

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ОПР МАТЕРІАЛІВ:

**РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНІ
РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ**

Навчально-методичний посібник

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 131 «Прикладна механіка»

Мукачєво 2024

УДК 539.3/.6(075.8)

О-61

*Рекомендовано до друку
науково-методичною радою
Мукачівського державного університету
(протокол № 10 від «23» квітня 2024 р.)*

Жигуц Ю. Ю., Максютова О.В. Опір матеріалів: розрахунково-проектувальні роботи з дисципліни. Навчально-методичний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 131 «Прикладна механіка». Мукачево : МДУ, 2024. 90 с.

Рецензент:

Пригара Михайло Петрович, канд. техн. наук, доцент кафедри технології машинобудування ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

ISBN 978-617-7495-60-3

© Жигуц Ю.Ю., Максютова О.В., 2024

© Мукачівський державний університет, 2024

ЗМІСТ

Загальні положення	4
Вибір варіанта завдання	5
Оформлення розрахунково-проектувальної роботи	6
I. Розрахунок на міцність ступінчастого стержня при розтяганні-стисканні	7
II. Розрахунок валу на кручення	18
III. Розрахунок на міцність шарнірно-опертої балки при згині	31
IV. Позацентровий стиск	44
V. Розрахунок круглого валу на згин з крученням	53
VI. Розрахунок статично невизначених рам	64
Критерії оцінювання розрахунково-проектувальної роботи	83
Перелік використаних та рекомендованих джерел	84
Додатки	85
Додаток 1. Титульна сторінка студентського звіту	85
Додаток 2. Балки двотаврові (ГОСТ 8239-72)	86
Додаток 3. Геометричні характеристики деяких перерізів	87
Додаток 4. Формули для визначення площ і координат центрів маси деяких епюр	88
Додаток 5. Рекомендований ряд нормальних лінійних розмірів в діапазоні від 1 до 950 мм за Ra 40 (СТ РЕВ 514-77)	89

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість та стійкість елементів машин та споруд.

Під міцністю розуміють здатність конструкції, її частин і деталей витримувати певне навантаження не руйнуючись.

Жорсткість – це здатність конструкції та її елементів чинити опір деформуванню, змінюванню форми та розмірів під дією зовнішніх навантажень.

При заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певного значення, встановленого до вимог, що ставляться до конструкції.

Стійкість – це здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

При вивченні курсу опору матеріалів найбільш ефективним методом навчання розв’язування задач про розрахунок елементів машин та споруд на міцність, жорсткість та стійкість є самостійна робота студентів.

Навчальними програмами курсів опору матеріалів передбачено виконання розрахунково-проектувальних робіт.

Допомогти здобувачеві в засвоєнні теоретичного матеріалу, набутті навичок розв’язування задач розрахунково-проектувальних робіт є метою даного навчально-методичного посібника.

У додатках наведено основні довідкові матеріали, які необхідні при розрахунках.

ВИБІР ВАРІАНТА ЗАВДАННЯ

Варіант розрахункової схеми та числові дані вибираються здобувачем відповідно до його шифру.

Шифр визначається двозначним числом (останні дві цифри номера залікової книжки здобувача), перша цифра якого вказує номер розрахункової схеми, друга – номер рядка або стовпця в таблиці з числовими даними задачі.

При складанні умов задачі згідно з шифром потрібно мати на увазі таке.

1. Якщо в таблиці навантаження подано з від'ємним знаком, то на рисунку потрібно змінити його напрям на протилежний і надалі знак "–" не брати до уваги.

2. З таблиці необхідно виписувати значення тільки тих величин (розмірів, навантажень), які вказані у відповідному шифрі розрахунковій схемі.

ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Робота виконується на папері стандартного формату А4 (210х297 мм), зшитих зліва. Справа та зліва залишаються поля 3 см.
2. Титульну сторінку оформляють згідно з додатком.
3. Розрахунки та пояснення до них, а також рисунки виконують лише на одному боці кожного з листів.
4. Кожну задачу потрібно починати з нової сторінки.
5. Перед розв'язанням задачі вказати її номер, назву, переписати повністю умову задачі, числові дані, навести розрахункову схему стержня, відкладаючи довжини його ділянок у масштабі та направляючи зовнішні силові фактори з урахуванням їхніх знаків, вказаних у таблиці.
6. Розв'язання задачі необхідно супроводжувати короткими поясненнями, кресленнями та ескізами.
7. Креслення та графіки (епюри) виконуються на білому папері того самого формату (А4) з обов'язковим додержанням масштабу та всіх вимог стандарту. На кресленні повинні бути вказані позначення та числові значення всіх величин, використаних у розрахунку.
8. При розв'язанні задач шукану величину потрібно спочатку одержати в алгебраїчному виді, а потім в остаточну формулу підставити числові значення величин. У відповіді обов'язково вказати одиниці виміру одержаної величини.
9. У технічних розрахунках не прийнято оперувати простими дробами.
10. Остаточний результат потрібно підкреслити або обвести рамкою.

ЗАДАЧА 1

I. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ СТУПІНЧАТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ РОЗТЯГАННІ-СТИСКАННІ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Розтяганням-стисканням стержня називають такий вид його деформації, коли в поперечних перерізах виникає один силовий фактор – поздовжня внутрішня сила N .

Для знаходження величини поздовжньої внутрішньої сили користуються методом перерізів.

Поздовжня сила N в довільному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь стержня зовнішніх сил, прикладених з одного боку перерізу.

Додатними вважаються розтягуючі сили (вони направлені від перерізу) (рис. 1.1, а), від'ємними – стискуючі (вони направлені до перерізу) (рис. 1.1, б).

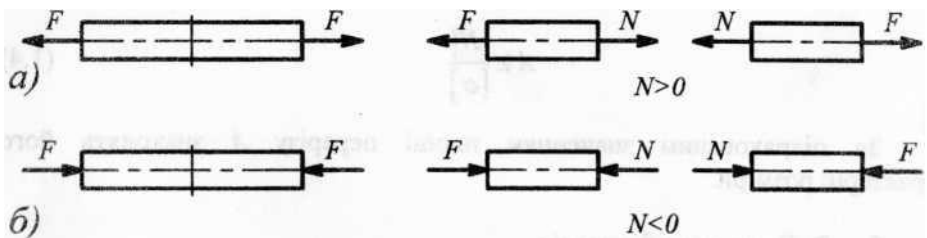


Рис. 1.1. Схеми навантаження

Нормальні напруження у поперечному перерізі стержня при розтягу або стиску

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (1.1)$$

Умова міцності

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (1.2)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження, яке визначають як деяку частину граничного напруження (границі текучості σ_t або тимчасового опору σ_b для пластичних матеріалів або границі міцності σ_n для крихких матеріалів); A – площа поперечного перерізу стержня.

Використовуючи умову міцності (1.2), можна проводити три основні види розрахунків на міцність:

1. Перевірковий.

За відомими розмірами поперечних перерізів та матеріалом із заданим $[\sigma]$ знаходять розрахункові (фактичні) напруження σ в характерних перерізах і порівнюють їх з допустимим напруженням $[\sigma]$

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (1.3)$$

2. Проектний.

За відомим навантаженням (відома N) для вибраного матеріалу із заданим $[\sigma]$ знаходять розміри поперечних перерізів.

З умови міцності (1.2) шукають площу поперечного перерізу

$$A \geq \frac{|N|}{[\sigma]} \quad (1.4)$$

За підрахованим значенням площі перерізу A знаходять його характерні розміри.

3. Вибір силових факторів.

За відомими розмірами стержня (відома площа поперечного перерізу A), для заданого матеріалу (відоме $[\sigma]$) і схемою навантаження визначають допустиму поздовжню силу

$$[N] \leq A[\sigma] \quad (1.5)$$

за якою підбирають допустиме навантаження на стержень.

Абсолютні поздовжні деформації при розтяганні-стисканні виражаються формулою з закону Гука

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (1.6)$$

де N – поздовжня внутрішня сила;

l – довжина характерної ділянки;

E – модуль пружності першого роду, модуль Юнга;

A – площа поперечного перерізу.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Приклад 1. Спроекувати ступінчастий стержень з круглим поперечним перерізом. Взяти $l = 2$ м, $a = 0,4$ м, $b = 1$ м, $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 30$ кН, $F_3 = 20$ кН, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

План розв'язання задачі

1. Накреслити розрахункову схему відповідно до даних умови задачі.
2. Визначити кількість характерних ділянок і позначити їх.
3. На кожній характерній ділянці знайти значення поздовжньої внутрішньої сили N і побудувати їх епюру.
4. Визначити діаметри стержня на всіх ділянках з умови міцності. Накреслити ескіз стержня і проставити розміри.
5. За формулою за законом Гука визначити абсолютні деформації Δ_i окремих ділянок і всього стержня Δ , побудувати епюру переміщень λ .

Розв'язання

1. За даними умови задачі накреслимо розрахункову схему (рис. 1.2, а).

2. **Визначимо кількість і позначимо характерні ділянки.**

Стержень має три характерних ділянки, позначаємо їх (рис. 1.2, а).

3. **Визначення поздовжніх внутрішніх сил і побудова їх епюру.**

Знаходимо значення поздовжніх внутрішніх сил на характерних ділянках.

Ділянки

$$AB: N_1 = -F_1 = -10 \text{ кН};$$

$$BC: N_2 = -F_1 + F_2 = -10 + 30 = 20 \text{ кН};$$

$$CD: N_3 = -F_1 + F_2 + F_3 = -10 + 30 + 20 = 40 \text{ кН}.$$

За одержаними значеннями будуємо епюру поздовжніх внутрішніх сил (рис. 1.2, б).

4. **Знаходження діаметрів стержня на характерних ділянках.**

З умови міцності вирахуємо величину площі поперечного перерізу характерних ділянок. За формулою (1.4):

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 6,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

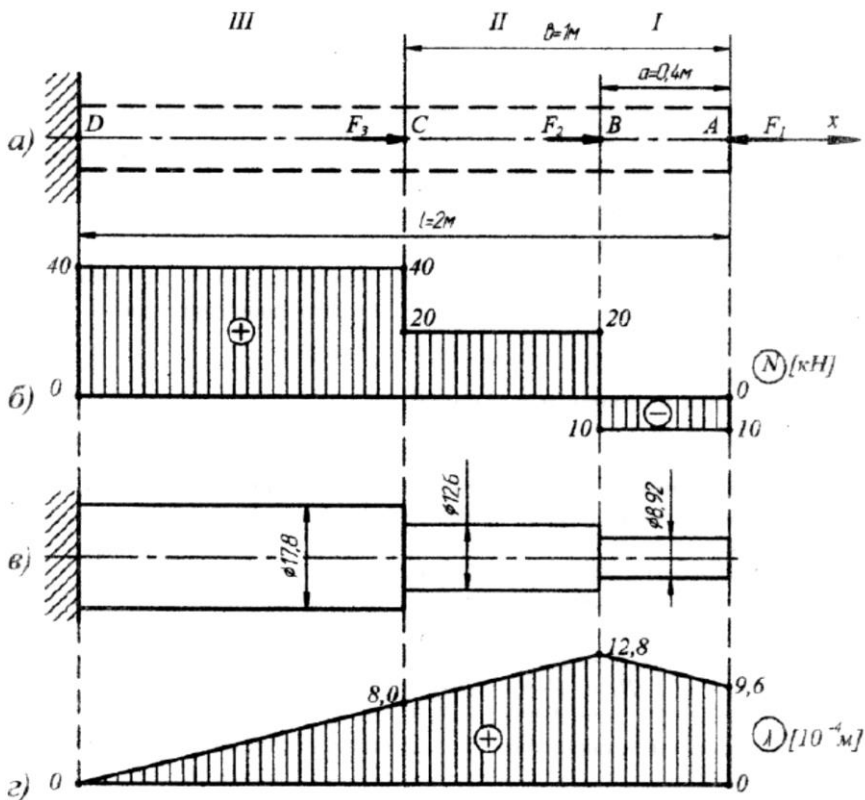


Рис. 1.2.

