегрирования краевой задачи с параметрами в краевых условиях для случая системы квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

1. У сучасному математичному аналізі і моделюванні важливе значення мають розробка і розвиток конструктивних методів. До таких методів належить і метод Чаплигіна, який дає можливість охопити шуканий розв'язок розглядуваної задачі у „вилку" і цим отримати зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку. Ця проблема є однією з важливих у теорії наближених методів.

Метою даної роботи є побудова модифікацій двостороннього методу наближеного інтегрування та дослідження задач з параметрами у крайових умовах у випадку системи квазілінійних звичайних диференціальних рівнянь.

2. Розглянемо крайову задачу

$$Y''(x) = F(x, Y(x), Y'(x)), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} A_1 \Lambda Y(0) + B_1 Y(1) = d_1, \\ A_2 Y'(0) + B_2 Y'(1) = \Lambda d_2, \\ Y(0) = Y_0, \end{gathered} \tag{2}$$

де $Y = (y_i)_{i=1}^n : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, — шукана функція, $F = (f_i)_{i=1}^n : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $Y_0 = (y_{i,0})_{i=1}^n$, $d_k = (d_{i,k})_{i=1}^n$, $k = 1,2$, — вектори-стовпці, $A_k = (\delta_{i,j}\alpha_{i,k})_{i,k=1}^n$, $B_k = (\delta_{i,j}\beta_{i,k})_{i,k=1}^n$ — квадратні матриці, $y_{i,0}$, $d_{i,k}$, $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, $i = 1,2,\ldots,n$, $k = 1,2$, — задані сталі, $\Lambda = (\delta_{i,j}\lambda_i))_{i,j=1}^n$, $k = 1,2$, — діагональна матриця, складена з шуканих числових параметрів λ_i, $i = 1,2,\ldots,n$, а $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Під розв'язком крайової задачі (1) будемо розуміти [1] пару $(Y,\lambda) \in C^2([0,1],\mathbb{R}^n) \times \times\mathbb{R}^n$, де $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n$ — вектор-стовпець, $\lambda_i \in [\lambda_{i,1},\lambda_{i,2}]$, $\lambda_{i,k}$, $k = 1,2$, — задані сталі, а вектор-функція $Y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ є розв'язком системи рівнянь (1) і при вказаному значенні параметра λ задовольняє крайові умови (2).

3. Нехай $C([0,1]\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ — простір неперервних вектор-функцій $F : [0,1]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Якщо $F \in C([0,1]\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ і матриця $K = A_1\bar{Y}_0 d_2^{-1}(A_2+B_2)+B_1$ є невиродженою, то крайову задачу (1), (2) можна подати в еквівалентній інтегральній формі [2, 3]

$$Y(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G(x,\xi)F(\xi,Y(\xi),Y'(\xi))d\xi, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

$$\lambda = N_1 + \int_0^1 (N_3\xi + N_2)F(\xi,Y(\xi),Y'(\xi))d\xi, \tag{4}$$

де вектор $C \equiv K^{-1}(d_1 - B_1Y_0) = \left(\rho_i{}^{-1}(d_{i,1}-\beta_{i,1}y_{i,0})\,d_{i,2}\right)$, $\rho_i = \alpha_{i,1}(\alpha_{i,2}+\beta_{i,2})y_{i,0}+\beta_{i,1}d_{i,2}$, $d_2^{-1} = (\delta_{i,j}d_{i,2}^{-1})$, $Y_0^{-1} = (\delta_{i,j}y_{i,0}^{-1})$, $\bar{Y}_0 = (\delta_{i,j}y_{i,0})$, функція G визначається рівністю

$$G(x,\xi) = \begin{cases} Bx + (Ax-E)\xi, & \xi \in [0,x], \\ Bx + (A\xi - E)x, & \xi \in (x,1], \end{cases} \tag{5}$$

$A \equiv K^{-1}B_1 = \left(\delta_{i,j}\rho_i{}^{-1}\beta_{i,1}d_{i,2}\right)_{i,j=1}^n$ і $B \equiv K^{-1}A_1\bar{Y}_0d_2^{-1}A_2 = \left(\delta_{i,j}\rho_i{}^{-1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,2}y_{i,0}\right)_{i,j=1}^n$ — матриці, вектор N_1 задано формулою

$$N_1 = A_1^{-1}Y_0^{-1}d_1 - A_1^{-1}B_1Y_0^{-1}(Y_0+C) = \left(\rho_i^{-1}(\alpha_{i,2}+\beta_{i,2})(d_{i,1}-\beta_{i,1}y_{i,0})\right)_{i=1}^n,$$

а $N_2 = -A_1^{-1}B_1Y_0^{-1}B = \left(-\delta_{i,j}\rho_i{}^{-1}\alpha_{i,2}\beta_{i,1}\right)_{i,j=1}^n$ і

$$N_3 = -A_1^{-1}B_1Y_0^{-1}(A-E) = \left(\delta_{i,j}\rho_i{}^{-1}\beta_{i,1}(\alpha_{i,2}+\beta_{i,2})\right)_{i,j=1}^n$$

— матриці.

Не зменшуючи загальності подальших міркувань, будемо вважати, що $\det A_2Y_0^+ \neq 0$ та

$$d_2 = e \equiv (1,1,\ldots,1), \quad A_1 = E,$$

де E — одинична матриця.

4. Нехай Z_0, V_0 — такі функції з $C^1([0,1],\mathbb{R}^n)$, що

$$Z_0^{(s)}(x) \geq V_0^{(s)}(x), \quad x \in [0,1], \quad s = 0,1. \tag{6}$$

Означення 1. *Будемо говорити, що вектор-функція* $Y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *належить множині* $\langle V_0, Z_0 \rangle$, *якщо*

$$V_0^{(s)}(x) \le Y^{(s)}(x) \le Z_0^{(s)}(x), \quad x \in [0,1]. \tag{7}$$

Нехай L_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — фіксовані квадратні матриці розмірності n.

