

УДК 685.34.02

**НЕПРЯМИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ
РЕОЛОГІЧНОЇ МОДЕЛІ МАКСВЕЛЛА****ІГНАТИШИН М. І., ПЕТРУС Б. Б.**
Мукачівський державний університет

Реологічні моделі мають широке застосування в нафтовидобутку, нафтохімії, біохімії, харчовій, косметичній і лакофарбовій промисловості, застосовуються для моделювання механічних властивостей біологічних тканин. На теперішній час існує більше 20 реологічних моделей, що описують взаємозв'язок між сталими значеннями напруг і швидкостей зсуву. Різноманіття реологічних моделей сприяє появі великої кількості робіт, присвячених не тільки гідродинамічним і механічним розрахункам. Актуальним є питання визначення реологічних параметрів моделі.

Апроксимація реограм, як правило, проводиться шляхом перевірки на відповідність моделей і вибору тієї, яка дає найменшу похибку. враховуючи складність визначення параметрів моделей, користуються найпростішими моделями Шведова-Бингама і Оствальда, що призводять до значної похибки апроксимації.

Автором запропоновано застосувати непрямий метод визначення механічних параметрів реологічної моделі.

Мета дослідження, - побудувати математичний апарат для реалізації експериментального визначення механічних параметрів реологічної моделі непрямим методом.

Сформульовано задачу знаходження механічних параметрів реологічної моделі в загальному виді та конкретно для моделі Максвелла.

Розглянуто розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння першого порядку, що відповідає моделі Максвелла при ізотонічному експерименті, тобто при сталому напруженні та нульовій деформації в початковий момент.

В роботі застосовано системи нелінійних рівнянь для визначення параметрів реологічної моделі Максвелла непрямим методом.

Застосовано метод найменших квадратів для обробки результатів ізотонічного експерименту та програмний пакет MATHCAD для розрахунку розв'язків системи нелінійних рівнянь, значень механічних параметрів реологічної моделі Максвелла.

Побудовано програму в пакеті MATHCAD для розрахунку механічних параметрів реологічної моделі Максвелла.

Основним результатом даної роботи є перевірка адекватності реологічної моделі системи, що моделюється. Перевірка здійснена шляхом розрахунку механічних параметрів моделі. Якщо в даному часовому інтервалі система нелінійних рівнянь має розв'язок то модель адекватно описує систему, якщо ні, - модель необхідно міняти.

Ключові слова: реологічна модель, нелінійні рівняння, модель Максвелла.

Реологія (від грец. Rheos - протягом і logos - вчення) - наука про деформації і перебіг реальних суцільних середовищ (напр., неньютонівських рідин із структурною в'язкістю, дисперсних систем, що є пластичні).

Реологія розглядає процеси, пов'язані з необоротними залишковими деформаціями речовини (релаксацію напружень, післядія пружна, повзучість матеріалів і т. п.). В основі Реології лежать основні закони гідромеханіки, теорії пружності і пластичності (в т. ч. закони Ньютона, про опір руху в'язкої рідини, Нав'є – Стокса, - рівняння руху нестискуваної в'язкої рідини, Гука, - закон опору пружного тіла та ін.).

Реологічними моделями користуються також при вивченні механічних властивостей полімерів, внутрішнього тертя в твердих тілах і ін. властивостей реальних тіл.

Враховують реологічні властивості рідин в каналах ґрунту [1]. Застосовано реологічне моделювання при дослідженні магнітострикційного перетворювача [2]. Ступницький В. В. та Долиняк Я. В [3] розглянули формування поверхонь деталей

з конструкційних сталей застосували реологічну картину впливу різних чинників на процес. Резніков С.І., Гуць В.С. дослідили реологічні властивості м'яса.

Ряд авторів досліджують вплив різних факторів на поведінку реологічних систем. Сиромятніков В.Г., Масленнікова Л.Д. та Ануфрієв В.А. розглядають вплив молекулярних взаємодій в сумішах полімерів [6] на реологічну поведінку системи. Масленнікова Л.Д. та Фабуляк Ф.Г. досліджували вплив карбонату кальцію на реологічну течію і молекулярні взаємодії з латексом [7]. Реологічні властивості клейової мастики досліджено в праці [8]. Масленнікова Л.Д. розглянула реологічні особливості в'язких водних систем [9] в присутності карбонату кальцію. Смачило О. В. [10] визначала вплив обробки в органічних розчинниках на механічні характеристики одягових шкір. У пакувальних процесах проведено аналіз реологічних моделей в'язко-пружно-пластичних матеріалів [11].