Враховуючи, що $A = \frac{\pi d^2}{4}$, знаходимо значення діаметра стержня на характерних ділянках за формулою $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 6,25 \cdot 10^{-5}}{\pi}} = 8,92 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,92 \text{ мм};$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,25 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 12,6 \text{ мм};$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 1,78 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 17,8 \text{ мм}.$$

За одержаними значеннями діаметрів накреслимо ескіз стержня (рис. 1.2, в).

5. Визначення абсолютних деформацій окремих ділянок і всього стержня.

Використовуючи формулу з закону Гука (6) знаходимо абсолютні деформації кожної з характерних ділянок Δl_i .

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6,25 \cdot 10^{-5}} = -3,2 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{BC} = \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,25 \cdot 10^{-4}} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{CD} = \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = 8,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Знаходимо переміщення характерних перерізів за якими будемо відповідну епюру переміщень λ (рис. 1.2, г).

$$\lambda_D = 0;$$

$$\lambda_C = \lambda_D + \Delta l_{CD} = 0 + 8 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\lambda_B = \lambda_C + \Delta l_{BC} = 8 \cdot 10^{-4} + 4,8 \cdot 10^{-4} = 12,8 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\lambda_A = \lambda_B + \Delta l_{AB} = 12,8 \cdot 10^{-4} - 3,2 \cdot 10^{-4} = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Отже, абсолютна деформація всього стержня $\Delta l = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

Приклад 2. Перевірити міцність ступінчастого сталюого стержня та визначити його повну деформацію, якщо $A_1 = 10 \text{ см}^2$; $A_2 = 2 A_1$; $l = 2 \text{ м}$; $F_1 = 20 \text{ кН}$; $F_2 = 40 \text{ кН}$; $F_3 = 10 \text{ кН}$; $a = 0,8 \text{ м}$; $b = 0,6 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

План розв'язання задачі

1. Накреслити розрахункову схему відповідно до даних умови задачі.

2. Визначити кількість характерних ділянок і позначити їх.

3. На кожній характерній ділянці знайти значення поздовжньої внутрішньої сили N і побудувати їх епюру.

4. Визначити напруження σ на кожній характерній ділянці стержня і побудувати епюру σ . Перевірити міцність стержня. У випадку невиконання умови міцності дати рекомендації щодо розмірів поперечних перерізів.

5. За формулою із закону Гука визначити абсолютні деформації Δl_i , окремих ділянок і всього стержня Δl , побудувати епюру переміщень λ .

Розв'язання

1. За даними умови задачі накреслимо розрахункову схему (рис. 1.3, а).

2. Визначимо кількість і позначимо характерні ділянки.

Стержень має три характерних ділянки, позначаємо їх (рис. 1.3, а).

3. Визначення поздовжніх внутрішніх сил і побудова їх епюру.

Знаходимо значення поздовжніх внутрішніх сил на характерних ділянках.

Ділянки:

$$AB: N_1 = F_1 = 20 \text{ кН};$$

$$BC: N_2 = F_1 - F_2 = 20 - 40 = -20 \text{ кН};$$

$$CD: N_3 = F_1 - F_2 - F_3 = 20 - 40 - 10 = -30 \text{ кН}.$$

За одержаними значеннями будуємо епюру поздовжніх внутрішніх сил (рис. 1.3, б).

4. Визначення нормальних напружень σ і побудова їх епюру.
Перевірка умови міцності.

За формулою (1.1) шукаємо величину напружень на кожній характерній ділянці.

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_2} = \frac{N_1}{2A_1} = \frac{20 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 10 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -20 \cdot 10^6 \text{ Па} = -20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{N_3}{A_1} = \frac{-30 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -30 \cdot 10^6 \text{ Па} = -30 \text{ МПа}.$$

За одержаними значеннями будуємо епюру нормальних напружень (рис. 1.3, в).

Порівнюючи одержані значення нормальних напружень з допустимим напруженням $[\sigma_T] = 160 \text{ МПа}$ бачимо, що умова міцності на кожній з характерних ділянок виконується.

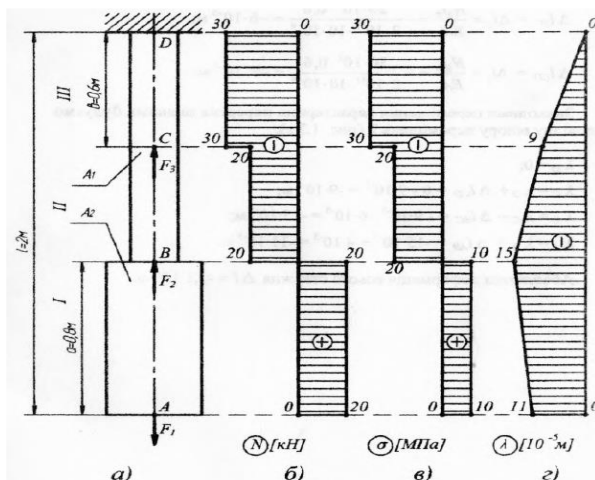


Рис. 1.3.

5. Визначення абсолютних деформацій окремих ділянок і всього стержня.

За формулою закону Гука (1.6) знаходимо абсолютні деформації кожної з характерних ділянок Δl_i .

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l_{BC} = \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -6 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l_{CD} = \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = -\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -9 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Знаходимо переміщення характерних перерізів за якими будуюмо відповідну епюру переміщень λ (рис. 1.3 г).

$$\lambda_D = 0;$$

$$\lambda_C = \lambda_D + \Delta l_{CD} = 0 - 9 \cdot 10^{-5} = -9 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\lambda_B = \lambda_C + \Delta l_{BC} = -9 \cdot 10^{-5} - 6 \cdot 10^{-5} = -15 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\lambda_A = \lambda_B + \Delta l_{AB} = -15 \cdot 10^{-5} + 4 \cdot 10^{-5} = -11 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Абсолютна деформація всього стержня $\Delta l = -1,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення розтягання, стискання стержня.
2. Внутрішні сили та напруження при розтяганні, стисканні.

3. Умова міцності при розтяганні, стисканні.
4. Основні види розрахунків на міцність.
5. Закон Гука для розтягання, стискання.
6. Абсолютні поздовжні деформації при розтяганні-стисканні.
7. Послідовність побудови епюр поздовжніх сил.
8. Послідовність побудови епюр нормальних напружень.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розрахунок на міцність ступінчастого стержня при розтяганні-стисканні

А. Спроекувати ступінчастий стержень з круглим поперечним перерізом.

Власну вагу стержня не враховувати (рис.1.4, табл. 1.1). Взяти $l=2$ м, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Таблиця 1.1

Варіант	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$
0	-50	10	-40	0,1	0,6
1	40	-20	50	0,2	0,7
2	-30	30	-10	0,3	0,8
3	20	-40	-20	0,4	0,9
4	-10	50	-30	0,5	1,0
5	50	-10	40	0,1	1,1
6	-40	20	-50	0,2	1,2
7	30	-30	10	0,3	1,3
8	-20	40	-20	0,4	1,4
9	10	-50	30	0,5	1,5

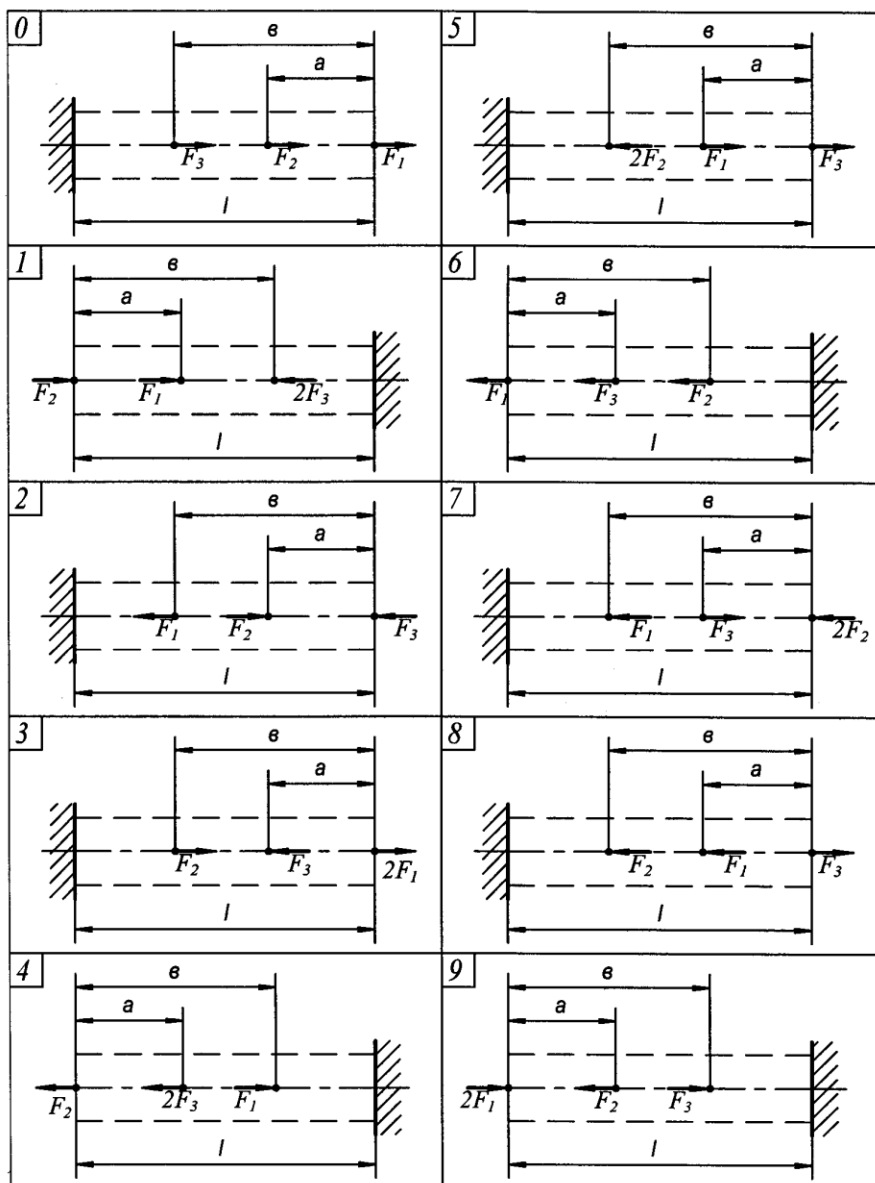


Рис. 1.4

Б. Перевірити міцність ступінчастого стержня (рис. 1.5, табл. 1.2) і визначити повну його деформацію, якщо $A_1 = 10 \text{ см}^2$; $A_2 = 2A_1$, $l = 2 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Таблиця 1.2

