differential equation modified by the author and presented in relative coordinates. Relative coordinates plates vary from 0 to 1 and obtained by dividing the respective plate surface coordinates, x and y, its size, a and b. This presentation makes it possible to perform computer simulations of static loading bridges and to compare two different designs, or real cities and reduced his laboratory model by putting the image deformation (power factor) each other.

Correlations linking the results of static and dynamic testing of integrated bridge plate cylindrical rigidity, effective modulus value, effective thickness and density of the material plate. The resulting value is applied in practice for processing the results of model experiment. The calculations of effective mechanical characteristics of the roadway bridge.

Tags: *cylindrical rigidity, diagnosis bridge deflection of reinforced concrete slabs, the effective thickness of the plates, full-scale test of the bridge*

УДК 669.01: 621.9

ОГЛЯД ЧИСЕЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ МОСТОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

ІГНАТИШИН М. І., ХІМИЧ В. І. РЕЙС Т. Т., ІВАНЧО Т. Р.
Мукачівський державний університет

Стаття присвячена актуальній проблемі застосування матемачних методів для розв'язку прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Математична модель елементів мостових контрукцій опори, балки, плити, складається з диференціальних рівнянь в частинних похідних та крайових умов. Їх можна записати в так званій операторній формі. Така крайова задача тільки в окремих випадках має аналітичний розв'язок. Більшість актуальних прикладних задач мостобудування та випробовування мостових конструкцій не мають аналітичного розв'язку, або розв'язок є дуже громіздким. Крім цього, часто аналітичний розв'язок - це функціональний ряд, що повільно збігається, тому не має практичної користі при розрахунку механічних характеристик елементів мостових конструкцій. До аналітичних належить метод послідовних наближень. Він полягає у побудові послідовності операторів, що точніше наближають вихідний оператор. Власне кажучи, оператор інтерпретується як межа деякої послідовності операторів, і ця послідовність будується в ході розв'язання задачі. Наближені рішення можна знайти за допомогою двох-трьох ітерацій. Розв'язок виглядає як аналітичний вираз, за яким можна розрахувати чисельні значення. Методи побудови розв'язку досить також громіздкі. Більшість розв'язків прикладних задач отримані методами, що об'єднані спільною назвою, - проекційні. В статті розглянуто застосування проекційних методів розв'язку крайових задач, що моделюють елементи мостових конструкцій. Проекційні методи утворюють обчислювальну процедуру, що здійснюється з допомогою комп'ютера і розв'язок можна одержати у вигляді таблиці. Вони дозволяють дійти до принципово наближеного розв'язку, що зв'язано з дискретністю обчислювальних пристроїв, обмеженим обсягом пам'яті, кінцевою швидкодією і т. п. Аналіз чисельних та аналітичних методів розрахунку мостових конструкцій свідчить, що перевага надається чисельним методам, причому в певній системі базисних функцій. Авторами запропоновано шлях покращення числових методів, підвищення їх надійності, - проведення паралельних розрахунків в базисах взятих з різних класів функції.

Ключові слова: *проекційні методи, метод Галеркіна, спектральний метод, метод колокацій, або ж псевдо спектральний, метод скінчених елементів.*

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Деформації елементів мостової конструкції (опори, балки, плити і т. д) описуються сукупністю диференціальних рівнянь, що і є їхніми математичними моделями механіки деформівного тіла.

В окремих випадках вдається одержати аналітичний розв'язок рівнянь моделі у вигляді формул [1, 2]. Проте у більшості прикладних задач аналітичний розв'язок отримати не вдається через те, що він громіздкий, і тільки за допомогою яких-небудь обчислювальних процедур його можна одержати у вигляді таблиці.

Такого роду моделі мають спеціальну назву – чисельні. Вони дозволяють дійти до принципово наближеного розв'язку, що зв'язано з дискретністю обчислювальних пристроїв, обмеженим обсягом пам'яті, кінцевою швидкодією і т. п.

Розробкою та прикладним застосуванням математичного апарату для дослідження напружено-деформованого стану матеріалів та конструкцій займаються А. Е. Андрейків, В.А. Кривень, В. В. Маринець, М.С. Михайлинин, О. Ф. Обшта, В. Ф. Чекурін, Б. Г. Шелестовський та інші.

Незважаючи на значну кількість досліджень та публікацій із розглянутої тематики, методи розрахунку механічних параметрів залізобетонних конструкцій мостів недостатньо вивчені та впроваджені в практику.

Значна кількість мостів побудована за технічними нормами, що діяли до 1962 року. На сьогодні вони не відповідають умовам руху автотранспорту як за вантажопідйомністю, так і за габаритами проїзної частини. Наприклад, навіть мостові споруди з габаритом 9 м у більшості випадків відхилені від діючих норм і, відповідно, потребують розширення. А це, у свою чергу, вимагає проведення досліджень, лабораторних і натурних випробовувань до і після реконструкції.

Необхідне проведення паспортизації мостів за результатами випробовувань з метою визначення послідовності проведення їх реконструкції з огляду на обмеженість виділених для цього коштів.

Отже, аналіз науково-технічної літератури вказує на актуальність існуючих методик розрахунку напружено-деформованого стану мостових споруд та подальшої їх розробки для визначення механічних параметрів залізобетонних конструкцій мостів, що визначають залишковий ресурс експлуатації моста.

Об'єкт, предмет та методи дослідження

Об'єктом дослідження є елементи мостових конструкцій - опора, балки, плита. Предметом дослідження є математичні моделі опори, балки, плити - відповідні диференціальні рівняння.