З кожною парою функцій Z_0, V_0, що має властивість (6), пов'яжемо множину $\mathcal{A}_L(Z_0, V_0)$ всіх таких вектор-функцій $F : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, які задовольняють наступні умови:

1) $F \in C([0,1] \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n)$;

2) для довільного $x \in [0,1]$ та довільних векторів $\{Y, Z\} \subset \mathbb{R}^n$, що містяться у множині $\langle V_0, Z_0 \rangle$, справджується рівність

$$F(x, Y, Z) = H(x, Y, Z, Y, Z), \tag{8}$$

де функція $H : [0,1] \times \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^n$ є неспадною за 2-, 3-, $\ldots$, $(2n+1)$-м та незростаючою за $(2n+2)$-, $(2n+3)$-, $\ldots$, $4n$-м її аргументами, тобто для довільних $(Z_{s,0}, Z_{s,1})$, $s = 0, 1$, та $(V_{s,0}, V_{s,1})$, $s = 0, 1$, з $\mathbb{R}^{2n}$ таких, що

$$Z_0(x) \le Z_{s,0} \le Z_{s,1} \le V_0(x), \quad V_0(x) \ge V_{s,0} \ge V_{s,1} \ge Z_0(x), \quad s = 0, 1, \quad x \in [0,1], \tag{9}$$

виконується нерівність

$$H(x, Z_{10}, Z_{11}, V_{10}, V_{11}) \ge H(x, Z_{00}, Z_{01}, V_{00}, V_{01}), \quad x \in [0,1]; \tag{10}$$

3) вектор-функція H, що входить до (8), задовольняє умову Ліпшиця з матрицею $\dfrac{1}{4} L$, тобто для довільних векторів $(Z_{s,0}, Z_{s,1})$ та $(V_{s,0}, V_{s,1})$, $s = 0, 1$, з властивостями (9) і довільного $x \in [0,1]$ виконується оцінка

$$|H(x, Z_{10}, Z_{11}, V_{10}, V_{11}) - H(x, Z_{00}, Z_{01}, V_{00}, V_{01})| \le \frac{1}{4} L \left(\sum_{s=0}^{1} \left(|Z_{s,1} - Z_{s,0}| + |V_{s,1} - V_{s,0}| \right) \right),$$

де $L = (\delta_{i,j} L_i)_{i,j=1}^n$.

Тут і далі знак модуля і нерівність між векторами та матрицями розуміємо покомпонентно. Належність вектора $Y \in \mathbb{R}^n$ множині $\langle V_0, Z_0 \rangle$ розуміємо як належність вказаній множині сталої функції із відповідним значенням.

5. Нехай справджуються співвідношення

$$B_1 (A_2 \bar{Y_0})^{-1} \le \Theta, \quad K_1 = E + B_2 A_2^{-1} + B_1 (A_2 \bar{Y_0})^{-1} > \Theta, \tag{11}$$

де Θ — нульова матриця. Тоді $E + B_2 A_2^{-1} > \Theta$ і $A \le \Theta$, $B > \Theta$.

Подамо функцію Гріна лінійної частини задачі (1), (2) у вигляді

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) + G_2(x, \xi), \quad (x, \xi) \in [0,1]^2, \tag{12}$$

де

$$G_1(x,\xi) = Bx, \quad \xi \in [0,1],$$
$$G_2(x,\xi) = \begin{cases} (Ax - E)\xi, & \xi \in [0,x], \\ (A\xi - E)x, & \xi \in (x,1]. \end{cases} \tag{13}$$

Очевидно, що $(\partial^s/\partial x^s)G_1(x,\xi) \geq \Theta$ та $(\partial^s/\partial x^s)G_2(x,\xi) \leq \Theta$, $s = 0,1$, при $x \in [0,1]$, $\xi \in [0,1]$.

Нехай $R_p = (\delta_{i,j} r_{p,i})_{i,j=1}^n$ та $D_p = (\delta_{i,j} d_{p,i})_{i,j=1}^n$ — матриці з довільними сталими невід'ємними елементами, які задовольняють умови

$$r_{p,i} \leq \frac{1}{2}, \quad d_{p,i} \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad p = 0,1,2,\ldots. \tag{14}$$

Побудуємо послідовності вектор-функцій Z_p, V_p, $p = 0,1,\ldots$, за рекурентним правилом [3, 4]

$$Z_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G_1(x,\xi)\bar{F}^p(\xi)d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi)\bar{F}_p(\xi)d\xi, \tag{15}$$

$$V_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G_1(x,\xi)\bar{F}_p(\xi)d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi)\bar{F}^p(\xi)d\xi, \tag{16}$$

де, за означенням,

$$\bar{F}^p(x) = F^p(x) - C_p(x)(F^p(x) - F_p(x)), \tag{17}$$

$$\bar{F}_p(x) = F_p(x) + Q_p(x)(F^p(x) - F_p(x)), \tag{18}$$

функції F^p та F_p задано формулами

$$F^p(x) = H(x, Z_p(x) - R_pW_p(x), Z_p'(x) - R_pW_p'(x), V_p(x) + D_pW_p(x), V_p'(x) + D_pW_p'(x)),$$
$$F_p(x) = H(x, V_p(x) + D_pW_p(x), V_p'(x) + D_pW_p'(x), Z_p(x) - R_pW_p(x), Z_p'(x) - R_pW_p'(x)) \tag{19}$$

та

$$\alpha_p(x) = Z_p(x) - Y_0 - Cx - \int_0^1 G_1(x,\xi)F^p(\xi)d\xi - \int_0^1 G_2(x,\xi)F_p(\xi)d\xi,$$
$$\beta_p(x) = V_p(x) - Y_0 - Cx - \int_0^1 G_1(x,\xi)F_p(\xi)d\xi - \int_0^1 G_2(x,\xi)F^p(\xi)d\xi, \tag{20}$$
$$W_p(x) = Z_p(x) - V_p(x).$$

Тут $C_p(x) = (\delta_{i,j}c_{p,i}(x))_{i,j=1}^n$, $Q_p(x) = (\delta_{i,j}q_{p,i}(x))_{i,j=1}^n$, $x \in [0,1]$, де $c_{p,i}$, $q_{p,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $p = 0, 1, \ldots,$ — довільні невід'ємні функції з простору $C([0,1], \mathbb{R}^n)$, а функції нульового наближення Z_0 та V_0 вибираємо у просторі $C^2([0,1], \mathbb{R}^n)$ таким чином, щоб при $R_0 = \Theta$ та $D_0 = \Theta$ виконувались нерівності

$$W_0^{(s)}(x) \geq 0, \quad \alpha_0^{(s)}(x) \geq 0, \quad \beta_0^{(s)}(x) \leq 0, \quad s = 0, 1, \quad x \in [0,1], \tag{21}$$