В проях [12] та [13] розглянуто математичний апарат, побудовано програми в системі Mathcad для обробки експериментальних даних дослідження реологічної моделі шкіри та моделі Фойгта відповідно.

Актуальним є експериментальне визначення параметрів реологічних моделей, що застосовуються для математичного моделювання пружно-пластичних властивостей матеріалів.

Об'єкт та методи дослідження. Об'єктом дослідження є модель Максвелла (тіло Максвелла) — реологічна модель пружнов'язкого тіла, утворена послідовним сполученням пружного і в'язкого елементів, запропонована Д. Максвеллом 1867 року.

Якщо цю систему швидко навантажити, то в'язкий елемент не встигне зрушити з місця і буде поводити себе, як заморожений, а деформацію візьме на себе пружина — і модель буде поводити себе як пружне тіло. Навпаки, у разі повільного навантаження, наприклад, сталою силою, до деякої невеликої постійної деформації пружини додається в принципі необмежено зростаюча деформація в'язкого елемента, тобто модель поводить себе як пружна рідина, яку називають рідиною Максвелла (а також тілом або моделлю Максвелла). Ця рідина не описується законом в'язкості Ньютона і тому належить до неньютонівських рідин.

Ця модель якісно справедлива для в'язких матеріалів, що мають пружність (пружнов'язкі тіла) і добре описує повзучість багатьох матеріалів, наприклад, бетону та полімерів. Для точнішого опису повзучості лінійна залежність замінюється нелінійною, зберігаючи при цьому головне — послідовне сполучення елементів. Для твердих тіл із внутрішнім тертям (в'язкопружні тіла) модель Максвелла не описує повзучість, яка згасає. При релаксації напруження в елементах прямують до нуля, хоча в реальних твердих тілах цього не спостерігається. У цьому випадку застосовуються складніші моделі.

Застосуємо метод математичного опису моделі Максвелла, рис. 1. Нехай ε_1 — деформація пружного елемента, а ε_2 — деформація в'язкого. У разі послідовного з'єднання напруження в кожному елементі σ однакове. Якщо бути точним, то однаковими, є зусилля, тому для простоти припускається, що перерізи елементів моделі є однаковими. Можна записати дві очевидні залежності:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E} \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma}{\eta} \quad (1)$$

де: E — модуль Юнга, η — динамічна в'язкість.
Звідси, враховуючи що:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2)$$

впливає рівняння Максвелла:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{E}{\eta} \sigma \quad (3)$$

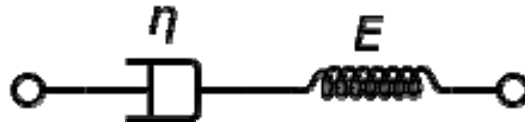


Рис. 1. Схематичне зображення моделі Максвелла.

При ізометричному експерименті $\varepsilon = const$ рівняння (3) приймає вид:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta} \sigma, \quad (4)$$

а при ізотонічному, $\sigma = const$ відповідно, -

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (5)$$

Для визначення параметрів моделі Максвелла E та η необхідно провести послідовно обидва досліді.

Застосуємо метод планування фізичного експерименту, що дасть можливість об'єднати два експерименти в один, для цього розглянемо експеримент в якому забезпечено $\frac{d\varepsilon}{dt} = const$.

Постановка завдання. Метою дослідження є побудова математичного апарату для визначення механічних параметрів реологічної моделі непрямим методом з обробкою експериментальних даних в системі Mathcad.

Отже, нехай $\frac{d\varepsilon}{dt} = const$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{v}{l_0} t \quad (6)$$

де: Δl — абсолютна деформація, м; l_0 — початкова довжина, м; v — швидкість деформації експериментального зразка, м/с, t — час.

Підставимо (6) в (3), одержимо

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta} \sigma + E \frac{v}{l_0} \quad (7)$$

Якщо $\sigma(0) = 0$ маємо:

$$\sigma(t) = \eta \frac{v}{l_0} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} t} \right) \quad (8)$$

Результати та їх обговорення.