Моделі, що описують деформацію основних елементів мостових конструкцій: опора, балка, плита. Їх можна записати в так званій операторній формі:

$$\hat{A}u = q\,, \tag{1}$$

де $\hat{A} = E\dfrac{d}{dx}$ – оператор, що описує деформацію опори, $\hat{A} = EJ\dfrac{d^4}{dx^4}$ – оператор, що описує деформацію балки, $\hat{A}=D\left(\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4}{\partial y^4}\right)$ – оператор, що описує деформацію ізотропної плити, $\hat{A}=D_{11}\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$ – оператор, що описує деформацію ортотропної плити.

Права частина операторного рівняння (1) q – це функція залежності навантаження від координат. Константи E, J, D, D_{ij} (модуль пружності, момент інерції площі перерізу, циліндричні жорсткості) – це величини, які характеризують механічні властивості відповідної мостової конструкції. Невідома функція $u = u(x),\ = u(x, y)$, що залежить від координат точки, – це переміщення відповідного елемента конструкції. Ця функція на краях може дорівнювати нулю або задовольняти крайові умови в операторній формі:

$$\hat{K}_i u = h_i\,. \tag{2}$$

Вигляд операторів $\hat{K}_i$ визначається способом закріплення та навантаження відповідного елемента конструкції моста.

Співвідношення (1) та (2) утворюють крайову задачу.

Методами дослідження є методи механіки деформівного твердого тіла - побудова математичної моделі об'єкта, диференціального рівняння, крайової задачі та її розв'язок.

Методи розв'язання крайових задач можна умовно поділити на дві групи: чисельні й аналітичні.

Постановка задачі

Завданням даної роботи є огляд методів розв'язання крайової задачі та оцінка актуальності і вживаності методів в теперішній час.

Результати та їх оцінка

До аналітичних належить метод послідовних наближень. Він полягає у побудові послідовності операторів $\hat{A}_n^{-1}$, що точніше наближають оператор $\hat{A}^{-1}$. Власне кажучи, оператор $\hat{A}^{-1}$ інтерпретується як межа деякої послідовності операторів, і ця послідовність будується в ході розв'язання задачі. Наближені рішення можна знайти за допомогою двох-трьох ітерацій. Розв'язок виглядає як аналітичний вираз, за яким можна розрахувати чисельні значення. Методи побудови розв'язку досить громіздкі й описані в працях [1, 3] та [4]. Результат, однак, отримують у вигляді формули.

Проекційні методи розглядаються в працях [5, 6, 7]. Метод зважених нев'язок – операторне рівняння (1). $\hat{A}$ – лінійний оператор у H, H – гільбертів простір, u і q – необхідне число раз диференційовні функції. Припустимо, що розв'язок задачі існує і він єдиний. Потрібно знайти наближений розв'язок $\tilde{u}$, такий, котрий можна було б визначити кінцевим набором чисел. Виберемо в H базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тоді u можна записати у вигляді ряду Фур'є:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u^i e_i \, . \tag{3}$$

Визначимо наближений розв'язок $\tilde{u}$ як відрізок ряду Фур'є:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}^i e_i \, . \tag{4}$$

При заданому базисі набір чисел $\{\tilde{u}^i\}$ однозначно визначає $\tilde{u}$. Розглянемо детальніше зв'язок між u і $\tilde{u}$. Оскільки за визначенням базису кожен елемент із H може бути записаний у вигляді ряду по базисних векторах, то і, навпаки, задання базису породжує векторний простір.

Нехай $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормований базис простору H. У цьому базисі вектор u може бути представлений рядом Фур'є (3).

Якщо u – розв'язок рівняння (3), то нев'язка r дорівнює нулю:

$$r = \hat{A}u - q = 0 \, . \tag{5}$$

Задаємо певний скінченно мірний підпростір $H^n \subset H$ (вибираючи з нескінченної послідовності базисних векторів $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ кінцеве число елементів $\{e_i\}_{i=1}^{n}$) і наближеним розв'язком $\tilde{u}$ називаємо проекцію розв'язку u на підпростір H^n. Нев'язка r в цьому випадку уже відмінна від нуля і дорівнює:

$$r = \hat{A}u - q = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}^i \hat{A} e_i - \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}^i \hat{A} e_i . \qquad (6)$$

Послідовність $\left\{\hat{A}e_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ також утворить базис у H. З цієї причини останню рівність можна розглядати як розклад r в ряд Фур'є по базису $\left\{\hat{A}e_i\right\}_{i=1}^{\infty}$. Якби був відомий точний розв'язок u, то наближений можна було б шукати з умови мінімуму нев'язки, вибираючи той чи інший підпростір H^n. Однак u не відомо, і, вибравши навмання H^n, необхідно так підібрати коефіцієнти Фур'є $\tilde{u}^i$, щоб нев'язка була в якомусь змісті мінімальною. Найбільш розповсюджений прийом полягає в тім, щоб намагатися анулювати проекцію нев'язки на який-небудь n – мірний підпростір $G^n \subset H$. Якщо P_n – оператор проектування на G^n, то коефіцієнти Фур'є наближеного розв'язку $\tilde{u}^i$ можна знайти з умови:

$$P_n r = P_n\left(\hat{A}\tilde{u} - q\right) = 0 . \qquad (7)$$

Нехай $\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ – якийсь інший базис у H, такий, що G^n є лінійною оболонкою системи n векторів $\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^{n}$. Тоді в цьому новому базисі нев'язка може бути представлена своїм рядом Фур'є $r = \sum_{j=1}^{\infty} r^j \varphi_j$, і оскільки

$$\left(r \cdot \varphi_j\right) = 0, \qquad j = 1,...,n, \qquad (8)$$

то з умови (9) випливає, що $r^j = 0$ для всіх $j = 1,...,n$. Нев'язка виявляється ортогональною підпростору G^n.