тобто щоб справджувалися співвідношення (6) та умови

$$Z_0'(x) \geq C + \int_0^1 \left(\frac{\partial G_1(x,\xi)}{\partial x} H(\xi, Z_0(\xi), Z_0'(\xi), V_0(\xi), V_0'(\xi)) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial G_2(x,\xi)}{\partial x} H(\xi, V_0(\xi), V_0'(\xi), Z_0(\xi), Z_0'(\xi)) \right) d\xi,$$

$$V_0'(x) \leq C + \int_0^1 \left(\frac{\partial G_1(x,\xi)}{\partial x} H(\xi, V_0(\xi), V_0'(\xi), Z_0(\xi), Z_0'(\xi)) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial G_2(x,\xi)}{\partial x} H(\xi, Z_0(\xi), Z_0'(\xi), V_0(\xi), V_0'(\xi)) \right) d\xi, \quad x \in [0,1], \tag{22}$$

$$Z_0(0) \geq Y_0 - \int_0^1 \left(G_1(x,\xi) H(\xi, Z_0(\xi), Z_0'(\xi), V_0(\xi), V_0'(\xi)) + \right.$$
$$\left. + H(\xi, V_0(\xi), V_0'(\xi), Z_0(\xi), Z_0'(\xi)) \right) d\xi,$$

$$V_0(0) \leq Y_0 + \int_0^1 \left(G_1(x,\xi) H(\xi, V_0(\xi), V_0'(\xi), Z_0(\xi), Z_0'(\xi)) + \right.$$
$$\left. + G_2(x,\xi) H(\xi, Z_0(\xi), Z_0'(\xi), V_0(\xi), V_0'(\xi)) \right) d\xi.$$

Зауважимо, що згідно з умовами (14), (21) при $s = 0, 1$ та $x \in [0,1]$

$$V_0^{(s)}(x) \leq V_0^{(s)}(x) + D_0 W_0^{(s)}(x) \leq Z_0^{(s)}(x) - R_0 W_0^{(s)}(x) \leq Z_0^{(s)}(x),$$

тобто $V_0(\cdot) + D_0 W_0(\cdot) \in \langle V_0, Z_0 \rangle$ та $Z_0(\cdot) - R_0 W_0(\cdot) \in \langle V_0, Z_0 \rangle$. На підставі останніх нерівностей та умов (10), (22) маємо $\alpha_0^{(s)}(x) \geq 0$, $\beta_0^{(s)}(x) \leq 0$, $s = 0, 1$, $x \in [0,1]$.

Нехай

$$\sup_{x \in [0,1]} c_{p,i}(x) \leq \frac{1}{2}, \quad \sup_{x \in [0,1]} q_{p,i}(x) \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad p = 0, 1, \ldots. \tag{23}$$

Тоді із (19), (20) і (15) отримуємо

$$Z_{p+1}(x) - Z_p(x) = -\alpha_p(x) + \int\limits_0^1 \{G_2(x,\xi)Q_p(\xi) - G_1(x,\xi)C_p(\xi)\}\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)d\xi,$$
$$V_{p+1}(x) - V_p(x) = -\beta_p(x) + \int\limits_0^1 \{G_1(x,\xi)Q_p(\xi) - G_2(x,\xi)C_p(\xi)\}\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)d\xi, \tag{24}$$

$$W_{p+1}(x) = \int\limits_0^1 \left(G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)\right)\left(E - C_p(\xi) - Q_p(\xi)\right)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)d\xi \tag{25}$$

та

$$\alpha_{p+1}(x) = \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\left(\bar{F}^p(\xi) - F^{p+1}(\xi)\right)d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\left(\bar{F}_p(\xi) - F_{p+1}(\xi)\right)d\xi,$$
$$\beta_{p+1}(x) = \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\left(\bar{F}_p(\xi) - F_{p+1}(\xi)\right)d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\left(\bar{F}^p(\xi) - F^{p+1}(\xi)\right)d\xi. \tag{26}$$

Із (24), враховуючи (10), (14), (21), при $p = 0$ одержуємо

$$Z_1^{(s)}(x) - Z_0^{(s)}(x) = -\alpha_0^{(s)}(x) + \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial^s G_2(x,\xi)}{\partial x^s}Q_0(\xi) - \frac{\partial^s G_1(x,\xi)}{\partial x^s}C_0(x)\right)\left(F^0(\xi) - F_0(\xi)\right)d\xi \le 0.$$

$$V_1^{(s)}(x) - V_0^{(s)}(x) = -\beta_0^{(s)}(x) + \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial^s G_1(x,\xi)}{\partial x^s}Q_0(\xi) - \frac{\partial^s G_2(x,\xi)}{\partial x^s}C_0(x)\right)\left(F^0(\xi) - F_0(\xi)\right)d\xi \ge 0.$$

Крім того, з (25) випливає, що $W_1^{(s)}(x) \ge 0$, $s = 0, 1$, тобто виконуються нерівності

$$V_0^{(s)}(x) \le V_1^{(s)}(x) \le Z_1^{(s)}(x) \le Z_0^{(s)}(x), \quad s = 0, 1, \quad x \in [0,1],$$

а це означає, що функції Z_1 та V_1 містяться у множині $\langle V_0, Z_0\rangle$.

Якщо елементи матриць R_0, D_0, які задовольняють умови (14), вибирати таким чином, щоб при $x \in [0,1]$ виконувались нерівності

$$Z_0^{(s)}(x) - Z_1^{(s)}(x) - R_0 W_0^{(s)}(x) \ge 0, \qquad V_0^{(s)}(x) - V_1^{(s)}(x) + D_0 W_0^{(s)}(x) \le 0,$$

то для всіх $x \in [0,1]$

$$F^0(x) - F^1(x) \ge 0, \quad F_0(x) - F_1(x) \le 0.$$

Отже, вибираючи елементи матриць $C_0(\cdot)$ та $Q_0(\cdot)$ так, щоб при V, Z з $\langle V_0, Z_0\rangle$ виконувались умови

$$\bar{F}^0(x) - F^1(x) \geq 0, \quad \bar{F}_0(x) - F_1(x) \leq 0,$$

із (26) при $p = 0$ одержуємо

$$\alpha_1^{(s)}(x) \geq 0, \quad \beta_1^{(s)}(x) \leq 0, \quad x \in [0,1], \quad s = 0, 1.$$