Застосуємо метод найменших квадратів та складемо систему рівнянь відносно невідомих параметрів E та η реологічної моделі Максвелла:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^K (\sigma_i - \sigma(\tau_i, \eta, E)) \cdot \frac{d\sigma(\tau_i, \eta, E)}{d\eta} = 0, \\ \sum_{i=1}^K (\sigma_i - \sigma(\tau_i, \eta, E)) \cdot \frac{d\sigma(\tau_i, \eta, E)}{dE} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Складемо програму для обробки експериментальних даних і непрямого визначення параметрів реологічної моделі, рис. 1, а саме, E та η , за результатами експерименту. Програма складена в системі MATHCAD.

Початок програми.

Таблиця 1.

Вхідні дані (умовні значення)

τ_i, c	0	0,8	1,6	2,4	3,2	4	4,8	5,6	6,4	7,2
σ_i	0	0,381	0,513	0,722	0,781	0,875	0,902	0,944	0,956	0,975

Час, τ_i , в секундах, σ_i – нормальне напруження напруження, $l_0 = 0,1$ м – довжина, $v = 0,01$ м/с – швидкість навантаження досліджуваного зразка.

Орієнтовні значення шуканих параметрів:

$\eta := 4$; $E := 2$;

$$\sigma(t, \eta, E) = \eta \frac{v}{l_0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E \cdot t}{\eta}} \right)$$

Given

$$\sum_{i=1}^K [\sigma_k - \sigma(\tau_k, \eta, E)] \cdot \frac{\partial \sigma(\tau_k, \eta, E)}{\partial \eta} = 0$$

$$\sum_{i=1}^K [\sigma_k - \sigma(\tau_k, \eta, E)] \cdot \frac{\partial \sigma(\tau_k, \eta, E)}{\partial E} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ E \end{pmatrix} := \text{Find}(\eta, E) \quad \begin{pmatrix} \eta \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.946 \\ 5.088 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(t) := \eta \frac{v}{l_0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E \cdot t}{\eta}} \right)$$

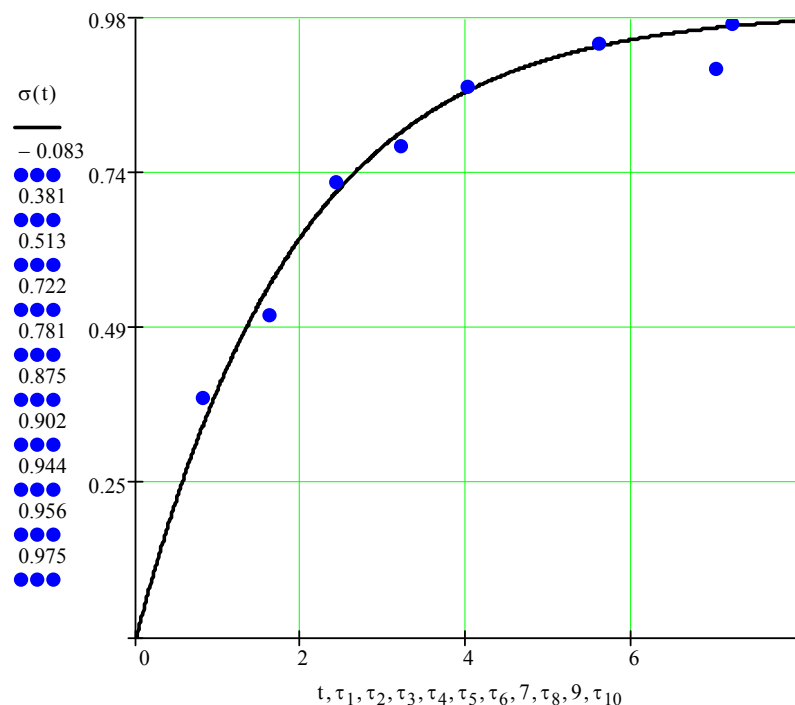


Рис. 2. Зміна нормального напруження реологічної моделі Максвелла (рис.1) та «експериментальні» значення для інтервалу 0 – 8 сек.

Фактичні значення шуканих параметрів:

$\eta = 9.946$ Па · с; $E = 5.088$ Па .