Варіант	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$
0	-35	15	5	1,0	0,5
1	30	5	12	1,1	0,6
2	25	-20	15	1,2	0,5
3	-20	15	-10	1,3	1,7
4	-18	15	20	1,4	1,8
5	10	20	15	1,5	1,9
6	12	-10	25	1,6	1,0
7	15	-20	10	1,7	1,1
8	20	-12	8	1,0	0,4
9	25	-10	5	1,1	0,3

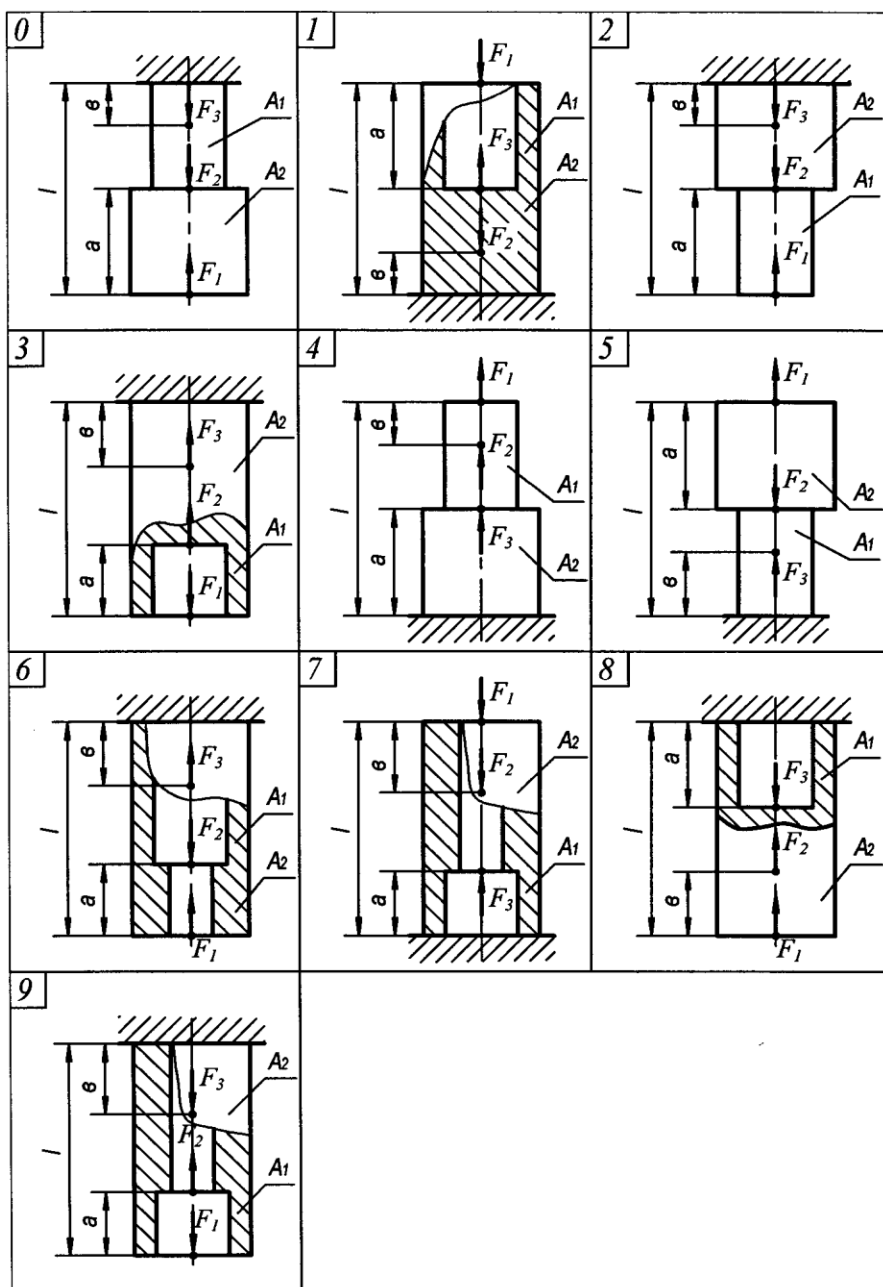


Рис. 1.5.

II. РОЗРАХУНОК ВАЛУ НА КРУЧЕННЯ ОСНОВНІ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Крученням стержня називають такий вид його деформації, коли в поперечних перерізах виникає один внутрішній силовий фактор – крутний момент T_k .

Стержні, що працюють на кручення називають валами.

Кручення валу здійснюється зовнішніми крутильними моментами, що діють у площинах перпендикулярних до його осі.

Для знаходження величини крутних моментів користуються методом перерізів.

Крутний момент T_k в довільному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі крутильних моментів, що прикладені до стержня з одного боку від перерізу.

Для знаходження крутного моменту в перерізі користуються рівнянням статки

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0.$$

Вісь x співпадає з віссю валу.

При розрахунках на міцність і жорсткість валів знак крутного момент, не відіграє ніякої ролі. Однак, для зручності побудови епюр крутних моментів T_k , приймають таке правило знаків: крутний момент вважають додатним якщо дивлячись в торець відсіченої частини стержня він направлений за годинниковою стрілкою (рис. 2.1).

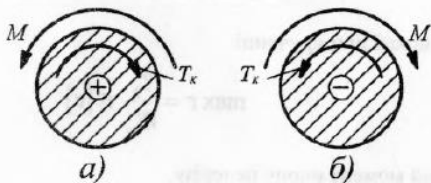


Рис. 2.1.

Дотичні напруження в поперечних перерізах валу визначають за формулою

$$\tau = \frac{T_k}{I_p} \rho.$$

де T_k – величина крутного моменту;

I_p – полярний момент інерції круглого перерізу;

ρ – відстань від центра перерізу до точки в якій шукають напруження.

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (2.2)$$

де d – діаметр валу.

Епюри розподілу дотичних напружень в круглому, кільцевому та квадратному перерізах показано на рис. 2.2, а, б, в відповідно.

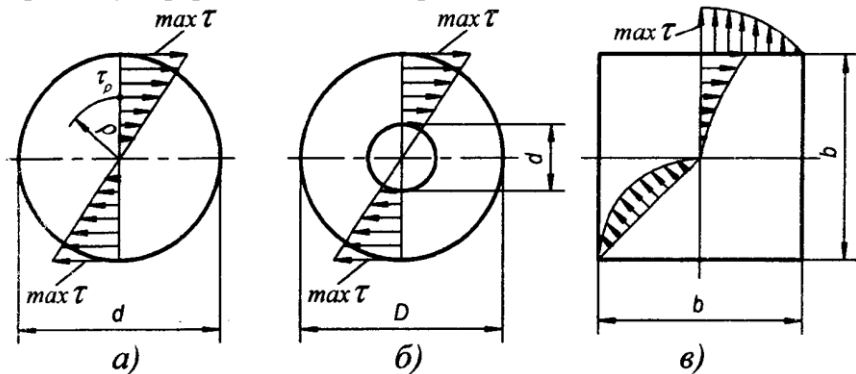


Рис. 2.2.

Розрахунки валів на міцність

Умова міцності при крученні

$$\max \tau = \frac{T_k}{W_p} \leq [\tau] \quad (2.3)$$

де W_p – полярний момент опору перерізу.

Підставивши в умову міцності (2.3) значення полярного моменту

опору $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ отримаємо вираз для підбору діаметра d круглого валу:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 T_k}{\pi [\tau]}} \quad (2.4)$$

Для кільцевого перерізу полярний момент інерції:

$$I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad (2.5)$$

З умови міцності для кільцевого перерізу

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 T_k}{\pi [\tau] (1 - \alpha^4)}}, \quad (2.6)$$

де D – зовнішній діаметр кільця;

d – внутрішній діаметр;

$\alpha = \frac{d}{D}$ відношення внутрішнього діаметра до зовнішнього.

Полярний момент опору кільцевого перерізу

$$W_p = \frac{2I_p}{D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \quad (2.7)$$

Відносний кут закручування характерної ділянки

$$\theta = \frac{T_k}{GI_p} \quad (2.8)$$

Абсолютний кут закручування

$$\varphi = \frac{T_k l}{GI_p} \quad (2.9)$$

де T_k – крутний момент на характерній ділянці;

l – довжина ділянки;

G – модуль пружності другого роду;

I_p – полярний момент інерції перерізу.

Розрахунки валів на жорсткість

Визначивши розміри валу з умови міцності, вал перевіряють на жорсткість.

Умова жорсткості полягає в порівнянні кута закручування, віднесеного до довжини валу θ із допустимим кутом закручування $[\theta]$. З врахування формули (2.8)

$$\theta = \frac{T_k}{GI_p} \leq [\theta], \quad (2.10)$$

де $\theta = \frac{\varphi}{l}$

Допустиму відносну жорсткість валу, яка характеризується відносним кутом закручування $[\theta]$, вибирають залежно від умов навантаження. Так при статичному навантаженні $[\theta] = (0,3 \div 0,5) \frac{\text{град}}{\text{м}}$, при змінних навантаженнях $[\theta] = 0,25 \frac{\text{град}}{\text{м}}$, а при миттєвих (ударних) навантаженнях $[\theta] = 0,15 \frac{\text{град}}{\text{м}}$.

Оскільки значення допустимих кутів закручування $[\theta]$ найчастіше задаються в градусах, то перейшовши у формулі (2.10) до градусів, умову жорсткості одержуємо у вигляді

$$\frac{180^{\circ} T_k}{\pi G I_p} \leq [\theta]. \quad (2.11)$$

Підставивши у цю формулу вираз полярного моменту інерції, знайдемо, що розрахункова формула для визначення діаметра валу

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 T_k 180^{\circ}}{G \pi^2 [\theta]}}. \quad (2.12)$$

Для валу кільцевого поперечного перерізу зовнішній діаметр

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 T_k 180^{\circ}}{G \pi^2 [\theta] (1 - \alpha^4)}}. \quad (2.13)$$

Якщо при розрахунку валу потужність N , яка ним передається, завдана у кіловатах (κBm), а частота обертання ω (сек⁻¹), то крутильний момент, що прикладений до валу

$$M_k = \frac{N}{\omega} = \dots (\kappa H \cdot m). \quad (2.14)$$

Розрахунок стержнів прямокутного перерізу

У випадку кручення стержнів прямокутного поперечного перерізу максимальні дотичні напруження виникають біля поверхні посередині довгих сторін і напружені по дотичній до контуру.

Найбільші дотичні напруження, відносні та повні кути закручування за аналогією з крученням стержнів круглого перерізу визначають за формулами:

$$\max \tau = \frac{T_k}{W_k}; \quad (2.15)$$

$$\theta = \frac{T_k}{G I_k}; \quad (2.16)$$

$$\varphi = \frac{T_k l}{G I_k}. \quad (2.17)$$

Умови міцності та жорсткості при крученні стержнів прямокутного перерізу

$$\max \tau = \frac{T_k}{\alpha h b^2} \leq [\tau]; \quad (2.18)$$

$$\theta = \frac{T_k}{\beta h b^3 G} \leq [\theta]. \quad (2.19)$$

Для стержнів прямокутного перерізу

$$W_k = \alpha h b^2; \quad I_k = \beta h b^3, \quad (2.20)$$

де W_k – момент опору при крученні;

I_k – момент інерції при крученні.