Беручи вектор-функції $Z_1(\cdot)$ та $V_1(\cdot)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування, методом математичної індукції легко показати, що якщо на кожному кроці ітераційного процесу (15) елементи матриць R_p, D_p та матриць-функцій $C_p(\cdot)$, $Q_p(\cdot)$ вибирати таким чином, щоб при V, Z з $\langle V_0, Z_0\rangle$ виконувались умови

$$\begin{aligned} Z_p^{(s)}(x) - Z_{p+1}^{(s)}(x) - R_p W_p^{(s)}(x) &\geq 0, \\ V_p^{(s)}(x) - V_{p+1}^{(s)}(x) + D_p W_p^{(s)}(x) &\leq 0, \\ F^p(x) - F^{p+1}(x) - C_p(x)(F^p(x) - F_p(x)) &\geq 0, \\ F_p(x) - F_{p+1}(x) + Q_p(x)(F^p(x) - F_p(x)) &\leq 0, \end{aligned} \tag{27}$$

то при довільних $x \in [0,1]$, $p \in \mathbb{N}$ та $s = 0, 1$ мають місце нерівності

$$\begin{gathered} V_p^{(s)}(x) \leq V_{p+1}^{(s)}(x) \leq Z_{p+1}^{(s)}(x) \leq Z_p^{(s)}(x), \\ \alpha_{p+1}^{(s)}(x) \geq 0, \quad \beta_{p+1}^{(s)}(x) \leq 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Встановимо достатню умову збіжності послідовностей вектор-функцій $\{Z_p(\cdot)\}_{p=0}^{\infty}$ та $\{V_p(\cdot)\}_{p=0}^{\infty}$ до єдиного у просторі $C^2([0,1], \mathbb{R}^n)$ розв'язку рівняння (3). Нехай

$$\begin{aligned} q &= \sup_{p\geq 0} \sup_{x\in[0,1]} \left\| E - C_p(x) - Q_p(x) \right\|, \\ d &= \sup_{x\in[0,1]} \max\left\{ \|W_0(x)\|, \left\|W_0'(x)\right\| \right\}, \quad \|L\| < M, \\ \nu &= \sup_{p\geq 0} \|E - R_p - D_p\|. \end{aligned}$$

Тоді з (25) методом математичної індукції одержуємо оцінку

$$\sup_{x\in[0,1]} \max\left\{ \|W_p(x)\|, \left\|W_p'(x)\right\| \right\} \leq (q\nu M\tau_1)^p d,$$

де

$$\tau_1 = \left\| \left(\delta_{i,j} \left(1 + {\rho_i}^{-1} \left(\alpha_{i,2} y_{i,0} - \frac{1}{2}\beta_{i,1} \right) \right) \right)_{i,j=1}^{n} \right\|.$$

Якщо

$$q\nu M < \frac{1}{\tau_1}, \tag{29}$$

то з останніх оцінок і нерівностей (28) випливає, що

$$V_p^{(s)}(x) \le V_{p+1}^{(s)}(x) \le Y^{(s)}(x) \le Z_{p+1}^{(s)}(x) \le Z_p^{(s)}(x), \quad s = 0, 1, \quad x \in [0, 1], \tag{30}$$

де $Y(\cdot)$ — єдиний розв'язок рівняння (3) (єдиність доводиться методом від супротивного).

Зауваження 1. Чим більше елементів матриць R_p, D_p, $C_p(\cdot)$, $Q_p(\cdot)$ є відмінними від нуля, тим збіжність ітераційного процесу (15) буде швидшою.

Перейдемо до рівняння (4). При виконанні умов (11) маємо $N_3 \ge \Theta$, $N_2 \le \Theta$ ($N_3 \le \Theta$, $N_2 \ge \Theta$) при $A_2 \le \Theta$ ($A_2 \ge \Theta$). Тоді двосторонні наближення до шуканого параметра λ будуємо таким чином:

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= N_1 + \int_0^1 \left[N_3 \xi F^p(\xi) + N_2 F_p(\xi)\right] d\xi, \\ \lambda_p^- &= N_1 + \int_0^1 \left[N_3 \xi F_p(\xi) + N_2 F^p(\xi)\right] d\xi. \end{aligned} \tag{31}$$

Беручи до уваги нерівності (10), (30) та умову (11), одержуємо

$$\lambda_p^+ - \lambda = \int_0^1 \left[N_3 \xi \left(F^p(\xi) - F(\xi, Y(\xi), Y'(\xi))\right) + N_2 \left(F_p(\xi) - F(\xi, Y(\xi), Y'(\xi))\right)\right] d\xi,$$

$$\lambda_p^- - \lambda = \int_0^1 \left[N_3 \xi \left(F_p(\xi) - F(\xi, Y(\xi), Y'(\xi))\right) + N_2 \left(F^p(\xi) - F(\xi, Y(\xi), Y'(\xi))\right)\right] d\xi,$$

до того ж у випадку, коли $A_2 \le \Theta$ ($A_2 \ge \Theta$), виконуються нерівності

$$\lambda_p^- \le \lambda \le \lambda_p^+ \quad (\text{відповідно} \quad \lambda_p^- \le \lambda \le \lambda_p^+), \quad p = 0, 1, \ldots . \tag{32}$$

Якщо $\{\lambda_p^-, \lambda_p^+\} \subset [\lambda_1, \lambda_2]$, то їх можна вважати за p-те двостороннє наближення до параметра λ, який визначається формулою (4).

Зауваження 2. Вектор-функції $Z_{p+1}(\cdot)$ та $V_{p+1}(\cdot)$, побудовані згідно з правилами (13)–(21), (27), не задовольняють всі крайові умови (2), але функція $\tilde{Y}_{p+1} = \frac{1}{2}(Z_{p+1} + V_{p+1})$ задовольняє всі крайові умови (2) і її разом зі значенням параметра $\lambda_{p+1} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{p+1}^+ + + \lambda_{p+1}^-\right)$ можна брати за $(p+1)$-ше наближення до розв'язку крайової задачі (1).

Таким чином, справедливою є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай існують вектор-функції нульового наближення Z_0 та V_0, які задовольняють нерівності (6), (22). Крім того, нехай $F \in \mathcal{A}_L(V_0, Z_0)$ та виконуються умови (11) і (29).*

Тоді p-м наближенням до розв'язку задачі (1), (2) є пара $(\tilde{Y}_p, \lambda_p)$, де

$$\lambda_p = \frac{1}{2}(\lambda_p^+ + \lambda_p^-), \tag{33}$$

$$\tilde{Y}_p = \frac{1}{2}(Z_p + V_p), \tag{34}$$

а вектор-функції Z_p та V_p є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3), які визначаються згідно з (13)–(21), (27) і задовольняють нерівності (30). Пара λ_p^-, λ_p^+ при цьому є p-м двостороннім наближенням до шуканого параметра λ, яке визначається згідно з (31), і виконуються нерівності (32).