Наближення розв'язку u залежить від вибору підпросторів H^n і G^n, який є довільним, і часто диктується зручністю, простотою обчислень, наочністю і т. п.

Таким чином, для знаходження наближеного розв'язку $\tilde{u}$ одержимо кінцеву (n - мірну) систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\hat{M}\vec{u} = \vec{q} , \qquad (9)$$

де $\vec{u} = \vec{u}\left(\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_n\right)$, елементи матриці $\hat{M}$:

$$m_{ji} = \int_{\Omega} \varphi_j \hat{A} e_i d\,\Omega, \qquad (10)$$

а вектор $\vec{q}$ складається з елементів:

$$q_j = \int_{\Omega} \varphi_j q\, d\,\Omega. \qquad (11)$$

Координатні функції e_i і φ_j називають відповідно базисними і пробними функціями.

Залежно від вибору системи пробних функцій $\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^{n}$, розрізняють ряд методів, об'єднаних загальною назвою проекційні.

1. Якщо обидва підпростори H^n і G^n збігаються, то метод називається методом Гальоркіна.

2. Якщо другий підпростір вибрати за умови, що базисом у ньому будуть вектори $\varphi_j = \hat{A}e_j$, то одержимо метод найменших квадратів, що називається ще спектральним.

3. І, нарешті, якщо пробними функціями вважати δ-функції, що дозволяють точно задовольнити рівняння у скінченному наборі точок (вузлах), то матимемо метод колокацій, або ж псевдоспектральний.

Пробні функції можна інтерпретувати як ваги різних компонентів вектора нев'язки. Відповідно проекційні методи іноді називають методами зважених нев'язок.

Розглянемо більш загальну постановку задачі, а саме: запишемо крайові умови у вигляді

$$\hat{K}u = h, \qquad \text{на границі} \quad \Omega, \tag{12}$$

де h – функція, визначена на $\partial\Omega$, а K – лінійний оператор.

Розглянемо варіанти розв'язку:

Варіант 1. Задамо в $H(\Omega)$ базис виду $\psi, e_1, e_2, \ldots$ Функцію ψ вибираємо такою, щоб вона задовольняла граничну умову. Функції e_i приймають на границі нульові значення. Апроксимація розв'язку будується у вигляді:

$$\tilde{u} = \psi + \sum_{i=1}^{n} u^i e_i\ . \tag{13}$$

Підставляючи її у вихідне рівняння й анулюючи проекцію нев'язки, одержимо систему лінійних рівнянь $\hat{M}\cdot\vec{u} = \vec{b}$, де $\hat{M}$ і u такі ж, як у попередньому випадку, а компоненти вектора b мають вигляд:

$$b_j = \int_{\Omega} \varphi_j \left(q - \hat{A}\,\psi\right) d\,\Omega. \tag{14}$$

Варіант 2. Полягає в тому, щоб не вводити додаткову функцію ψ, а, вибравши довільний базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, шукати $\tilde{u}_i$ такі, щоб наближення $\tilde{u}$ апроксимувало розв'язок крайової задачі і крайові умови одночасно. Представимо розв'язок, як зазвичай, відрізком ряду по базисних функціях:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} u^i e_i\ , \tag{15}$$

а під нев'язкою будемо розуміти суму $r = r_\Omega + r_{\partial\Omega}$

$$\begin{aligned} r_\Omega &= \hat{A}\tilde{u} - q \qquad \text{на} \quad \Omega \\ r_{\partial\Omega} &= \hat{K}\tilde{u} - h \qquad \text{на} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{16}$$

Вибираючи в H систему пробних функцій $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, коефіцієнти $\tilde{u}_i$ шукаємо, намагаючись анулювати проекцію нев'язки на підпростір $G^n = \left\{\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}\right\}$, тобто для кожної функції φ_j шукаємо:

$$\left(r, \varphi_j\right) = \left(r_\Omega (\varphi_j)_\Omega\right) + \left(r_{\partial\Omega} (\varphi_j)_{\partial\Omega}\right) = 0\ . \tag{17}$$

До правої частини звичайного рівняння методу зважених нев'язок у нас додалася проекція нев'язки $r_{\partial\Omega}$ на підпростір $G^n(\partial\Omega)$ – результат апроксимації граничної умови. Зрозуміло, що в цьому випадку проекція r_Ω не анулюється, а балансується проекцією $r_{\partial\Omega}$.

Метод скінченних елементів описаний у працях [8, 9] та [10, 11].

На сьогодні метод скінченних елементів досить поширений, що з математичної точки зору відповідає певному вибору базисних та пробних функцій.

Ідея методу полягає в тому, щоб не намагатися апроксимувати розв'язок одразу у всій області Ω, а розбити її на ряди, що не перекриваються підобластями, елементами Ω_p, таких, що $\Omega = \bigcup \Omega_p$, і будувати апроксимацію для кожної підобласті окремо.