У формулах (2.20): h – довга сторона перерізу, b – коротка його сторона; α, β – коефіцієнти, що залежать від співвідношення сторін h і b (їх значення вибирають з таблиць).

Зокрема, для квадратного перерізу при $h=b$; $\alpha = 0,208$; $\beta = 0,141$.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Для заданого валу визначити його розміри на кожній ділянці. Побудувати епюру кутів повороту перерізів валу. Прийняти $a = 0,5$ м; $[\theta] = 0,5$ град/м.

Визначити розміри поперечного перерізу валу на третій ділянці, вважаючи що він виконаний квадратним і трубчастим з відношенням діаметрів $\frac{d}{D} = 0,5$. Порівняти витрати матеріалу на один метр погонний валу різного профілю, якщо: $N_1 = 10$ кВт; $N_2 = 30$ кВт; $N_3 = 20$ кВт; $N_4 = 40$ кВт; $\omega = 20$ сек⁻¹; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau] = 80$ МПа.

План розв'язання задачі

1. Накреслити розрахункову схему відповідно до даних умови задачі.

2. Визначити кількість характерних ділянок і позначити їх.

3. Обчислити крутильні моменти і побудувати епюру крутих моментів.

4. Визначити діаметри окремих ділянок валу з умови міцності і жорсткості, округливши їх величини до стандартних значень в більший бік.

5. Накреслити ескіз валу і проставити розміри.

6. За формулою із закону Гука для кручення визначити величину кутів закручування окремих ділянок і всього валу.

7. Побудувати за цими даними епюру кутів повороту перерізів, приймаючи за нерухомий лівий кінець валу.

8. Визначити з умови міцності та жорсткості розміри квадратного і трубчастого валів з відношення діаметрів $\frac{d}{D} = 0,5$ на третій характерній ділянці.

9. Порівняти витрати матеріалів для круглого суцільного, трубчастого і квадратного валів.

Розв'язання

1. За даними умови задачі накреслимо розрахункову схему (рис. 2.3, а).

2. Визначимо кількість і позначимо характерні ділянки.

Вал має шість характерних ділянок, позначаємо їх (рис. 2.3, а).

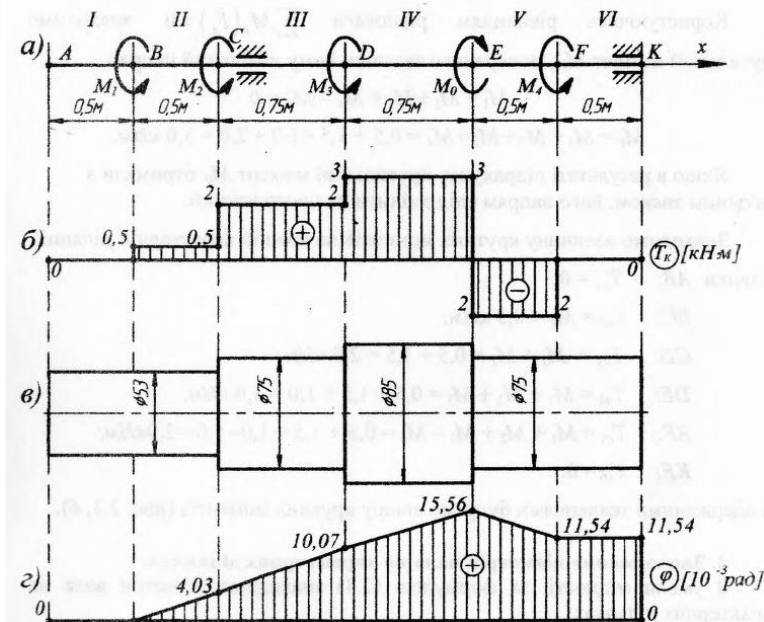


Рис. 2.3.

3. Визначення крутильних моментів, побудова епюр крутих моментів

За формулою (2.14) визначимо крутильні моменти, що передаються шківками:

$$M_1 = \frac{N_1}{\omega} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ kNm};$$

$$M_2 = \frac{N_2}{\omega} = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ kNm};$$

$$M_3 = \frac{N_3}{\omega} = \frac{20}{20} = 1,0 \text{ kNm};$$

$$M_4 = \frac{N_4}{\omega} = \frac{40}{20} = 2,0 \text{ kNm}.$$

Користуючись рівнянням рівноваги $\sum M_x(\bar{F}_i) = 0$ знаходимо крутний момент M_0 , попередньо задавши йому довільний напрям.

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 - M_0 = 0$$

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0,5 + 1,5 + 1,0 + 2,0 = 5,0 \text{ кНм.}$$

Якщо в результаті підрахунку крутильний момент M_0 отримали з від'ємним знаком, його напрям необхідно змінити на протилежний.

Знаходимо величину крутних моментів на кожній характерній ділянці.

Ділянки

$$AB: T_{\kappa 1} = 0;$$

$$BC: T_{\kappa 2} = M_1 = 0,5 \text{ кНм};$$

$$CE: T_{\kappa 3} = M_1 + M_2 = 0,5 + 1,5 = 2,0 \text{ кНм};$$

$$DE: T_{\kappa 4} = M_1 + M_2 + M_3 = 0,5 + 1,5 + 1,0 = 3,0 \text{ кНм};$$

$$EF: T_{\kappa 5} = M_1 + M_2 + M_3 - M_0 = 0,5 + 1,5 + 1,0 - 5,0 = -2,0 \text{ кНм};$$

$$KF: T_{\kappa 6} = 0.$$

За одержаними значеннями будуємо епюру крутних моментів (рис. 2.3, б).

4. Знаходження діаметрів валу на характерних ділянках.

З умови міцності, за формулою (2.4) знаходимо діаметри валу на характерних ділянках:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\kappa 1}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0;$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\kappa 2}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0317 \text{ м} = 31,7 \text{ мм};$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\kappa 3}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,0 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0503 \text{ м} = 50,3 \text{ мм};$$

$$d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\kappa 4}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3,0 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,05759 \text{ м} = 57,6 \text{ мм};$$

$$d_5 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\kappa 5}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,0 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0503 \text{ м} = 50,3 \text{ мм};$$

$$d_6 \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\kappa 6}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0.$$

З умови жорсткості, за формулою (2.12) знаходимо діаметри валу на характерних ділянках:

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{k1}180^0}{G\pi^2[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0 \cdot 180^0}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi^2 \cdot 0,5}} = 0;$$

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{k2}180^0}{G\pi^2[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,5 \cdot 10^3 \cdot 180^0}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi^2 \cdot 0,5}} = 0,052 \text{ м} = 52 \text{ мм};$$

$$d_3 \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{k3}180^0}{G\pi^2[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2,0 \cdot 10^3 \cdot 180^0}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi^2 \cdot 0,5}} = 0,0736 \text{ м} = 73,6 \text{ мм};$$

$$d_4 \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{k4}180^0}{G\pi^2[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 3,0 \cdot 10^3 \cdot 180^0}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi^2 \cdot 0,5}} = 0,0814 \text{ м} = 81,4 \text{ мм};$$

$$d_5 \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{k5}180^0}{G\pi^2[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2,0 \cdot 10^3 \cdot 180^0}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi^2 \cdot 0,5}} = 0,0736 \text{ м} = 73,6 \text{ мм};$$

$$d_6 \geq \sqrt[4]{\frac{32T_{k6}180^0}{G\pi^2[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0 \cdot 180^0}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi^2 \cdot 0,5}} = 0.$$

Заокруглюємо величини діаметрів до стандартних значень згідно з додатком 5.

Порівняємо діаметри валу, підраховані за умовою міцності та жорсткості у вигляді таблиці.

Діаметр валу, мм	Умова міцності	Умова жорсткості
d_1^*	32	53
d_2	32	53
d_3	53	75
d_4	60	85
d_5	53	75
d_6^*	53	75

В кінцевому варіанті із двох величин діаметрів вибираємо більше значення, тобто з умови жорсткості.

Примітка. На 1-й та 6-й ділянках вибираємо величину діаметра суміжних ділянок.

5. За одержаними значеннями діаметрів накреслимо ескіз валу (рис. 2.3, в).

6. Знаходження кутів закручування характерних ділянок.

За формулою закону Гука для кручення (2.9) визначаємо величину кутів закручування окремих ділянок і всього валу.

Ділянки

$$AB: \quad \varphi_{AB} = \frac{32T_{\kappa 1} l_1}{G \pi d_1^4} = \frac{32 \cdot 0 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (53 \cdot 10^{-3})^4} = 0;$$

$$BC: \quad \varphi_{BC} = \frac{32T_{\kappa 2} l_2}{G \pi d_2^4} = \frac{32 \cdot 0,5 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (53 \cdot 10^{-3})^4} = 4,03 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$CD: \quad \varphi_{CD} = \frac{32T_{\kappa 3} l_3}{G \pi d_3^4} = \frac{32 \cdot 2,0 \cdot 10^3 \cdot 0,75}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (75 \cdot 10^{-3})^4} = 6,04 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$DE: \quad \varphi_{DE} = \frac{32T_{\kappa 4} l_4}{G \pi d_4^4} = \frac{32 \cdot 3,0 \cdot 10^3 \cdot 0,75}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (85 \cdot 10^{-3})^4} = 5,49 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$EF: \quad \varphi_{EF} = \frac{32T_{\kappa 5} l_5}{G \pi d_5^4} = - \frac{32 \cdot 2,0 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (75 \cdot 10^{-3})^4} = - 4,02 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$KF: \quad \varphi_{KF} = \frac{32T_{\kappa 6} l_6}{G \pi d_6^4} = \frac{32 \cdot 0 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (75 \cdot 10^{-3})^4} = 0.$$

7. Приймаємо за нерухомий лівий кінець валу і визначаємо взаємні кути повороту перерізів.

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0;$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} = 0 + 4,03 \cdot 10^{-3} = 4,03 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{CD} = 4,03 \cdot 10^{-3} + 6,04 \cdot 10^{-3} = 10,07 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{DE} = 10,07 \cdot 10^{-3} + 5,49 \cdot 10^{-3} = 15,56 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_F = \varphi_E + \varphi_{EF} = 15,56 \cdot 10^{-3} - 4,02 \cdot 10^{-3} = 11,54 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_K = \varphi_F + \varphi_{FK} = 11,54 \cdot 10^{-3} + 0 = 11,54 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

За одержаними значеннями будуємо епюру кутів закручування (рис. 2.3, г).

Кут закручування всього валу $\varphi_K = 1,15 \cdot 10^{-2}$ рад.

8. Розрахунок валів квадратного та трубчастого поперечного перерізу.

8.1. Розрахунок валу квадратного поперечного перерізу.

За формулами (2.18), (2.19) визначаємо розміри квадратного валу на третій характерній ділянці.

Для квадратного перерізу $h = b$, тому за формулою (2.18)

$$\frac{T_{k3}}{\alpha b^3} \leq [\tau].$$

Сторона квадрата за умови міцності:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{T_k}{\alpha [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{2,0 \cdot 10^3}{0,208 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0494 \text{ м} = 49,4 \text{ мм}$$

Округливши одержану величину до стандартної в більшу сторону виберемо сторону квадрата $b = 50 \text{ мм}$.