6. Нехай справджуються співвідношення

$$E + B_2 A_2^{-1} \le \Theta, \quad K_1 > \Theta. \tag{35}$$

Тоді $B_1(A_2\tilde{Y}_0)^{-1} > \Theta$ і $A \ge \Theta$, $B > \Theta$. У цьому випадку функцію Гріна (5) подамо у вигляді (12), де

$$\begin{gathered} G_1(x,\xi) = (A\xi + B)x, \quad \xi \in [0,1], \\ G_2(x,\xi) = \begin{cases} -E\xi, & \xi \in [0,x], \\ -Ex, & \xi \in (x,1]. \end{cases} \end{gathered} \tag{36}$$

Із формул (36) очевидно, що $\left(\dfrac{\partial^s}{\partial x^s}\right) G_1(x,\xi) \ge \Theta$ і $\left(\dfrac{\partial^s}{\partial x^s}\right) G_2(x,\xi) \le \Theta$ при $s = 0,1$ та $(x,\xi) \in [0,1]^2$.

Побудуємо послідовності вектор-функцій $\{Z_p(\cdot)\}_{p=0}^{\infty}$ та $\{V_p(\cdot)\}_{p=0}^{\infty}$ за формулами (15)–(19). При цьому вектор-функції нульового наближення Z_0, V_0 вибираємо таким чином, щоб виконувались умови (21).

У даному випадку має місце оцінка

$$\sup_{x\in[0,1]} \max\left\{\|W_p(x)\|, \|W_p'(x)\|\right\} \le (q\nu M\tau_2)^p d,$$

де

$$\tau_2 = \left\| \left(\delta_{i,j} \frac{\frac{1}{2}\beta_{i,1} + \beta_{i,2} y_{i,0}}{\rho_i} \right)_{i,j=1}^{n} \right\|.$$

Якщо

$$q\nu M < \frac{1}{\tau_2}, \tag{37}$$

то побудовані за формулами (19) – (21), (27) і (36) послідовності вектор-функцій $\{Z_p\}_{p=0}^{\infty}$ та $\{V_p\}_{p=0}^{\infty}$ збігаються до єдиного у просторі $C^2([0,1],\mathbb{R}^n)$ розв'язку рівняння (3) і задовольняють нерівності (30).

Оскільки за умов (35) маємо $N_2 \geq \Theta$ ($N_2 \leq \Theta$), $N_3 \geq \Theta$ ($N_3 \leq \Theta$) при $A_2 \leq \Theta$ ($A_2 \geq \Theta$), то двосторонні наближення до шуканого параметра λ, який визначається згідно з (4), знаходимо за формулами

$$\lambda_p^+ = N_1 + \int\limits_0^1 (N_3\xi + N_2)\, F^p(\xi)\, d\xi,$$
$$\lambda_p^- = N_1 + \int\limits_0^1 (N_3\xi + N_2)\, F_p(\xi)\, d\xi, \tag{38}$$

при цьому мають місце нерівності (32).

Теорема 2. *Нехай існують вектор-функції нульового наближення Z_0 та V_0, які задовольняють нерівності (6), (22). Крім того, нехай $F \in \mathcal{A}_L(V_0, Z_0)$ та виконуються умови (35) і (37).*

Тоді p-м наближенням до розв'язку задачі (1), (2) є пара $(\tilde{Y}_p, \lambda_p)$, де λ_p та $\tilde{Y}_p$ визначаються формулами (33), (34). При цьому вектор-функції Z_p та V_p є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3), які визначаються згідно з (19) – (21), (27), (36) і задовольняють нерівності (30). Крім того, λ_p^-, λ_p^+ дають p-те двостороннє наближення до шуканого параметра λ, яке визначається згідно з (38), і виконуються співвідношення (32).

7. Нехай

$$B_1(A_2\bar{Y}_0)^{-1} \geq \Theta, \quad K_1 < \Theta. \tag{39}$$

Тоді очевидно, що $E + B_2A_2^{-1} < \Theta$, $A \leq \Theta$, $B < \Theta$, і, отже, в цьому випадку функція Гріна (5) задовольняє умови

$$G(x,\xi) \leq \Theta, \quad \frac{\partial}{\partial x}G(x,\xi) \leq \Theta \quad \text{для} \quad (x,\xi) \in [0,1]^2.$$

Побудуємо послідовності вектор-функцій $\{Z_p\}_{p=0}^{\infty}$ та $\{V_p\}_{p=0}^{\infty}$ за формулами

$$Z_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int\limits_0^1 G(x,\xi)\bar{F}_p(\xi)\, d\xi,$$
$$V_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int\limits_0^1 G(x,\xi)\bar{F}^p(\xi)\, d\xi, \tag{40}$$

де F^p та F_p визначено згідно з (19), а вектор-функції нульового наближення Z_0 та V_0 вибираємо так, щоб виконувались умови (6), (22). Методом математичної індукції легко показати, що має місце оцінка

$$\sup_{x\in[0,1]} \max\left\{\|W_p(x)\|, \|W_p'(x)\|\right\} \le (q\nu M\tau_3)^p\, d,$$

де

$$\tau_3 = \left\| \left(\delta_{i,j} \left(1 - \frac{\alpha_{i,2}y_{i,0} + \frac{1}{2}\beta_{i,1}}{\rho_i} \right) \right)_{i,j=1}^{n} \right\|.$$

Якщо

$$q\nu M < \frac{1}{\tau_3}, \tag{41}$$

то побудовані згідно з (40), (5), (19), (14) і (27) послідовності вектор-функцій $\{Z_p\}_{p=0}^{\infty}$ та $\{V_p\}_{p=0}^{\infty}$ збігаються до єдиного розв'язку рівняння (3) і виконуються нерівності (30).