Заданої точності ми можемо досягти й за допомогою малого числа базисних функцій за рахунок дроблення області визначення розв'язку. Застосування проекційного методу до лінійної крайової задачі дає:

$$\left(r,\varphi_j\right) = \int_{\Omega} \varphi_j\left(\hat{A}\tilde{u} - q\right) d\,\Omega = 0\,. \tag{18}$$

Маючи на увазі, що $\Omega = \bigcup \Omega_p$ і вибираючи для кожної підобласті систему пробних функцій $\left\{\varphi_j^p\right\}$, одержуємо:

$$\left(r,\varphi_j^p\right) = \int_{\Omega} \varphi_j^p\left(\hat{A}\tilde{u} - q\right) d\,\Omega = \int_{\Omega} \varphi_j^p\left(\hat{A}\sum_i \tilde{u}_p^i e_i^p - q\right) d\,\Omega = 0\,. \tag{19}$$

Функції $\left\{e_i^p\right\}$ і $\left\{\varphi_j^p\right\}$ називаються базисними і пробними функціями елемента чи локальними базисними і пробними функціями. Функції, визначені на Ω_p, можна довизначати на всю область Ω, як-от:

$$e_i = \begin{cases} e_i^p & \text{на } \Omega_p \\ 0 & \text{поза } \Omega_p \end{cases}, \qquad \varphi_j = \begin{cases} \varphi_j^p & \text{на } \Omega_p \\ 0 & \text{поза } \Omega_p \end{cases}. \tag{20}$$

Ці нові функції є глобальними базисними й пробними функціями відповідно.

Слабка форма методу зважених нев'язок. Застосування методу скінченних елементів до лінійної крайової задачі дає систему лінійних рівнянь:

$$\sum_i \tilde{u}_p^i \left(\int_{\Omega_p} \varphi_j^p \hat{A} e_i^p d\,\Omega\right) = \int_{\Omega_p} \varphi_j^p q d\,\Omega, \qquad p = 1,\ldots,P\,. \tag{21}$$

Якщо оператор $\hat{A}$ містить похідні порядку не вище s, то локальні базисні функції $\left\{e_i^p\right\}$ повинні бути не менше s разів диференційованими. Це досить сильна вимога. Часто, однак, інтеграл:

$$\int_{\Omega_p} \varphi_j^p \hat{A} e_i^p d\,\Omega, \tag{22}$$

за допомогою теореми Гріна вдається звести до інтеграла:

$$\int_{\Omega_p} \hat{L}\varphi_j^p \hat{N} e_i^p d\,\Omega, \tag{23}$$

де $\hat{L}$ і $\hat{N}$ – лінійні диференціальні оператори більш низького порядку, ніж вихідний оператор $\hat{A}$. Вимоги гладкості, пропоновані до базисних функцій $\left\{e_i^p\right\}$, знижуються, щоправда, за рахунок підвищення гладкості пробних функцій $\left\{\varphi_j^p\right\}$. Така модифікація називається слабкою формою методу зважених нев'язок. При використанні методу Гальоркіна, коли $\{\varphi_j^p\} = \{e_j^p\}$, застосування слабкої форми виправдано, це тільки послаблює вимоги гладкості, що накладаються на базисні функції.

Учені та інженери, фахівці в галузі фізичних наук широко використовують останнім часом методи, засновані на наближеному розв'язку рівнянь, що описують фізичну задачу. Розклад невідомих функцій у ряди, зокрема в ряди Тейлора, - це один із перших наближених методів – метод скінченних різниць. Його також можна інтерпретувати як окремий випадок більш загального методу зважених нев'язок.

Метод скінченних елементів може ґрунтуватися як на варіаційних принципах, так і на більш загальних уявленнях методу зважених нев'язок. Суцільне середовище розбивається на окремі елементи, які можна розглядати як конкретні частини цілого. Саме цією наочністю метод привернув до себе увагу дослідників. Науково-технічна література з означеного методу досить обширна, причому розглядаються різні задачі: розрахунку конструкцій [10], потоку рідини [11] та інші.

Вищезгаданий метод інтенсивно почав розроблятися на початку 1960-х років, і саме в цей період з'явилися тисячі робіт із чисельних методів, ефективних підходів до розв'язку прикладних задач, дослідження основних фізико-математичних принципів. Методи, застосування яких розпочали ще тоді, коли не було обчислювальної техніки [12, 13], описували різні шляхи розв'язання рівнянь. До них належать методи Бубнова, колокацій, графічні прийоми розв'язку, матричні розклади й метод передатних матриць, комбінації різних прийомів і т. д. Вони продовжували розвиватись іноді під іншими назвами, подібними до методів скінченних елементів, Бубнова, кінцево-елементних смуг, окремих схем інтегрування за часом і т. д. Іншим напрямком наближеного аналізу був розвиток змішаних принципів, коли фізичні задачі можна виражати й вирішувати різними способами відповідно до вигляду використовуваних апроксимацій рівнянь. Використання змішаних методів розпочато в працях [14, 15] у методі скінченних елементів. Застосування змішаних методів у будівельній механіці описані в праці [16].

Розвиток числових методів безпосередньо пов'язаний із появою обчислювальних машин, які могли вирішувати інженерні задачі, що вимагають збереження великого числового масиву й проведення значного обсягу обчислень. На якийсь час прогрес в обчислювальній техніці відвернув увагу учених від розвитку математичних методів і їхніх фізичних основ.

Окремий тип аналітичного методу не зв'язаний безпосередньо з наближеними методами – це метод інтегральних рівнянь, який використовувався головним чином у механіці рідини й задачах загальної теорії потенціалу, відомий як метод джерела, що характерно в цих задачах невідомі не є фізичними змінними. Розвиток цього методу описано в працях [17, 18] та [19, 20]. Зокрема, розвито згадані методи в працях радянських учених [21, 22, 23] і [24]. Раніше, у праці [25], був розвинутий метод, що застосовував інтегральні рівняння для розв'язку рівнянь типу рівняння Лапласа.

«Прямий» метод дослідження описаний у праці [21]. З точки зору інженера метод був уперше запропонований у праці [26]. Саме прямий метод найбільш прийнятний для інженерів і механіків, оскільки невідомі величини в ньому є фізичними змінними.