Кінець програми.

Висновки. Основним результатом даної роботи є:

— побудова математичного апарату та програми в системі Mathcad для обробки експериментальних даних,

— планування експерименту, що передбачає вимірювання нормального напруження в досліджуваному зразку матеріалу при рівномірній абсолютній деформації,

— перевірка адекватності реологічної моделі системі, що моделюється.

Перевірка здійснюється шляхом розрахунку механічних параметрів моделі, E та η за умовними даними. Якщо в даному часовому інтервалі система нелінійних рівнянь (9) має розв'язок то модель адекватно описує систему, якщо ні, - модель необхідно міняти.

Розглянута нами реологічна модель, рис.1., адекватно описує систему на ділянках від 0 до 8 сек.

Подальше дослідження передбачає побудову дослідної установки для реалізації описаної вище математичної моделі експерименту.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бадьора Н.П., Аналіз теоретичних та експериментальних досліджень ін'єкційного закріплення ґрунтових масивів / Н.П. Бадьора, І.В. Коц // Вісник Хмельницького національного університету, № 2, 2014 (211), стор. 46- 49.

2. Шаповалов О.І. Математична модель магнітодинамічного потоку в зоні реологічного переходу магніострикційного перетворювача / О.І. Шаповалов // Вісник Хмельницького національного університету, №2, 2014 (211), С. 240-249.

3. Ступницький В. В. Імітаційне реологічне моделювання процесів формоутворення поверхонь деталей з конструкційних сталей / В.В. Ступницький, Я.В. Долиняк // Національний університет "Львівська політехніка", Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні 98 та приладобудуванні. Вип. 49. 2015, С. 9-15.

4. Резніков С.І. Застосування диференціальних рівнянь другого порядку для знаходження реологічних коефіцієнтів м'язової тканини м'яса / С.І. Резніков С.І., В.С. Гуць // Програма і матеріали другої міжнародної науково-технічної конференції «Технічні науки: стан, досягнення і перспективи розвитку м'ясної, олієжирової та молочної галузей», 25 – 26 березня 2014 р. – К.: НУХТ, 2014р.– 165 с.

5. Сиром'ятніков В.Г. Вплив молекулярних взаємодій в сумішах полімерів каучук в латексі-полівінілацетат у водному середовищі на реологічну поведінку досліджуваних систем В.Г. Сиром'ятніков, Л.Д. Масленнікова, В.А. Ануфрієв // Хім. промисловість України. – 2002. - № 1. – С. 24-26.

6. Осієвська В.В. Реологічні особливості водних дисперсій з використанням карбонату кальцію і водного розчину силікату натрію / В.В. Осієвська, Ф.Г. Фабуляк, Л.Д. Масленнікова // Науковий вісник Миколаївського державного педагогічного унів-ту. – 2000. – Випуск № 1. – С. 215 - 219.

7. Масленнікова Л.Д. Вплив карбонату кальцію на реологічну течію і молекулярні взаємодії з латексом /Л.Д. Масленнікова, Ф.Г. Фабуляк // Наук. вісник Ужгородського держ. унів-ту. – 2001. - № 6. – С. 204-206.

8. В.В. Осієвська. Реологічні та ІЧ-спектроскопічні дослідження нової клейової мастики / В.В. Осієвська, А.Є. Мірошніков, Л.Д. Масленнікова, Ф.Г. Фабуляк // Фізика конденсованих високомолекулярних систем: Наукові записки Рівненського держ. гуманіст. унів-ту.– 2000. - №8. – С. 9-16.

9. Масленнікова Л.Д. Реологічні особливості в'язких водних систем в присутності карбонату кальцію. // V Всеукраїнська конференція "Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики": Тези доповіді. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2000. – С.169.

10. Смачило О. В. Матеріалознавчі характеристики одягових шкір після обробки в органічних розчинниках. Технології та дизайн, №4(9), 2013 р., С. 7-12.

11. Гуць В.С. Метод аналізу реологічних моделей в'язко-пружно-пластичних матеріалів у пакувальних процесах / В.С. Гуць, О. А. Коваль // Упаковка. — 2013. — № 4. — С. 46-49.