При виконанні умов (39) $N_2 \le \Theta\ (N_2 \ge \Theta)$ і $N_3 \le \Theta\ (N_3 \ge \Theta)$, якщо $A_2 \le \Theta\ (A_2 \ge \Theta)$. Тоді двосторонні наближення до шуканого параметра λ будуємо за формулами

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= N_1 + \int\limits_0^1 [N_3\xi + N_2]\, F_p(\xi)\, d\xi, \\ \lambda_p^- &= N_1 + \int\limits_0^1 [N_3\xi + N_2]\, F^p(\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{42}$$

де F_p, F^p визначаються згідно з (19), і виконуються нерівності (32).

Теорема 3. *Нехай існують вектор-функції нульового наближення Z_0 та V_0, які задовольняють нерівності (6), (22). Крім того, нехай $F \in \mathcal{A}_L(V_0, Z_0)$ та виконуються умови (39) і (41).*

Тоді p-м наближенням до розв'язку задачі (1), (2) є пара $(\tilde{Y}_p, \lambda_p)$, де λ_p та $\tilde{Y}_p$ визначаються формулами (33), (34), а вектор-функції Z_p та V_p є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3), які визначаються згідно з (40), (5), (19), (14), (27) та задовольняють нерівності (30). Пара λ_p^-, λ_p^+ при цьому є p-м двостороннім наближенням до шуканого параметра λ, яке визначається згідно з (31), і виконуються нерівності (32).

8. Нехай

$$E + B_2 A_2^{-1} \ge \Theta, \qquad K_1 < \Theta, \tag{43}$$

тоді $B_1\left(A_2\bar{Y}_0\right)^{-1} < \Theta$, $A > \Theta$, $B < \Theta$. В цьому випадку функцію Гріна (5) лінійної частини задачі (1), (2) подамо у вигляді (12), де

$$G_1(x,\xi) = Ax\xi, \quad \xi \in [0,1],$$

$$G_2(x,\xi) = \begin{cases} -E\xi + Bx, & \xi \in [0,x], \\ -Ex + Bx, & \xi \in (x,1]. \end{cases}$$

При цьому $\left(\dfrac{\partial^s}{\partial x^s}\right) G_1(x,\xi) \geq \Theta$ та $\left(\dfrac{\partial^s}{\partial x^s}\right) G_2(x,\xi) \leq \Theta$ для $s = 0,1$ і $(x,\xi) \in [0,1]^2$.

У даному випадку двосторонні наближення до розв'язку рівняння (3) будуємо згідно з (19), (15), (27), де за нульове наближення вибираємо пару довільних вектор-функцій Z_0, V_0, з простору $C^1([0,1],\mathbb{R}^n)$, які задовольняють умови (6), (22).

За прийнятих умов справедливою є оцінка

$$\sup_{x\in[0,1]} \max\left\{\|W_p(x)\|, \|W_p'(x)\|\right\} \leq (q\nu M\tau_4)^p\, d,$$

де

$$\tau_4 = \max\left\{\left\|\frac{1}{2}\left(\delta_{i,j}\frac{3\beta_{i,1}+2\beta_{i,2}y_{i,0}}{2\rho_i}\right)^2\right\|, \left\|\left(\delta_{i,j}\frac{2\beta_{i,1}+(\beta_{i,2}-\alpha_{i,2})y_{i,0}}{2\rho_i}\right)\right\|\right\}.$$

Якщо справджується умова

$$q\nu M < \frac{1}{\tau_4}, \tag{44}$$

то послідовності вектор-функцій $\{Z_p\}_{p=0}^{\infty}$ та $\{V_p\}_{p=0}^{\infty}$, побудовані за формулами (19), (15), (27), збігаються до єдиного розв'язку рівняння (3) і мають місце нерівності (30).

При виконанні умов (43) маємо $N_2 \geq \Theta$ $(N_2 \leq \Theta)$ і $N_3 \leq \Theta$ $(N_3 \geq \Theta)$, якщо $A_2 \leq \Theta$ $(A_2 \geq \Theta)$. Отже, двосторонні наближення до шуканого параметра λ, який визначається згідно з (4), будуємо за формулами

$$\lambda_p^+ = N_1 + \int_0^1 \left[N_3\xi F_p(\xi) + N_2 F^p(\xi)\right] d\xi,$$

$$\lambda_p^- = N_1 + \int_0^1 \left[N_3\xi F^p(\xi) + N_2 F_p(\xi)\right] d\xi,$$

при цьому виконуються нерівності (32).

Теорема 4. *Нехай існують вектор-функції нульового наближення Z_0 та V_0, які задовольняють нерівності (6), (22). Крім того, нехай $F \in \mathcal{A}_L(V_0, Z_0)$ та виконуються умови (43) і (44).*

Тоді p-м наближенням до розв'язку задачі (1), (2) є пара $(\tilde{Y}_p, \lambda_p)$, де λ_p та $\tilde{Y}_p$ визначаються формулами (33), (34), а вектор-функції Z_p та V_p є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3), які визначаються згідно з (19), (15), (27) та задовольняють нерівності (30). Пара λ_p^-, λ_p^+ при цьому є p-м двостороннім наближенням до шуканого параметра λ, яке визначається згідно з (45), і виконуються нерівності (32).

Аналогічно будуються модифікації двостороннього методу наближеного інтегрування задачі (1), (2) і у випадку виконання умов, відмінних від умов (11), (35), (39) і (43). Для ілюстрації наведемо приклад.

9. *Приклад.* У просторі функцій $C^2([0,1],\mathbb{R})$ будемо шукати розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$y_1''(x) = \frac{1}{3}\cos\frac{\pi x}{6}\left(y_1'(x)\right)^3 - \frac{1}{3}y_2(x),$$

$$y_2''(x) = \frac{x}{5}y_1(x) - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 y_2(x) - \frac{x}{5}(1+x), \quad x \in (0,1),$$

який задовольняє крайові умови

$$\lambda_1 y_1(0) - 0,1y_1(1) = -0,6,$$

$$0,1y_1'(0) - 0,5y_1'(1) = \lambda_1,$$

$$y_1(0) = 1,$$

$$\lambda_2 y_2(0) - 0,2y_2(1) = 0,227,$$

$$0,3y_2'(0) - \frac{24}{5\pi}y_2'(1) = \lambda_2,$$

$$y_2(0) = 1,$$

та визначимо значення параметрів λ_i, $i = 1,2$, $\lambda_i \in [-1,1]$.