Порівняємо розглянуті підходи до розв'язку диференціальних рівнянь із крайовими умовами.

Безсумнівною перевагою різницевих методів є порівняна легкість одержання різницевих рівнянь, що особливо виявляється в багатомірних задачах. Проекційні методи при розв’язанні рівнянь вимагають обчислення інтегралів, і для цього іноді доводиться залучати чисельні процедури.

Проекційні методи (метод скінченних елементів) добре пристосовані для розв’язку рівнянь в областях довільної форми. Складність різницевих рівнянь сильно залежить від вигляду області й регулярності розташування вузлів.

Збіжність проекційних методів визначається апроксимуючими властивостями базисних функцій і може бути доведена для задачі в цілому. Для доведення збіжності різницевого розв’язку потрібно аналізувати апроксимуючі властивості і стійкість кожного окремого рівняння.

Урешті, слід сказати, що жоден із методів не має явної переваги. Вибір методу має визначатися розв’язуваною задачею і наявними ресурсами, хоча найчастіше найбільш важливими аргументами є особисті смаки обчислювача.

Метод скінченних елементів є одним із найбільш ефективних числових методів розв’язання крайових задач [27, 28]. На сьогодні побачили світ десятки тисяч публікацій та монографій провідних учених із МСЕ [29, 5, 8] та ін.

Питанням обґрунтування методу скінченних елементів присвячені праці [30, 31, 11].

У [32] запропоновано розрахувати матрицю жорсткості елемента конструкції, враховуючи змінність поперечного перерізу. Але елемент конструкції представлено одним скінченним елементом, що не завжди дає достатню точність результату.

Забезпечення довговічності мостових конструкцій є актуальною задачею мостобудування. При проектуванні сучасних мостобудівних конструкцій для розрахунку основних факторів їхнього функціонування: міцності, жорсткості, стійкості – використовуються як дані теоретичних розрахунків [33], так і результати відповідних експериментальних досліджень [34, 35, 36]. Вказані два підходи є взаємопов’язані, бо об’єм експериментальних робіт у значній мірі залежить від точності застосовуваних розрахункових методів. Тому розробка і впровадження в інженерну практику вдосконалених методів розрахунку елементів будівельних конструкцій (балки, плити, оболонки, мостові опори і т. ін.) є актуальною задачею. На сьогодні серед великої кількості відомих методів розрахунку найбільш точними є методи теорії пружності, описані в працях [37, 38, 45]. Але внаслідок того, що далеко не всі задачі теорії пружності й теорії оболонок мають точні замкнуті розв’язки, значну роль у розрахунковій практиці відіграють наближені методи, серед яких найбільш плідними є варіаційні, описані в науково-технічній літературі різними авторами [46, 1, 46] та [47, 48, 49], і методи функціонального аналізу, розглянуті в працях [5, 1, 41] та [38, 39]. Розвиток варіаційних методів, викладених у класичних працях Релея і Рітца, отримав своє застосування до задач розрахунку основних конструктивних елементів, що використовуються в будівельній галузі, завдяки роботам І. Г. Бубнова, В.З. Власова, Б.Г. Гальоркіна, Л.В. Канторовича, Л.С. Лейбензона, П.Ф. Папковича, С. П. Тимошенко та ін.

Найбільшого розповсюдження дістали на сьогоднішній день проекційні методи [40, 1, 41], прямі варіаційні методи [5, 42, 43], а також метод скінчених елементів [6, 8], що є логічним розширенням і вдосконаленням проекційних методів, які трактуються як проекція точного розв’язку з нескінченновимірного гільбертового простору на скінченновимірний підпростір (рис.1).

Вказані методи дають можливість побудувати наближені розв’язки на основі вибору базисних та пробних функцій. На рисунку 1. умовно зображено точний розв’язок у нескінченновимірному просторі вектором $u(x,y)$, а проекції точного розв’язку на скінченновимірні підпростори B_1 та B_2 відповідно $u_1(x,y)$ та $u_2(x,y)$.

Більш складним є питання оцінки точності отриманих результатів, чіткі практичні рекомендації відсутні. Для приблизної оцінки рекомендується виконати декілька розрахунків із поступовим зменшенням розмірів скінченних елементів (за аналогією з методом, запропонованим Тимошенко С.П., при розв'язуванні задач стійкості енергетичним методом).

Ми пропонуємо шлях удосконалення числових проекційних методів, що може бути сформульованим як вирівнювання й мінімізація $|u_1(x,y)-u_2(x,y)|$ у всьому просторі розв'язку.

У роботі [44] розглянуто математичну модель напруженого стану ортотропної мостової плити. Автори виходять із правильного припущення, що бетон і арматура, виготовлена зі сталі, є ізотропними матеріалами. Оскільки анізотропною в макроскопічному плані є сама конструкція, плита, необхідно саме в цьому аспекті дослідити математичну модель, диференціальне рівняння деформації ортотропної плити.

У наступних параграфах ми встановимо умови, що задають область допустимих значень механічних параметрів мостової плити, модуль пружності, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона, за яких математична модель ортотропної мостової плити дає розв'язок в області дійсних чисел, тобто є адекватною досліджуваному об'єкту.

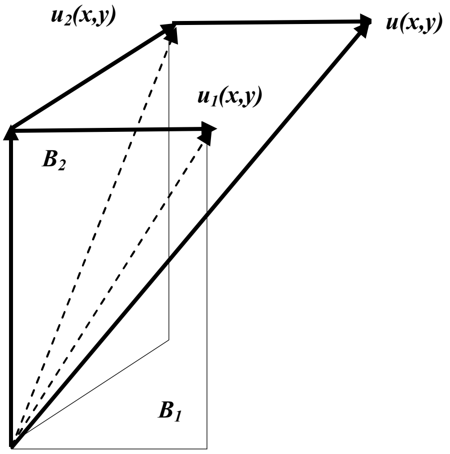

Рис. 1. Проекція точного розв'язку з нескінченно вимірного гільбертового простору на скінченно вимірний підпростір.