За формулою умови жорсткості (2.19), враховуючи, що $[\theta] = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}}$

$$\frac{T_k 180^0}{\pi \beta b^4 G} \leq [\theta],$$

сторона квадрата

$$b \geq \sqrt[4]{\frac{T_k 180^0}{\beta \pi [\theta] G}} = \sqrt[4]{\frac{2,0 \cdot 10^3 \cdot 180^0}{0,141 \cdot \pi \cdot 0,5 \cdot 8 \cdot 10^{10}}} = 0,0671 \text{ м} = 67,1 \text{ мм}.$$

В кінцевому результаті, округливши одержану величину до стандартної в більшу сторону, виберемо сторону квадрата $b = 71 \text{ мм}$.

8.2. Розрахунок валу трубчастого поперечного перерізу.

Виберемо розміри трубчастого перерізу з співвідношенням діаметрів

$$\alpha = \frac{d}{D} = 0,5.$$

З умови міцності, за формулою (2.6) знаходимо діаметр валу на третій характерній ділянці:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 T_k}{\pi [\tau] (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,0 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,5^4)}} = 0,0514 \text{ м} = 51,4 \text{ мм}.$$

Округливши одержану величину до стандартної в більшу сторону, виберемо $B = 53 \text{ мм}$.

З умови жорсткості за формулою (2.13):

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32T \cdot 180^0}{G\pi^2[\theta](1-\alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 180^0}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi^2 \cdot 0,5 \cdot (1-0,5^4)}} = 74,7 \text{ мм.}$$

Округливши одержану величину до стандартної в більший бік, остаточно вибираємо $D = 75 \text{ мм.}$

Внутрішній діаметр трубчастого перерізу

$$d = a D = 0,5 \cdot 75 = 37,5 \text{ мм.}$$

9. Порівняємо витрати матеріалів для круглого суцільного перерізу, трубчастого і квадратного валів.

Витрати матеріалу на 1 метр довжини валу залежать від площі поперечного перерізу.

Для круглого суцільного валу

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (75 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 4,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Для квадратного перерізу

$$A = b^2 = (71 \cdot 10^{-3})^2 = 5,04 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Для трубчастого перерізу

$$A = \frac{\pi D^2(1-\alpha^2)}{4} = \frac{\pi(75 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (1-0,5^2)}{4} = 3,31 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

З одержаних значень робимо висновок, що найменших витрат матеріалу на один погонний метр довжини має вал трубчастого поперечного перерізу, за ним круглого і квадратного поперечних перерізів у співвідношенні:

$$A_{тр} : A_{кр} : A_{кв} = 1 : 1,34 : 1,52,$$

де $A_{тр}$ – площа трубчастого перерізу;

$A_{кр}$ – площа круглого перерізу;

$A_{кв}$ – площа квадратного перерізу.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Визначення деформації кручення.
2. Крутний момент при крученні валу.
3. Побудова епюр крутних моментів.

4. Які напруження виникають при крученні?
5. Умова міцності при крученні.
6. Умова жорсткості при крученні.
7. Умови міцності та жорсткості при крученні стержнів прямокутного перерізу

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розрахунок валу на кручення

Для заданого валу (рис. 2.4 табл. 2.1) визначити його розміри на кожній ділянці. Побудувати епюру кутів повороту перерізів валу. Прийняти $a = 0,5$ м; $[\Theta] = 0,5$ град/м. $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau] = 80$ МПа.

Визначити розміри поперечного перерізу валу на третій ділянці, вважаючи що він виконаний квадратним і трубчастим з

$$\frac{d}{D} = 0,5.$$

відношенням діаметрів D . Порівняти витрати матеріалу на один метр погонний валу різного профілю.

Таблиця 2.1

Варіант	N_1 , κBm	N_2 , κBm	N_3 , κBm	N_4 , κBm	ω , рад/с
0	10	40	40	60	10
1	40	30	20	10	20
2	50	15	30	25	10
3	15	15	20	25	30
4	20	10	15	45	20
5	30	10	20	40	50
6	10	20	30	40	10
7	40	25	20	45	75
8	15	25	20	30	60
9	35	25	25	50	40

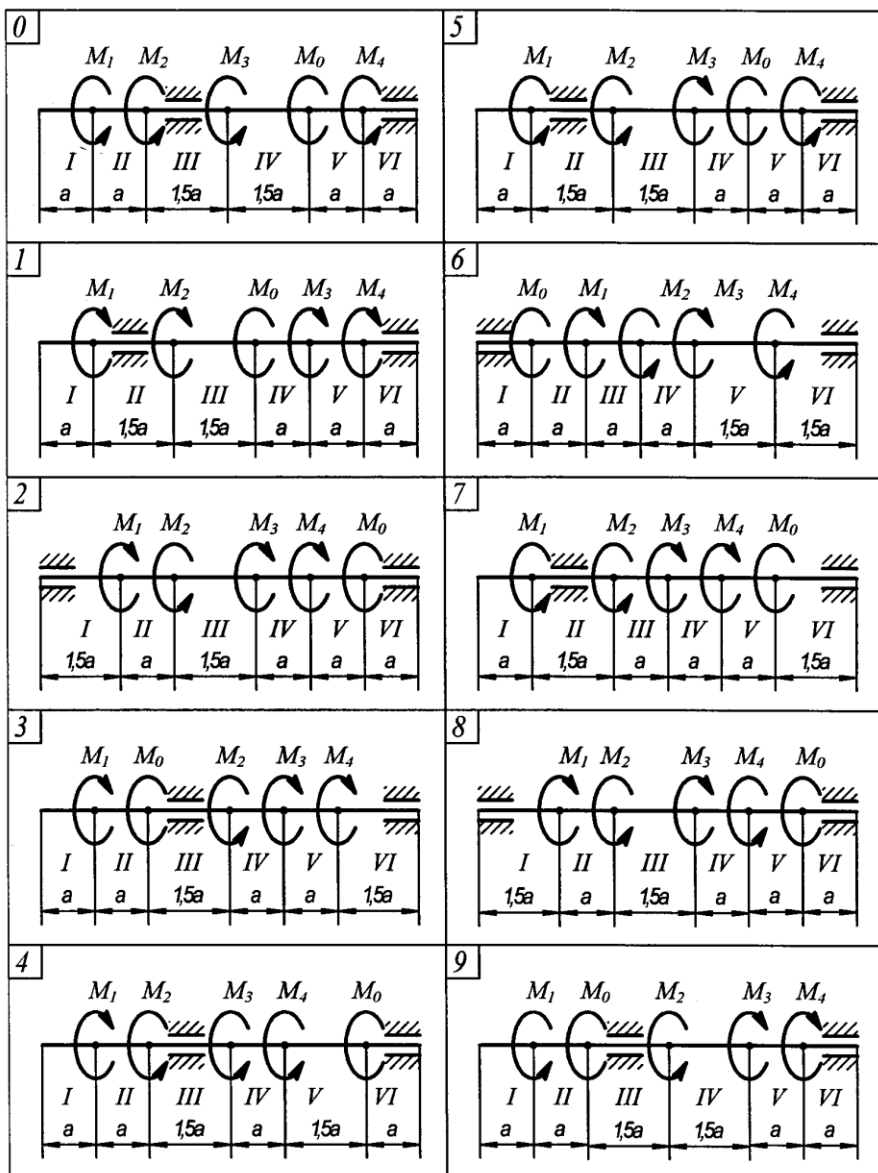


Рис. 2.4

ІІІ. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ШАРНІРНО-ОПЕРТОЇ БАЛКИ ПРИ ЗГИНІ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Прямим поперечним згином стержня називають такий вид деформації, коли в поперечних перерізах виникають два внутрішні силові фактори: поперечна сила та згинальний момент M .

Стержні, що працюють на згин називають балками.

Якщо по довжині балки згинальний момент $M = \text{const}$, то такий згин називають класичним, поперечна сила при цьому $Q = 0$.

Поперечна сила $Q(x)$ в довільному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вертикальну вісь у зовнішніх сил, що знаходяться по один бік від перерізу, взятих із знаком „+”, якщо сила направлена *вгору* зліва від перерізу, або *вниз* справа від перерізу.

Згинальний момент $M(x)$ у довільному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх силових факторів відносно осі z по одну сторону від перерізу взятих із знаком „+”, якщо момент направлений за стрілкою годинника зліва від перерізу або проти годинникової стрілки справа від перерізу.

Правила знаків для $Q(x)$ і $M(x)$ схематично показані на рис. 3.1, *а*, *б* відповідно.

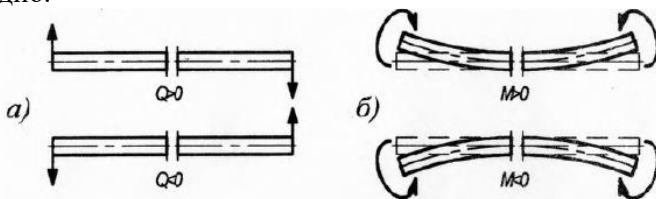


Рис. 3.1.

Між згинальним моментом $M(x)$, поперечною силою $Q(x)$ та інтенсивністю розподіленого навантаження q існують диференціальні залежності:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad (3.1)$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q, \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q. \quad (3.3)$$

Ці залежності дозволяють сформулювати такі правила для перевірки або побудови епюр.

1. На ділянках балки, де відсутнє розподілене навантаження ($q=0$) $Q(x)$ – стала величина, а $M(x)$ – лінійна функція.

2. На ділянках балки, де прикладене рівномірно розподілене навантаження ($q=const$), поперечна сила $Q(x)$ – лінійна функція, а згинальний момент $M(x)$ – квадратична парабола.

3. На ділянках балки, де поперечна сила $Q(x)>0$, згинальний момент $M(x)$ – зростає, а там де $Q(x) < 0$, $M(x)$ – зменшується.

4. У перерізі балки, в якому поперечна сила $Q(x)=0$, згинальний момент $M(x)$ набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

5. На ділянці балки, де $Q(x) = 0$, згинальний момент $M(x)=const$. В цьому випадку ділянка балки знаходиться в стані класичного згину.

6. У перерізі балки, в якому прикладена зосереджена сила, епюр $Q(x)$ має стрибок на величину цієї сили в напрямі її дії, а епюра $M(x)$ має злам у сторону дії цієї сили.

7. У перерізі балки, в якому діє зосереджений момент, епюра $M(y)$ має стрибок на величину моменту пари сил.

Нормальні напруження при чистому згині балки

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y \quad (3.4)$$

де M_z – згинальний момент;

I_z – осьовий момент інерції перерізу;

y – ордината точки, в якій визначається напруження.

Епюра розподілу нормальних напружень в перерізі показана на рис. 3.2.

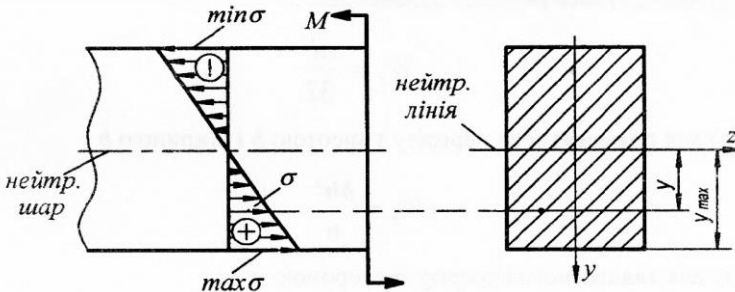


Рис. 3.2.