12. Ігнатишин М. І. Визначення релаксаційних параметрів реологічної моделі шкіри непрямим методом./ Ігнатишин М. І., Росул Р. В., Домбровський А. Б.// Вісник Хмельницького національного університету, №3(237), 2016 С. 249-254.

13. Ігнатишин М. І. Визначення механічних параметрів реологічної моделі Фойгта непрямим методом./ Ігнатишин М. І.// Науковий вісник Мукачавського державного університету, №20(15), 2016, С. 39-45.

АННОТАЦИЯ

КОСВЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА

Реологические модели имеют широкое применение в нефтедобыче, нефтехимии, биохимии, пищевой, косметической и лакокрасочной промышленности, применяются для моделирования механических свойств биологических тканей. В настоящее время существует более 20 реологических моделей, описывающих взаимосвязь между постоянными значениями напряжений и скоростей сдвига. Многообразие реологических моделей способствует появлению большого количества работ, посвященных не только гидродинамическим и механическим расчетам. Актуальным является вопрос определения реологических параметров модели.

Аппроксимация реограммы, как правило, проводится путем проверки соответствия моделей и выбора той, которая дает наименьшую погрешность. Учитывая сложность определения параметров моделей, пользуются простейшими моделями Шведова-Бингама и Оствальда, приводящих к значительной погрешности аппроксимации.

Автором предложено применить косвенный метод определения механических параметров реологической модели.

Цель исследования, - построить математический аппарат для реализации экспериментального определения механических параметров реологической модели косвенным методом.

Сформулирована задача нахождения механических параметров реологической модели в общем виде и конкретно для модели Максвелла.

Рассмотрено решение соответствующего однородного дифференциального уравнения первого порядка, которое соответствует модели Максвелла при изотоническом эксперименте, то есть при постоянном напряжении и нулевой деформации в начальный момент.

В работе применены системы нелинейных уравнений для определения параметров реологической модели Максвелла косвенным методом.

Применен метод наименьших квадратов для обработки результатов изотонического эксперимента и программный пакет MATHCAD для расчета решений системы нелинейных уравнений, значений механических параметров реологической модели Максвелла.

Построено программу в пакете MATHCAD для расчета механических параметров реологической модели Максвелла.

Основным результатом данной работы является проверка адекватности реологической модели системы моделируемой системе. Проверка осуществлена путем расчета механических параметров модели. Если в данном временном интервале система нелинейных уравнений имеет решение то модель адекватно описывает систему, если нет - модель необходимо менять.

Ключевые слова: реологическая модель, нелинейные уравнения, модель Максвелла.

SUMMARY

INDEPENDENT METHOD OF DETERMINATION OF MECHANICAL PARAMETERS OF MAXWELL REOLOGICAL MODEL

Rheological models have been widely used in petroleum, petrochemicals, biochemistry, food, cosmetics and paint industry, used to model the mechanical properties of biological tissues. At present there are more than 20 rheological models describing the relationship between voltage and constant shear rate. The variety of rheological models contributes to the emergence of a large number of works devoted not only hydrodynamic and mechanical calculations. An urgent question is the definition of rheological model parameters.

Approximation rheogram usually done by checking for compliance models and choosing the one that gives the smallest error. Given the complexity of determining the parameters of the models are the simplest models Shvedova-Bynhama and Ostwald, leading to significant error of approximation.

The author proposed to use an indirect method of determining the mechanical parameters of rheological models.

The purpose of the study, build mathematical tools for the implementation of experimental determination of mechanical parameters of rheological model indirect method.

The problem of mechanical parameters of rheological models in general form and model specific Maxwell.

We consider the solution of the corresponding homogeneous differential equation of the first order, corresponding with isotonic Maxwell model experiment, ie at constant stress and strain to zero at the initial time.

The paper used a system of nonlinear equations to determine the parameters of rheological models Maxwell indirect method.

The method of least squares processing results of experiment and isotonic MATHCAD software package to calculate the solutions of nonlinear equations, values of mechanical parameters of rheological models Maxwell.

Built MATHCAD program package for calculating mechanical parameters of rheological models Maxwell.

The main result of this work is to verify the adequacy of rheological model system that simulated. Testing done by calculating the mechanical parameters of the model. If this time interval system of nonlinear equations has a solution model that adequately describes the system if not - the model should be changed.

Key words: *rheological model, nonlinear equations, model Maxwell.*