До недоліків чисельних методів слід віднести те, що одержання чисельного розв'язку може виявитися надмірно дорогим, оскільки потребує коштовних програмних пакетів, а якщо ще й математична постановка завдання допускає більше одного розв'язку, важко визначити, чи відповідають результати розрахунку дійсності. Наближеність розв'язку є головним недоліком числових методів.

Для усунення впливу цього недоліку ми пропонуємо необхідність дублювання чисельних розрахунків, наприклад, із застосуванням різних базисних функцій. Нами буде розглянуто розв'язок та порівняння розв'язків диференціального рівняння опори та балки аналітичним і проекційним методами в середовищі поліномів та тригонометричних функцій.

Висновки

На основі огляду вищезгаданих наукових літературних джерел можна побачити, що на даний час переважають чисельні методи. Аналітичні розв'язки, що містять повну інформацію про досліджувану модель мостової конструкції, через свою громіздкість майже не розглядаються, тому слід зосередити увагу на отриманні аналітичних розв'язків для мостової плити.

Аналіз чисельних та аналітичних методів розрахунку мостових конструкцій, описаних у науковій літературі, свідчить, що перевага надається чисельним методам, причому в певній системі базисних функцій. Відсутні роботи з порівняння чисельних розв'язків у різних базисних функціях з аналітичними розв'язками, а також порівняння чисельних розв'язків у різних базисах. Таке порівняння може бути використано як критерій дискретизації представлення числового розв'язку.

За чисельного моделювання реальних мостових споруд результат залежить від рівня адекватності моделі реальному об'єкту, ступеня розбиття моделі на скінченні елементи, стійкості розв'язку відповідного диференціального рівняння за заданої кількості скінченних елементів.

Стосовно чисельних методів дослідження і розрахунків параметрів елементів мостових конструкцій, то представлення розв'язку паралельно у двох базисах важливо з точки зору надійності та обґрунтованого вибору ступеня дискретизації.

Важливо отримати й максимально використати співвідношення, що випливають із математичних моделей статики й динаміки деформівного тіла, для непрямого вимірювання важливих механічних характеристик (ефективний модуль пружності, ефективна густина, ефективна товщина, ефективна циліндрична жорсткість тощо) мостової плити.

ЛІТЕРАТУРА

1. Коллатц Ф. Функциональный анализ и вычислительная математика / Коллатц Ф. – М. : Мир, 1969. – 448 с.
2. Справочник по сопротивлению материалов / [Г. С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев ; отв. ред. Г.С. Писаренко.] – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Наук. думка, 1988. – 736 с.
3. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики / Рихтмайер Р. – М. : Мир, 1982. – 486 с.
4. Хатсон В. Приложения функционального анализа и теории операторов / Хатсон В., Тим Д. – М. : Мир, 1983. – 432 с.
5. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений / Гавурин М. К. – М. : Наука, 1971. – 248 с.
6. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / Зенкевич О., Морган К. – М. : Мир, 1986. – 318 с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О. – М. : Мир, 1975. – 541с.
8. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Оден Д. – М. : Мир, 1976. – 464 с.
9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Сегерлинд Л. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
10. Brebbia C.A. Fundamentals of Finite Element Techn Structural Engineers. Buttervvorths / Brebbia C.A., and Connor, J.J. – London, 1973. – pp. 269-278.
11. Connor, J. J. Finite Element Techniques for Fluid Flow / Connor, J. J. and Brebbia. C. A. Butt. – London, 1976. – pp. 310-315.
12. Courant, R.. Methods of Mathematical Physics / Courant, R., and Hilbert, D. Interscience. – N., 1953. – pp. 243-251.
13. Kantorovich, L.V. Approximate Methods of Higher Noordhoff / Kantorovich, L.V. and Krylov V.I. Groningen, 1958. – pp. 681-690.
14. Pian T. Basis of finite element method for solid contim Numerical Methods / Pian T. R and Tong P. Engng. 1,3-28, 1969. – pp. 292-300.
15. Reissner E. A note on variational principles in elasticity / Reissner E. Int. J.
16. Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity / Washizu K. 2nd ed., P New York, 1975. – pp. 630-635.
17. Jaswon, M. A. Integral equation methods in potential theory / Jaswon, M. A. I, Proc. Rov A 275,23-32, 1963. – pp. 287-293.
18. Symum G.T. Integral equation methods in potential theory / Symum G.T. II, Proc. Roy. S 275, 33-46, 1963. – pp. 258-267.
19. Hess J. L. O. Calculation of potential flow about arbitral / Hess J. L. and Smith A. M. O. Progress in Aeronautical Sciences Vol. 8 (D. Kuchemann, Ed.), Pergamon, London, 1964. – pp. 289-301.

20. Massonnet C. E. Numerical Use of Integral Procedures, in Stress Analysis / O. kiewicz and G. Holister Eds. / Massonnet C. E. Wiley, London, 1966. – pp. 267-372.

21. Kupradze O. D. Potential Methods in the Theory of Elasticity / Kupradze O.D. Daniel Davey & York, 1965. – pp. 298-305.

22. Mikhlin S. G. Integral Equations / Mikhlin, S. G. Pergamon, New York, 1957. – pp. 256-261.

23. Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Smirnov V.J. Integral equations and partial differential equations / Smirnov V.J. in A Course Mathematics, Vol. IV, Addison-Wesley, London, 1964. – pp. 267-274.