У даному випадку $E + B_2A_2^{-1} \leq \Theta$, $B_1\left(A_2\bar{Y}_0\right) \leq \Theta$, де

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & -24/5\pi \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \bar{Y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай $R_p \equiv \Theta$, $D_p \equiv \Theta$ та $C_p(x) \equiv \Theta$, $Q_p(x) \equiv \Theta$. За нульове наближення вибираємо функції $Z_0 = (z_{0i})_{i=1}^2$, $V_0 = (v_{0i})_{i=1}^2$, де

$$z_{01}(x) = 1 + 1,58x - 0,2x^2, \qquad v_{01}(x) = 1 - 0,16x + 0,5x^2,$$

$$z_{02}(x) = 1 + 0,188x - 0,2x^2, \qquad v_{02}(x) = 1 - 0,447x + 0,05x^2,$$

які задовольняють умови (6), (22). У даному випадку для функцій $F^0 = (f^{0i})_{i=1}^2$ та $F_0 = (f_{0i})_{i=1}^2$, що визначаються формулами (19), маємо рівності

$$f^{01}(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(z_{01}'(x)\right)^3 - \frac{1}{3}v_{02}(x),$$

$$f^{02}(x) = \frac{x}{5}z_{01}(x) - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 v_{02}(x) - \frac{x}{5}(1+x),$$

$$f_{01}(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(v_{01}'(x)\right)^3 - \frac{1}{3}z_{02}(x),$$

$$f_{02}(x) = \frac{x}{5}v_{01}(x) - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 z_{02}(x) - \frac{x}{5}(1+x).$$

Наступні наближення $Z_1 = (z_{1i})_{i=1}^2$, $V_1 = (v_{1i})_{i=1}^2$ будуємо за формулами

$$z_{11}(x) = 1 + x + \int_0^1 0,2x\xi f^{01}(\xi)d\xi - \int_0^x (\xi + 0,2x) f_{01}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,2x f_{01}(\xi)d\xi =$$

$$= 13,7675 + 27,9308x - 0,166x^2 - 1,067 \cdot 10^{-2}x^3 + 0,555 \cdot 10^{-2}x^4 +$$

$$+ \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(-12,7675 + 79,744x + 0,5837x^2 - 1,215x^3\right) +$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(-202,9244 - 5,0772x + 13,933x^2\right),$$

$$v_{11}(x) = 1 + x + \int_0^1 0,2x\xi f_{01}(\xi)d\xi - \int_0^x (\xi + 0,2x) f^{01}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,2x f^{01}(\xi)d\xi =$$

$$= -14,3849 + 2,1933x - 0,167x^2 + 2,489 \cdot 10^{-2}x^3 - 1,388 \cdot 10^{-3}x^4 +$$

$$+ \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(15,3849 - 1,466x - 0,9221x^2 + 0,077x^3\right) +$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(-0,9026 + 7,0443x - 0,891x^2\right),$$

$$z_{12}(x) = 1 - 0,299x + \int_0^1 0,14x\xi f^{02}(\xi)d\xi -$$

$$- \int_0^x (\xi + 0,21x) f_{02}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,21x f_{02}(\xi)d\xi =$$

$$= 1 + 9,4783 \cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 - 8,773 \cdot 10^{-3}x^3 -$$

$$- 1,4764 \cdot 10^{-2}x^4 + 5 \cdot 10^{-3}x^5,$$

$$v_{12}(x) = 1 - 0,299x + \int_0^1 0,14x\xi f_{02}(\xi)d\xi -$$

$$- \int_0^x (\xi + 0,21x) f^{02}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,21x f^{02}(\xi)d\xi =$$

$$= 1 - 9,5785 \cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 + 2,047 \cdot 10^{-2}x^3 +$$

$$+ 8,5244 \cdot 10^{-3}x^4 - 2 \cdot 10^{-3}x^5.$$

Для параметра $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^2$ визначаємо двосторонні наближення за формулами

$$\lambda_{1,1}^+ = -0,4 + \int_0^1 (-0.08\xi - 0,02) f_{1,1}(\xi) d\xi = -0,3867,$$

$$\lambda_{1,1}^- = -0,4 + \int_0^1 (-0,08\xi - 0,02) f^{1,1}(\xi) d\xi = -0,4166,$$

$$\lambda_{1,2}^+ = 0,367 + \int_0^1 (-0,172\xi - 0,042) f_{1,2}(\xi) d\xi = 0,4068,$$

$$\lambda_{1,2}^- = 0,367 + \int_0^1 (-0,172\xi - 0,042) f^{1,2}(\xi) d\xi = 0,395.$$

Таким чином,

$$\tilde{y}_{11}(x) = \frac{1}{2}\left(z_{11}(x) + v_{11}(x)\right) = -0,3087 + 15,062x - 0,166x^2 +$$
$$+ 0,711 \cdot 10^{-2}x^3 - 2,085 \cdot 10^{-3}x^4 +$$
$$+ \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(1,3087 + 39,139x - 0,1692x^2 + 0,569x^3\right) +$$
$$+ \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(-101,9135 + 0,9835x + 6,521x^2\right),$$

$$\tilde{y}_{12}(x) = \frac{1}{2}\left(z_{12}(x) + v_{12}(x)\right) =$$
$$= 1 - 5 \cdot 10^{-4}x - 0,1371x^2 + 5,8485 \cdot 10^{-3}x^3 - 3,1198 \cdot 10^{-3}x^4 + 1,5 \cdot 10^{-3}x^5$$

та

$$\tilde{\lambda}_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_{11}^+ + \lambda_{11}^-) = -0,40166, \quad \tilde{\lambda}_{12} = \frac{1}{2}(\lambda_{12}^+ + \lambda_{12}^-) = 0,40093.$$

При цьому одержуємо

$$\sup_{x\in[0,1]} |w_{01}(x)| \le 1,04, \qquad \sup_{x\in[0,1]} |w_{11}(x)| \le 0,637,$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |w_{02}(x)| \le 0,385, \qquad \sup_{x\in[0,1]} |w_{12}(x)| \le 0,145,$$

та $\left|\lambda_{11}^+ - \lambda_{11}^-\right| = 2,99 \cdot 10^{-2}$, $\left|\lambda_{12}^+ - \lambda_{12}^-\right| = 1,18 \cdot 10^{-2}$.