Напруження σ вважають додатним у розтягнених і від'ємним у стиснених волокнах балки.

У симетричному відносно нейтральної осі z перерізі максимальні за абсолютною величиною напруження виникають у верхніх або нижніх точках перерізу (при $y=y_{\max}$), що найбільш віддалені від нейтральної осі z .

Якщо врахувати, що осьовий момент опору

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad (3.5)$$

то максимальні нормальні напруження

$$\max \sigma = \frac{M_z}{I_z} y_{\max} = \frac{M_z}{W_z}. \quad (3.6)$$

Умова міцності балки при згині

$$\frac{\max M_z}{W_z} \leq [\sigma] \quad (3.7)$$

При проектувальному розрахунку з умови міцності знаходять осьовий момент опору перерізу

$$W_z \geq \frac{\max M_z}{[\sigma]} \quad (3.8)$$

Для найбільш поширених простих перерізів осьовий момент опору дорівнює:

а) для прокатних профілів (двотавра, швелера, кутника) момент опору знаходять із таблиць сортаменту;

б) для круглого перерізу з діаметром d

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \quad (3.9)$$

в) для прямокутного перерізу з висотою h і шириною b

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \quad (3.10)$$

г) для квадратного перерізу із стороною a

$$W_z = \frac{a^3}{6}, \quad (3.11)$$

д) для кільцевого перерізу з зовнішнім діаметром D і внутрішнім d при $(d/D = a)$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \quad (3.12)$$

Визначивши необхідний мінімальний момент опору балки W_z за формулою (3.8) і вибравши відповідну форму профілю перерізу, підбирають його розміри.

Визначення переміщень балки при згині

Прогином балки w в даному перерізі називають переміщення його центра маси в напрямі перпендикулярному до недеформованої осі балки.

Найбільший прогин балки називається стрілою прогину і позначається літерою f .

Кут θ , на який переріз повертається відносно свого початкового положення, називається кутом повороту перерізу.

Крім розрахунку балок на міцність, виконують розрахунки на жорсткість.

Умова розрахунку на жорсткість має вигляд:

$$\max w \leq [f] \quad (3.13)$$

де $[f] \sim$ допустимий прогин.

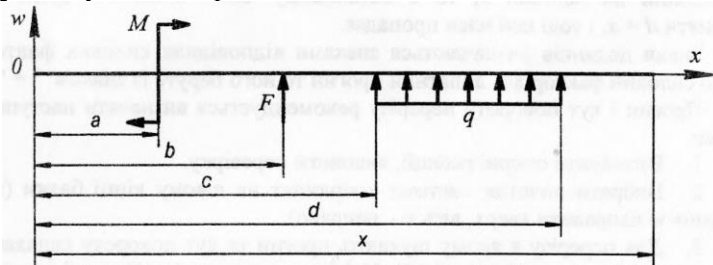


Рис. 3.3.

Універсальне рівняння пружної лінії для схеми, зображеної на рис. 3.3

$$EI_z w(x) = EI_z w_0 + EI_z \theta_0 x + \sum \frac{M(x-a)^2}{2!} + \sum \frac{F(x-b)^3}{3!} + \sum \frac{q(x-c)^4}{4!} - \sum \frac{q(x-d)^4}{4!} \quad (3.14)$$

Рівняння кутів повороту отримують з універсального рівняння зігнутої осі балки (3.14) шляхом його диференціювання:

$$EI_z \theta(x) = EI_z \theta_0 + \sum \frac{M(x-a)}{1!} + \sum \frac{F(x-b)^2}{2!} + \sum \frac{q(x-c)^3}{3!} - \sum \frac{q(x-d)^3}{3!} \quad (3.15)$$

де w_0, θ_0 – відповідно прогин та кут повороту в початку координат (лівий кінець балки); ці величини називають геометричними початковими параметрами;

E – модуль пружності першого роду, модуль Юнга;

E_z – жорсткість поперечного перерізу при згині;

M, F, q – зовнішні силові фактори, що прикладені до балки;

x – відстань від початку координат до перерізу в якому шукають прогин або кут повороту;

$(x-a), (x-b), (x-c), (x-d)$ – відповідно відстані до силових факторів M, F, q від перерізу в якому шукають прогин або кут повороту.

У рівняння (3.14) та (3.15) підставляють тільки ті навантаження, які прикладені ліворуч від розглядуваного перерізу.

Якщо розподілене навантаження q доходить до перерізу, що проведений на відстані x , то в останньому члені останньої суми потрібно прийняти $d=x$, і тоді цей член пропадає.

Знаки доданків визначаються знаками відповідних силових факторів (якщо силовий фактор дає додатний прогин то його беруть із знаком "+").

Прогин і кут повороту перерізу рекомендується визначати таким чином:

1. Визначити опорні реакції, виконати перевірку.
2. Вибрати початок системи координат на лівому кінці балки (вісь прогинів w направити вгору, вісь x – направо).
3. Для перерізу в якому шукають прогин та кут повороту складають універсальні формули (3.14), (3.15). У формули повинні увійти всі зовнішні силові фактори, які лежать зліва від перерізу із додатним знаком, якщо вони викликають додатний прогин і від'ємним в протилежному випадку.

4. Геометричні початкові параметри w_0, θ_0 знаходять з граничних умов (умов закріплення балки).

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Для сталеві балки дібрати двотавровий, круглий і прямокутний (з відношенням сторін $h/b = 2$) переріз. Порівняти масу одного метра довжини кожного профілю.

Для двотаврового перерізу визначити прогин посередині прогону і кут повороту перерізу на правій опорі, якщо $[\sigma]=160$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $q=10$ кН/м; $F = 15$ кН; $M = 20$ кНм.

План розв'язання задачі

1. Накреслити розрахункову схему відповідно до даних умови задачі.
2. Скласти рівняння рівноваги та визначити опорні реакції. Виконати перевірку.
3. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, для чого
 - визначити кількість характерних ділянок і позначити їх;
 - для кожної характерної ділянки балки записати вирази $Q(x)$ і $M(x)$, підрахувати їх значення в характерних перерізах, за якими побудувати епюру поперечних сил $Q(x)$ і згинальних моментів $M(x)$;
 - перевірити побудовані епюри за допомогою диференціальних залежностей (3.1-3.3).
4. Користуючись основною умовою міцності, визначити необхідне значення осевого моменту опору W_z .
5. Підібрати розміри двотаврового, круглого і прямокутного перерізів.
6. Порівняти масу одного погонного метра довжини кожного профілю, вважаючи, що матеріал для всіх профілів однаковий.
7. Для двотаврової балки визначити вказані в умові задачі переміщення.

Розв'язання

1. Відповідно до даних умови задачі накреслимо розрахункову схему (рис. 3.4, а).

2. Визначення опорних реакцій.

Для визначення опорних реакцій складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_k) &= 0; & Y_B \cdot 4 - F \cdot 1 - M - q \cdot 3 \cdot 3,5 &= 0, \\ \sum M_A(\vec{F}_k) &= 0; & Y_B \cdot 4 - F \cdot 1 - M - q \cdot 3 \cdot 3,5 &= 0, \\ \sum M_B(\vec{F}_k) &= 0; & -Y_A \cdot 4 + F \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 - M &= 0. \end{aligned}$$

$$Y_A = \frac{45 + 20 - 5 - 20}{4} = 10 \text{ кН}$$

Перевірка:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - F - q \cdot 3 = 10 + 35 - 15 - 30 = 0$$

Отже реакції опор знайдені вірно.

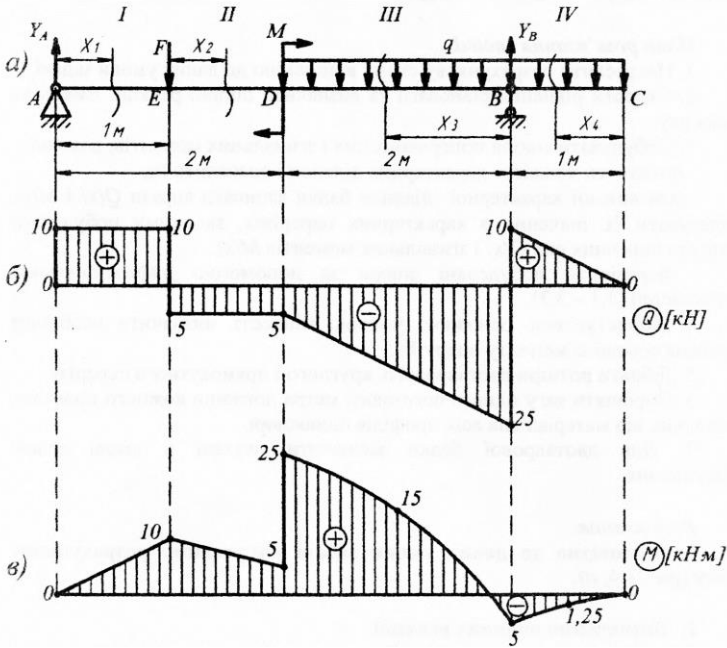


Рис. 3.4.

3. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів.

Балка має чотири характерних ділянки, позначимо їх.

На кожній з характерних ділянок у довільних перерізах запишемо вирази для $Q(x)$ і $M(x)$ та обчислюємо їх значення у характерних перерізах.

Для ділянки AE:

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м};$$

$$Q_1 = Y_A = 10 \text{ кН};$$

$$M_1 = Y_A \cdot x_1 = 10x_1; \quad \text{при } x_1 = 0; \quad M_1 = 0;$$

$$x_1 = 1 \text{ м}; \quad M_1 = 10 \text{ кНм}.$$

Для ділянки ED:

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м};$$

$$\text{при } x_2 = 0; \quad M_1 = 10 \text{ кНм};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}; \quad M_2 = 5 \text{ кНм}.$$

Для ділянки CB :

$$Q_4 = qx_4 = 10x_4; \quad \text{при } x_4 = 0; \quad Q_4 = 0;$$

$$x_4 = 1\text{м}; \quad Q_4 = 10 \text{ кН};$$

$$M_4 = -\frac{qx_4^2}{2} = -5x_4^2; \quad \text{при } x_4 = 0; \quad M_4 = 0;$$

$$x_4 = 0,5 \text{ м}; \quad M_4 = -1,25 \text{ кНм};$$

$$x_4 = 1\text{м}; \quad M_4 = -5 \text{ кНм}.$$

Для ділянки BD :

$$0 \leq x_3 \leq 2\text{м};$$

$$Q_3 = q(1 + x_3) - Y_B = 10(1 + x_3) - 35;$$

при: $x_3 = 0; \quad Q_3 = -25 \text{ кН};$

$$x_3 = 2\text{м}; \quad Q_3 = 10 \cdot (1 + 2) - 35 = -5 \text{ кН};$$

$$M_3 = -\frac{q \cdot (1 + x_3)^2}{2} + Y_B \cdot x_3 = -5 \cdot (1 + x_3)^2 + 35 \cdot x_3;$$

при $x_3 = 0; \quad M_3 = 0;$

$$x_3 = 1\text{м}; \quad M_3 = 15 \text{ кНм};$$

$$x_3 = 2\text{м}; \quad M_3 = 25 \text{ кНм}.$$

За одержаними значеннями будуємо епюри $Q(x)$ та $M(x)$. Епюри $Q(x)$ та $M(x)$ показані на рис. 3.4, б, в. Ординати епюри $M(x)$ відкладені з боку стиснутих волокон.