24. Kellogg, O. D. Foundations of Potential Theory / Kellogg, O. D. Dover, New York, 1953. – pp. 384-390.

25. Cruse, T. A. A direct formulation and numerical solution of transient elasto-dynamic problem / Cruse, T. A., and Rizzo, F. J. J. Math. Anal. Appl. 22, 1968. – pp. 281-289.

26. Махенхауэр Б. Спектральный метод // Численные методы, используемые в атмосферных моделях : сб. статей. – Л. : Гидрометеоиздат, 1982. – с. 245-273.

27. Мерили П. Е., Орзаг С. А. Псевдоспектральный метод // Численные методы, используемые в атмосферных моделях : сб. статей. – Л. : Гидрометеоиздат, 1982. – 498 с.

28. Аргирис Д. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц / Аргирис Д. ; под ред. Смирнова А. Ф. – М. : Изд-во иностр. лит., 1968. – 241

29. Корнеев В.Г. Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости / Корнеев В.Г. // Извест. ВНИИ гидротехн. – 1967. – Т. 83. – с. 286-307.

30. Каллен М. Дж. Метод конечных элементов // Численные методы, используемые в атмосферных моделях : сб. статей. – Л. : Гидрометеоиздат, 1982. – 498 с.

31. Метод конечных элементов / [Варвак П. М., Бузун И. М., Городецкий А. С., Пискунов В. Г., Толокнов Ю. Н.] – Київ : Вища школа, 1981. – 176 с.

32. Андрейків О. Є. Розрахунок залишкового ресурсу відповідальних елементів мостів / Андрейків О. Є., Лучко Й. Й., Панько І.М. // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Львів : Каменяр, 2001. – Вип. 3. – с. 9-22.

33. Коваль П. М. Випробування монолітного залізобетонного моста через р. Стара ріка / Коваль П. М., Походенко А.Г., Лучко Й.Й., Фаль А.Є. // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць / за заг. редакцією професора Лучка Й.Й. – Л. : Каменяр, 2003. – Вип. 5. – с. 65-71.

34. Коваль П. М. Оцінка тріщиностійкості бетонів у мостових конструкціях за методом акустичної емісії / Коваль П. М., Лучко Й. Й., Стащук П. М. // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць / за заг. редакцією професора Лучка Й.Й. – Л. : Каменяр, 2001. – Вип. 3. – с.

35. Besseling J.F. The complete analogy between the matrix equations and the continuous field equations of structural analysis / Besseling J.F. Presses Academiques. Eouropeennes. – Bruxelles, 1964. – pp. 223-242.

36. Тимошенко С. П. Теория упругости / Тимошенко С. П., Гудьер Д. – М. : Наука, 1975. – 575 с.

37. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела / Филин А.П. – М. : Наука, 1975. – 832 с.

38. Филин А. П. Функциональный анализ и вычислительная математика / Филин А.П., Коллатц Л. – М. : Мир, 1969. – 444 с.

39. Ефимов А. В. Математический анализ : специальные разделы / Ефимов А. В., Золотарев Ю. Г., Терпигорева В. М. // Применение некоторых методов математического и функционального анализа : учеб. пособие для вузов :

40. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А.Н., Фомин С.В. – М. : Наука, 1976. – 544 с.

41. Лучко Й. Й. Визначення деформації балкових елементів аналітичними та числовими методами / Лучко Й. Й., Ігнатишин М. І. // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць / за заг. редакцією професора Лучка Й.Й. – Л. : Каменяр, 2006. – Вип. 8. – С. 45-58.

42. Моргун А. С. Дослідження зміни жорсткості через появу тріщин залізобетонних балок при статичних довготривалих навантаженнях / Моргун А. С., Моргун І. А. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця : Будівництво, 2007. – № 1. – с. 24-27.

43. Делявський М. В. Поперечний згин мостової залізобетонної плити / Делявський М. В., Лучко Й. Й., Лучко Г. Й. // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій : зб. наук. праць. – Л. : Каменяр, 2000. – Вип. 2. – с. 39-45.

44. De Veubeke B.F. Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method / De Veubeke B.F. Stress Analysis, London–New York – Sydney, John Wiley and Sons LTD, 1965.

45. Образцов И. Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных пространственных конструкций / Образцов И. Ф. – М. : Машиностроение, 1966. – 392 с.

46. Образцов И. Ф. Конечные элементы и аппроксимация / Образцов И. Ф. Зенкевич О., Морган К. – М. : Мир, 1986. – 318 с.

47. Приближенное решение операторних уравнений / [Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.] – М. : Наука, 1969. – 456 с.

48. Williams J. G. The analysis of instrumented impact tests using a mass-spring models / Williams J. G., Adams G. S. // Int. J. Fract., 1987. – pp. 33-41.