Розглянемо випадок, коли $R_p \equiv \Theta$, $D_p \equiv \Theta$, а $C_p(x)$, $Q_p(x)$ — матриці-функції, елементами яких є лінійні невід'ємні функції: $c_{01}(x) = 0,2x$, $c_{02}(x) = 0,15x$, $q_{01}(x) = 0,01\,(1-x)$,

$q_{02}(x) = 0,05\,(1-x)$. Тоді

$$\bar{f}^{0i}(x) = f^{0i}(x) - c_{0i}(x)(f^{0i}(x) - f_{0i}(x)),$$
$$\bar{f}_{0i}(x) = f_{0i}(x) + q_{0i}(x)(f^{0i}(x) - f_{0i}(x)), \quad i = 1,2, \quad x \in [0,1],$$

і наступні наближення визначаємо за формулами

$$\hat{z}_{11}(x) = 1 + x + \int\limits_0^1 0,2x\xi\bar{f}^{01}(\xi)d\xi - \int\limits_0^x (\xi + 0,2x)\bar{f}_{01}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,2x\bar{f}_{01}(\xi)d\xi =$$
$$= 33,3191 + 27,3850x - 0,167x^2 - 1,0092\cdot 10^{-2}x^3 +$$
$$+ 0,53097\cdot 10^{-2}x^4 + 0,0417\cdot 10^{-3}x^5 +$$
$$+ \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(-32,3191 + 77,9756x + 2,2298x^2 - 1,1878x^3 - 1,2936\cdot 10^{-2}x^4\right) +$$
$$+ \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(-198,55 - 12,7085x + 13,611x^2 + 0,1976x^3\right),$$

$$\hat{v}_{11}(x) = 1 + x + \int\limits_0^1 0,2x\xi\bar{f}_{01}(\xi)d\xi - \int\limits_0^x (\xi + 0,2x)\bar{f}^{01}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,2x\bar{f}^{01}(\xi)d\xi =$$
$$= 382,299 - 3,3450x - 0,1666x^2 + 2,4833\cdot 10^{-2}x^3 -$$
$$- 0,4917\cdot 10^{-2}x^4 + 8,333\cdot 10^{-4}x^5 +$$
$$+ \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(-381,299 - 20,2765x + 32,3028x^2 + 0,3789x^3 - 0,2587x^4\right) +$$
$$+ \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(45,7729 - 160,263x - 4,3422x^2 + 3,9529x^3\right),$$

$$\hat{z}_{12}(x) = 1 - 0,299x + \int\limits_0^1 0,14x\xi\bar{f}^{02}(\xi)d\xi - \int\limits_0^x (\xi + 0,21x)\bar{f}_{02}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,21x\bar{f}_{02}(\xi)d\xi =$$
$$= 1 + 8,977\cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 - 7,1395\cdot 10^{-3}x^3 -$$
$$- 1,4325\cdot 10^{-2}x^4 + 3,9513\cdot 10^{-3}x^5 + 2,33\cdot 10^{-4}x^6,$$

$$\hat{v}_{12}(x) = 1 - 0,299x + \int\limits_0^1 0,14x\xi\bar{f}_{02}(\xi)d\xi - \int\limits_0^x (\xi + 0,21x)\bar{f}^{02}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,21x\bar{f}^{02}(\xi)d\xi =$$
$$= 1 - 7,727\cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 + 2,042\cdot 10^{-2}x^3 +$$
$$+ 6,348\cdot 10^{-3}x^4 - 4,096\cdot 10^{-3}x^5 + 7,0\cdot 10^{-4}x^6$$

та

$$\hat{\lambda}^+_{1,1} = -0,387, \quad \hat{\lambda}^-_{1,1} = -0,4154, \quad \hat{\lambda}^+_{1,2} = 0,4059, \quad \hat{\lambda}^-_{1,2} = 0,3955.$$

При цьому

$$\sup_{x\in[0,1]} |\hat{w}_{11}(x)| \leq 0,5632, \quad \sup_{x\in[0,1]} |\hat{w}_{12}(x)| \leq 0,1264,$$

а отже, збіжність ітераційного методу покращується у випадку відмінності від нуля елементів матриць $C_p(x)$, $Q_p(x)$. За наближений розв'язок розглядуваної задачі приймаємо

$$\hat{y}_{11}(x) = \frac{1}{2}\left(\hat{z}_{11}(x) + \hat{v}_{11}(x)\right) =$$
$$= 207,809 + 12,02x - 0,167x^2 + 0,7371 \cdot 10^{-2}x^3 +$$
$$+ 0,1965 \cdot 10^{-3}x^4 + 0,4375 \cdot 10^{-3}x^5 +$$
$$+ \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(-206,809 + 28,8496x + 17,2663x^2 - 0,4044x^3 - 0,1358x^4\right) +$$
$$+ \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)\left(-76,3879 - 86,4858x + 4,6344x^2 + 2,075x^3\right),$$
$$\hat{y}_{12}(x) = \frac{1}{2}\left(\hat{z}_{12}(x) + \hat{v}_{12}(x)\right) = 1 + 6,2492 \cdot 10^{-3}x - 0,1371x^2 +$$
$$+ 6,6426 \cdot 10^{-3}x^3 - 3,988 \cdot 10^{-3}x^4 - 7,2305 \cdot 10^{-5}x^5 + 4,67 \cdot 10^{-4}x^6,$$

$$\hat{\lambda}_{11} = \frac{1}{2}(\lambda^+_{11} + \lambda^-_{11}) = -0,40121, \quad \hat{\lambda}_{12} = \frac{1}{2}(\lambda^+_{12} + \lambda^-_{12}) = 0,40074.$$

Відмітимо, що

$$\sup_{x\in[0,1]} |y_1(x) - \hat{y}_{11}| \leq 4,4 \cdot 10^{-2}, \qquad \sup_{x\in[0,1]} |y_2(x) - \hat{y}_{12}| \leq 6,4 \cdot 10^{-3}$$

та $|\lambda_1 - \hat{\lambda}_{11}| = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $|\lambda_2 - \hat{\lambda}_{12}| = 7,4 \cdot 10^{-4}$, де $(y_i, \lambda_i)^2_{i=1}$ — точний розв'язок розглядуваної крайової задачі.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
3. *Маринец В. В.* Об одном подходе построения итерационных методов приближенного интегрирования краевых задач теории пластин и оболочек // Мат. VIII Всесоюз. конф. „Численные методы решения задач теории упругости и пластичности". — Новосибирск, 1984. — С. 194 – 198.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.

Одержано 11.06.06,
після доопрацювання — 20.03.08

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ

Індекс 22675

ISSN 1562-3076. Нелінійні коливання. 2008. Т. 11, № 3, 289 – 436