Використовуючи для контролю диференціальні залежності (1)-(3) перевіряємо правильність побудованих епюр.

На ділянках AE та ED відсутнє розподілене навантаження тому на цих ділянках $Q(x) = \text{const}$, а $M(x)$ – лінійна функція.

На ділянках DB та BC є розподілене навантаження q , тому на цих ділянках $Q(x)$ – лінійна функція, а $M(x)$ – квадратична парабола.

На ділянках AE та BC поперечна сила $Q(x)$ додатна, тому згинальний момент $M(x)$ зростає зліва направо. На ділянках ED та BD поперечна сила $Q(x)$ від’ємна, тому згинальний момент $M(x)$ зменшується.

У точках A, B, E до балки прикладені зосереджені сили $Y_A = 10 \text{ кН}$, $Y_B = 35 \text{ кН}$, $F = 15 \text{ кН}$. В цих точках епюра $Q(x)$ має стрибки на величину цих сил у напрямі їх дії.

У точці D балки прикладена пара сил з моментом $M = 20 \text{ кНм}$, тому в цій точці епюра $M(x)$ має стрибок на величину моменту.

4. Знаходження осевого моменту опору перерізу.

З умови міцності при згині (3.7) знаходимо осевий момент опору:

$$W_z \geq \frac{\max M_z}{[\sigma]} = \frac{25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 156,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 156,2 \text{ см}^3.$$

5. Вибір перерізів.

За одержаними значенням осевого моменту опору добираємо:

Двотавровий переріз.

З таблиць сортаменту знаходимо відповідний номер двотавра.

$$\text{№18}; W_z = 143 \text{ см}^3;$$

$$\text{№18а}; W_z = 159 \text{ см}^3.$$

Перевіряємо на міцність двотавр № 18.

$$\sigma = \frac{25 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^{-6}} = 174,8 \text{ МПа}.$$

Виразуємо «перенапруження» по відношенню до $[\sigma]$:

$$\frac{174,8 - 160}{160} \cdot 100\% = 9,25\% > 5\%.$$

Оскільки «перенапруження» складає більше 5%, то остаточно вибираємо двотавр №18 а, для якого умова міцності (3.7) виконується.

Круглий переріз.

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}, \text{ звідки}$$

Осевой момент опору для круга

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 156,2}{\pi}} = 11,6 \text{ см}; \quad d = 116 \text{ мм}.$$

Прямокутний переріз з відношенням сторін $h/b=2$.

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{4}{6} b^3.$$

Осевой момент опору для прямокутника

$$\text{Звідки } b = \sqrt[3]{1,5W_z} = \sqrt[3]{1,5 \cdot 156,2} = 6,16 \text{ см};$$

$$b = 61,6 \text{ мм}; \quad h = 123,2 \text{ мм}.$$

6. Порівняння маси одного погонного метра довжини кожного профілю.

Порівнюємо масу одного погонного метра довжини кожного профілю вважаючи, що матеріал для всіх профілів однаковий (густина $\rho = 7,8 \text{ г см}^3$).

Маса одного погонного метра балки

$$G = A \cdot \rho \cdot l,$$

де A – площа поперечного перерізу відповідного профілю;

ρ – густина матеріалу; $l = 1 \text{ м}$.

Для двотаврового перерізу № 18а площа перерізу $A=25,4 \text{ см}^2$, маса одного погонного метра $G = 19,9 \text{ кг}$.

Для круглого перерізу площа

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 11,6^2}{4} = 105,7 \text{ см}^2.$$

Маса $G = A \rho l = 105,7 \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 82,4 \text{ кг}$. $G = 82,4 \text{ кг}$.

Для прямокутного перерізу площа

$$A = bh = 6,16 \cdot 12,32 = 75,9 \text{ см}^2.$$

Маса $G = A \rho l = 75,9 \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 59,2 \text{ кг}$. $G = 59,2 \text{ кг}$.

Маса одного погонного метра довжини для перерізів різного профілю знаходиться у співвідношенні:

$$G_{\text{дв}} : G_{\text{пр}} : G_{\text{кр}} = 1 : 2,97 : 4,14,$$

де $G_{\text{дв}}$ – маса одного погонного метра довжини двотаврової балки;

$G_{\text{пр}}$ – маса одного погонного метра довжини балки прямокутного перерізу;

$G_{\text{кр}}$ – маса одного погонного метра довжини балки круглого перерізу.

7. Визначення переміщень двотаврової балки.

Для двотаврового перерізу визначимо прогин посередині прогону і кут повороту перерізу на правій опорі із застосуванням методу початкових параметрів.

За формулою (3.14) прогин посередині прогону, тобто при $x = 2 \text{ м}$.

$$EI_x w(2) = EI_z w_0 + EI_z \theta_0 \cdot 2 + \frac{Y_A \cdot 2^3}{6} - \frac{F \cdot 1^3}{6}.$$

В початку координат $w_0=0$, $\theta_0 \neq 0$. Кут повороту θ_0 знайдемо з умови рівності нулевій прогину на правій опорі, тобто при $x = 4 \text{ м}$.

$$\begin{aligned} EI_x w(4) &= 0 + EI_z \theta_0 \cdot 4 + \frac{Y_A \cdot 4^3}{6} - \frac{F \cdot 3^3}{6} + \frac{M \cdot 2^2}{2} - \frac{q \cdot 2^4}{24} = \\ &= EI_z \theta_0 \cdot 4 + \frac{10 \cdot 4^3}{6} - \frac{15 \cdot 3^3}{6} + \frac{20 \cdot 2^2}{2} - \frac{10 \cdot 2^4}{24} = EI_z \theta_0 \cdot 4 + 72,5 \end{aligned}$$

$$EI_z w(4) = 0 = EI_z \theta_0 \cdot 4 + 72,5; \quad EI_z \theta_0 = -18,12.$$

Обчислимо прогин балки посередині прогону:

$$EI_z w(2) = -18,12 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 8}{6} - \frac{15 \cdot 1}{6} = -25,4.$$

Враховуючи, що для двотавра № 18а $I_z = 1430 \text{ см}^4$ прогин посередині прогону:

$$w(2) = -\frac{25,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = -8,88 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -8,88 \text{ мм}.$$

Отже, центр маси перерізу D переміститься вниз на 8,88 мм.

За формулою (3.15) визначаємо кут повороту перерізу на правій опорі, тобто при $x = 4$ м:

$$\begin{aligned} EI_x \theta(4) &= EI_x \theta_0 + \frac{Y \cdot 4^2}{2} - \frac{F \cdot 3^2}{2} + \frac{M \cdot 2}{1} - \frac{q \cdot 2^3}{6} = \\ &= -18,12 + \frac{10 \cdot 16}{2} - \frac{15 \cdot 9}{2} + \frac{20 \cdot 2}{1} - \frac{10 \cdot 8}{6} = -21,05 \\ \theta(4) &= \frac{21,05 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = 7,36 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Знак "+" означає, що поворот перерізу B здійснюється проти годинникової стрілки.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який згин називається прямим поперечним?
2. Внутрішні силові фактори при прямому поперечному згині.
3. Поперечна сила при згині. Сформулюйте правило знаків.
4. Згинальний момент при згині. Сформулюйте правило знаків.
5. Нормальні напруження при чистому згині балки. Сформулюйте правило знаків.
6. Умова міцності балки.
7. Умова жорсткості балки.
8. Послідовність побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Для сталеві балки (рис. 3.5, табл. 3.1) підібрати двотавровий, круглий і прямокутний (з відношенням сторін $h/b = 2$) переріз. Порівняти вагу одного метра довжини кожного профілю.

Для двотаврового перерізу визначити прогин посередині прогону і кут повороту перерізу на правій опорі. Взяти $l = 4$ м, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Таблиця 3.1

Варіант	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	κ	n
0	5	30	-18	0,25	0
1	-10	25	12	0,5	1
2	15	-20	16	0,75	0,25
3	-20	15	28	0,25	0,5
4	25	10	-10	0,5	0,75
5	-8	-25	-30	0,75	0,5
6	12	-20	20	0,25	0,25
7	-16	-18	15	0,5	1
8	20	12	-25	0,75	0
9	-24	-10	-5	0,5	0,75

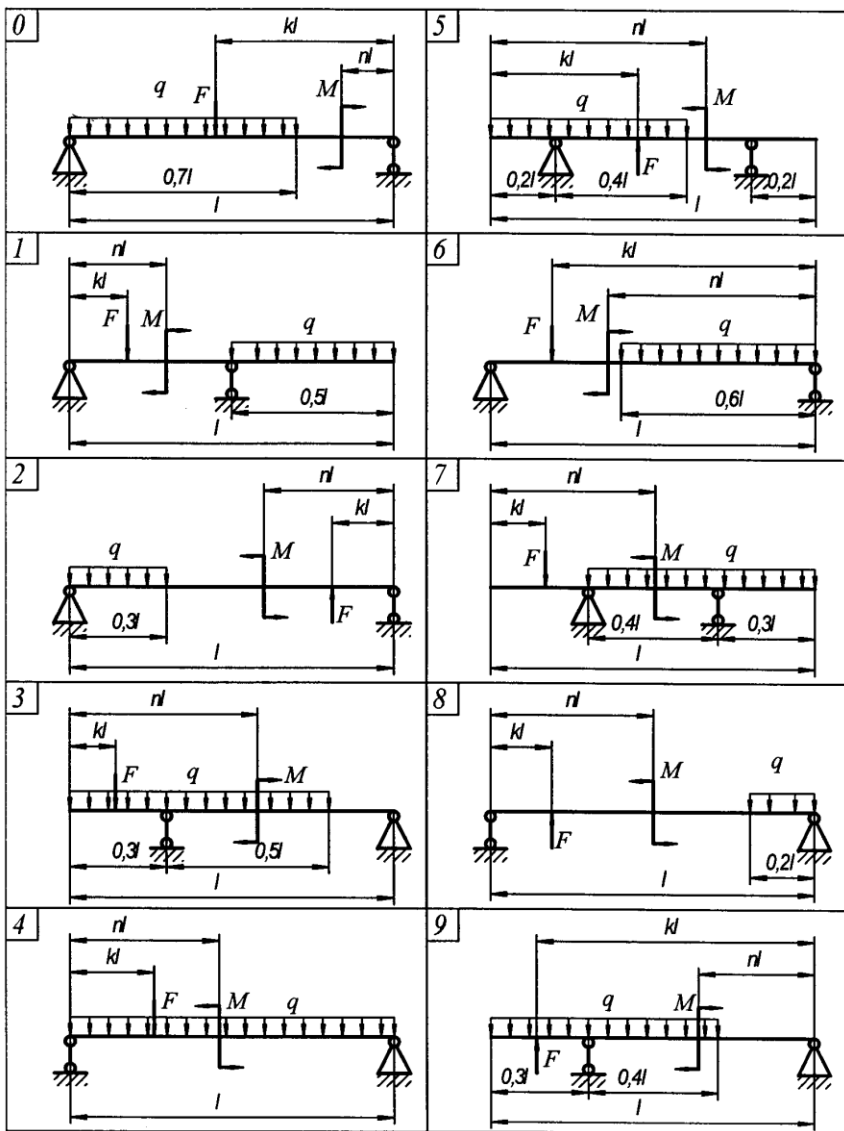


Рис. 3.5

IV. ПОЗАЦЕНТРОВИЙ СТИСК

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Позацентричний розтяг (стиск) – такий вид складного опору, при якому брус розтягується силами, паралельними його осі так, що рівнодійна їх не збігається з віссю. Точку прикладання сили P називають **полюсом** (рис. 4.1, а).