АННОТАЦИЯ

ОБЗОР ЧИСЛОВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Статья посвящена актуальной проблеме применения математических методов для решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела. Математическая модель элементов мостовых конструкций опоры, балки, плиты состоит из дифференциальных уравнений в частных производных и краевых условий. Их можно записать в так называемой операторной форме. Такая краевая задача только в отдельных случаях имеет аналитическое решение. Большинство актуальных прикладных задач мостостроения и испытания мостовых конструкций не имеют аналитического решения, или решение является очень громоздким. Кроме этого, часто аналитическое решение - это функциональный медленно сходящийся ряд, поэтому не имеет практической пользы при расчете механических характеристик элементов мостовых конструкций. К аналитическим относится метод последовательных приближений. Он заключается в построении последовательности операторов, точнее приближают выходной оператор. Собственно говоря, оператор интерпретируется как предел некоторой последовательности операторов, и эта последовательность строится в ходе решения задачи. Приближенные решения можно найти с помощью двух-трех итераций. Решение выглядит как аналитическое выражение, по которому можно рассчитать численные значения. Методы построения решения достаточно также громоздкие. Большинство решений прикладных задач получены методами, объединенными общим названим, - проекционные. В статье рассмотрено применение проекционных методов решения краевых задач, моделирующих элементы мостовых конструкций. Проекционные методы образуют вычислительную процедуру, которая осуществляется с помощью комп'ютера, и решение можно получить в виде таблицы. Они позволяют получить принципиально приближенное решение, которое связано с дискретностью вычислительных устройств, ограниченным объемом памяти, конечным быстродействием и т. п. Анализ численных и аналитических методов расчета мостовых конструкцій свидетельствует, что предпочтение отдается числовым методам, причем в определенной системе базисных функций. Авторами предложен путь улучшения числовых методов, повышения их надежности - проведение параллельных расчетов в базисах взятых из разных классов функции.

Ключевые слова: *проекционные методы, метод Галеркина, спектральный метод, метод коллокации, или псевдо спектральный, метод конечных элементов.*

SUMMARY

REVIEW OF NUMERICAL MATHEMATICAL METHODS OF CALCULATING THE BRIDGE CONSTRUCTION

The article is devoted to the problem of application of mathematical methods to solve applied problems of the solid body. Mathematical model elements of bridge construction pillars, beams, plates, consisting of differential equations in partial derivatives and boundary conditions. They can be add to the so-called operator form This boundary problem only in rare cases has analytical solution. Most current applications task of bridge construction and testing of bridge structures have no analytical solution, or the solution is very cumbersome. In addition, the analytical solution is often functional range that coincides slowly because no practical use in calculating the mechanical characteristics of the elements of bridge structures.

Method of successive approximations belongs to the analytical. He is building a sequence of operators more accurately approximate the original operator. In fact, the operator is interpreted as the limit of a sequence of operators, and this sequence is constructed during problem solving. Approximate solution can be found through two or three iterations. Solution looks like analytical expression by which to calculate the numerical *values. Methods of solution are also quite bulky. Most solution of applied tasks obtained by that share a common name - projection.*

The usage of projection methods for solving boundary value problems modeling elements of bridge structures has been considered in the article. Projection methods form computational procedure that is carried out using a computer and the solution is available in a table. They allow you to reach the approximate solution in principle, that is connected with the discrete of computing devices, limited memory, and so the ultimate performance etc. The analysis of numerical and analytical methods of calculation of bridge structures shows that preferred numerical methods, and in a certain system of basic functions.

The improvement of the numerical methods, increase their reliability - conducting of calculations in parallel calculations in bases taken from various classes of functions have been proposed by the author.

Keywords: *projection methods, Halerkin method, spectral method, collocation, or pseudo spectral, finite element method.*

УДК 745 / 749:217

АНАЛІЗ СИМВОЛІКО - ЗНАКОВОЇ ПРИРОДИ КОНЦЕПТУ ФОРМОТВОРЕННЯ ХРАМУ

ГОШОВСЬКИЙ Р.М., ІВАНЧО Т.Р.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Мукачівський державний університет

У статті розкривається семантичний контекст духовно-образного вираження сакральності християнського храму, зокрема церкви, через призму його архітектурного укладу. З'ясовуються природа, сенси і системи втілення світоглядних і релігійних концепцій в устрої та образотворенні складових церковної споруди. Повстання церкви як багатовимірного "сакрального явища", особливо характерного для українського релігійного середовища. Визначається ступінь вираження сакральності у кожному духовно-змістовому секторі церкви.

Ключові слова: *церква, храм, християнство, сакральність, концепт формотворення, архітектурний уклад, стрій, семантика, засоби вираження, природа, сенс, система.*

Постановка проблеми. Межа XIX — XX ст. була надзвичайно плідним періодом для розвитку сакрального мистецтва західноукраїнського регіону. У сфері сакрального працювала плеяда видатних майстрів, творчість яких вплинула на майбутні шляхи розвитку українського мистецтва. Завдяки високому рівню свідомості та культури, широті світогляду митці того покоління знали та високо цінували національні художні традиції, активно використовували їх, органічно вплітаючи в мистецьку мову свого часу. За порівняно короткий проміжок часу — від останніх десятиліть XIX ст. — до 1930-х рр. — національне релігійне мистецтво пройшло стрімкий шлях розвитку. Саме сакральне мистецтво стає джерелом для становлення «нового українського стилю». Церковна архітектура кінця XIX — першої третини XX ст., яка характеризується значними досягненнями української художньої культури, живописними та скульптурними творами видатних майстрів, не має в сучасному мистецтвознавстві адекватних критеріїв оцінки. Уявлення про тогочасні споруди до сьогодні неповні та, як правило, зводяться до зовнішніх форм. Однак саме в організації внутрішнього простору й усього художнього середовища храму зосереджені найважливіші й особливо показові процеси розвитку церковного мистецтва межі століть. **Актуальність дослідження** визначається такими положеннями: постійна небезпека знищення при сучасних реконструкціях інтер'єрів українських церков потребує їх детального дослідження; поглиблення знань з історії мистецтва України, створення цілісної картини закономірностей формування інтер'єру сакральних споруд кінця XIX — першої третини XX ст. дає методичне обґрунтування для теоретичних і практичних пошуків національної своєрідності сучасного сакрального мистецтва