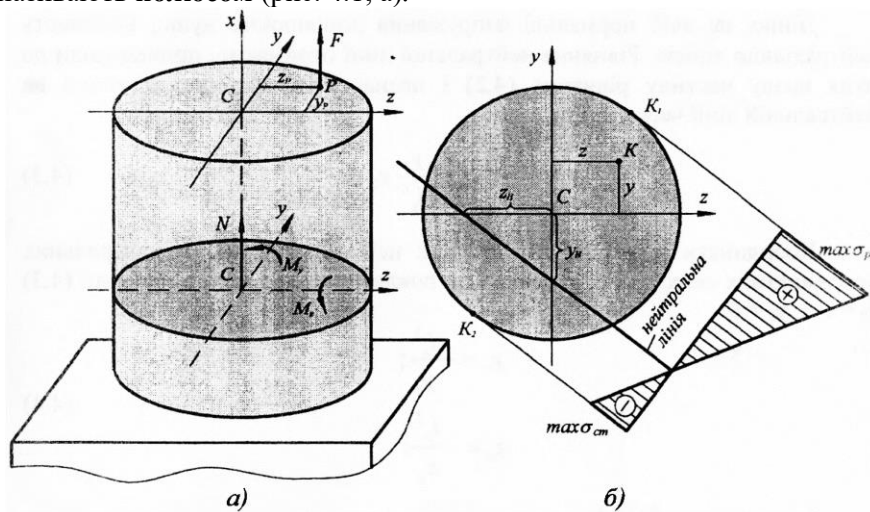


Рис. 4.1.

Нормальні напруження в точках перерізу знаходять за формулою:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y, \quad (4.1)$$

де N – повздовжня сила, що виникає в перерізі;

A – площа поперечного перерізу;

M_y, M_z – згинальні моменти відносно відповідних осей;

x, y – координати точки в якій знаходять напруження.

I_y, I_z – моменти інерції.

Враховуючи, що повздовжня сила $N=F$, згинальні моменти

$M_y=Fz_p, M_z=Fy_p$, а квадрати радіусів інерції перерізу $i_y^2 = \frac{I_y}{A}, i_z^2 = \frac{I_z}{A}$,
рівняння (4.1) можна записати:

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y \right),$$

де F – стискаюча або розтягуюча сила;

z_p, y_p – координати точки прикладання сили, координати полюса. У формулі (4.2) силу F беруть із знаком "+", якщо вона розтягуюча та зі знаком "-" якщо вона стискаюча.

Лінію, на якій нормальні напруження дорівнюють нулю, називають нейтральною лінією. Рівняння нейтральної лінії отримаємо, прирівнявши до нуля праву частину рівняння (4.2) і позначивши координати точки, на нейтральній лінії через z_0 і y_0 .

$$\frac{z_p}{i_y^2} z_0 + \frac{y_p}{i_z^2} y_0 = -1.$$

Координати відрізків, які відсікає нейтральна лінія в центральних координатних осях перерізу одержимо поклавши почергово в рівнянні (4.3) $z_0 = 0$ і $y_0 = 0$:

$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_p}; \quad z_n = -\frac{i_y^2}{z_p}; \quad (4.3)$$

Із залежностей (4.4) можемо зробити висновок, що нейтральна лінія перетинає координатні осі в точках, які належать квадранту, протилежному тому, в якому лежить полюс P (рис. 4.1, б).

Найбільші значення напружень виникають у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках перерізу. Епюру напружень наведено на рис. 4.1, б.

Умова міцності для позацентрового розтягу (стиску):

- для точки з максимальним розтягуючим напруженням, точка K_1

$$\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y \right) \leq [\sigma_+] \quad (4.5)$$

- для точки з максимальним стискаючим напруженням, точка K_2

$$\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y \right) \leq [\sigma_-]. \quad (4.6)$$

У формулах (4.5), (4.6) $[\sigma_+]$, $[\sigma_-]$ – допустимі напруження відповідно на розтяг і стиск.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Для заданого перерізу визначити допустиму силу F і побудувати епюру розподілення нормальних напружень в перерізі, якщо відома точка прикладання сили F в системі координат z' , y' і допустимі напруження $[\sigma_-] = 20 \text{ МПа}$, $[\sigma_+] = 2 \text{ МПа}$. Взяти $a = 80 \text{ см}$, $z'_p = 30 \text{ см}$, $y'_p = 20 \text{ см}$.

План розв'язання задачі

1. Накреслити переріз у масштабі відповідно до даних умови задачі.
2. Розділити завданий переріз на прості частини для яких відомі розміри і положення їх центрів маси.
3. Визначити положення центра маси перерізу в системі координат z' , y' .
4. Провести головні центральні осі інерції Z , Y і визначити в цій системі координати точки прикладання сили (полюса) Z_P , Y_P .
5. Обчислити головні центральні моменти інерції перерізу I_z , I_y і радіуси інерції i_z , i_y .
6. Визначити відрізки Z_H , Y_H , що відсікаються нейтральною лінією на осях Z , Y , провести нейтральну лінію і визначити координати небезпечних точок.
7. Обчислити допустиме значення сили F з умов міцності в небезпечних точках перерізу.
8. Побудувати епюру розподілення нормальних напружень в перерізі.

Розв'язання

1. Згідно з даними умови задачі в масштабі накреслимо переріз (рис. 4.2).

2. Розділимо завданий переріз на три прямокутники.

Площі цих прямокутників A_1 , A_2 , A_3 . Координати їх центрів маси в системі координат z' , y' ; відповідно $C_1(z_1, y_1)$; $C_3(z_3, y_3)$. Для кожного з прямокутників через їх центри маси проводимо центральні осі z_1 , y_1 .

3. Визначення положення центра маси перерізу.

Положення центра маси перерізу в системі координат z' , y' знаходимо за формулами:

$$z_c = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i} = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{10 \cdot 1600 + 60 \cdot 1600 + 110 \cdot 1600}{1600 + 1600 + 1600} = 60 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{40 \cdot 1600 + 70 \cdot 1600 + 40 \cdot 1600}{1600 + 1600 + 1600} = 50 \text{ см.}$$

де A_1, A_2, A_3 – площі окремих прямокутників, що складають переріз.
 $A_1 = A_2 = A_3 = 1600 \text{ см}^2$.

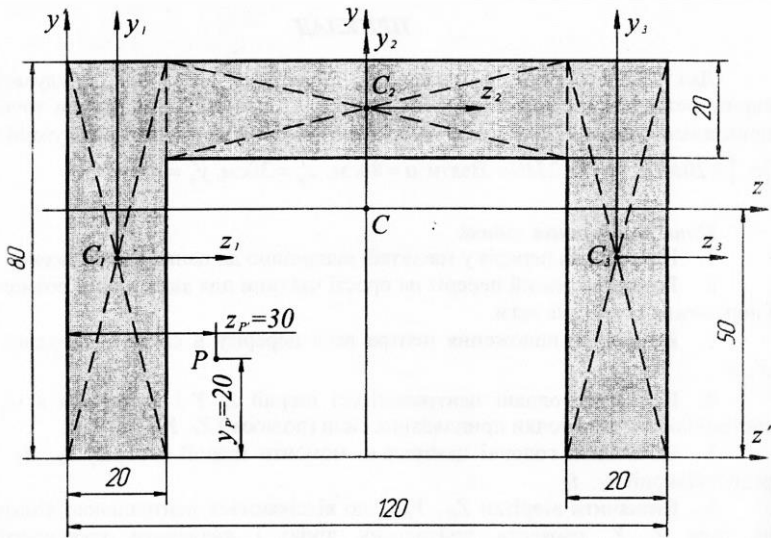


Рис. 4.2.

Площа всього перерізу:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1600 + 1600 + 1600 = 4800 \text{ см}^2.$$

Примітка. Оскільки вісь Y є віссю симетрії перерізу, то його центр маси лежить на цій осі, що підтверджено результатами розрахунку.

4. Визначення положення полюса в головній центральній системі координат.

Через центр маси перерізу проводимо головні центральні осі інерції Z, Y .

Координати полюса в цій системі координат (рис. 4.3):

$$Z_P = -30 \text{ см}, Y_P = -30 \text{ см}.$$

5. Знаходження значень головних моментів інерції та радіусів інерції.

Обчислюємо значення осьових моментів інерції в центральній системі координат з використанням теореми Штейнера.

$$I_z = I_{z1} + b_1^2 A_1 + I_{z2} + b_2^2 A_2 + I_{z3} + b_3^2 A_3 =$$

$$= \frac{20 \cdot 80^3}{12} + (-10)^2 \cdot 1600 + \frac{80 \cdot 20^3}{12} + 20^2 \cdot 1600 + \frac{20 \cdot 80^3}{12} + (-10)^2 \cdot 1600 =$$

$$= 2,72 \cdot 10^6 \text{ см}^4.$$

$$I_y = I_{y1} + a_1^2 A_1 + I_{y2} + a_2^2 A_2 + I_{y3} + a_3^2 A_3 =$$

$$= \frac{80 \cdot 20^3}{12} + (-50)^2 \cdot 1600 + \frac{20 \cdot 80^3}{12} + \frac{80 \cdot 20^3}{12} + 50^2 \cdot 1600 = 8,96 \cdot 10^6 \text{ см}^4.$$

Знаходимо радіуси інерції

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{2,72 \cdot 10^6}{4800} = 566,7 \text{ см}^2; \quad i_z = 23,8 \text{ см}.$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{8,96 \cdot 10^6}{4800} = 1866,7 \text{ см}^2; \quad i_y = 43,2 \text{ см}.$$

Осьові моменти інерції та радіуси інерції обчислюються за формулами, приведеними в додатку 3.

6. Знаходження положення нейтральної лінії та небезпечних точок.

Із співвідношень (4.4) знаходимо відрізки, які відтинає нейтральна лінія на координатних осях:

$$z_n = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{1866,7}{(-30)} = 62,2 \text{ см}$$

$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{566,7}{(-30)} = 18,9 \text{ см}$$

Відкладаємо ці відрізки в центральній системі координат і проводимо нейтральну лінію (рис. 4.3).

Небезпечними є найбільш віддалені точки перерізу від нейтральної лінії. Це точки K_1 та K_2 .

Координати точок:

$$y_{K1} = 30 \text{ см}; \quad z_{K1} = 60 \text{ см};$$

$$y_{K2} = -30 \text{ см}; \quad z_{K2} = -60 \text{ см}.$$

7. Обчислення допустимого навантаження.

Запишемо умови міцності для точок K_1 та K_2 .

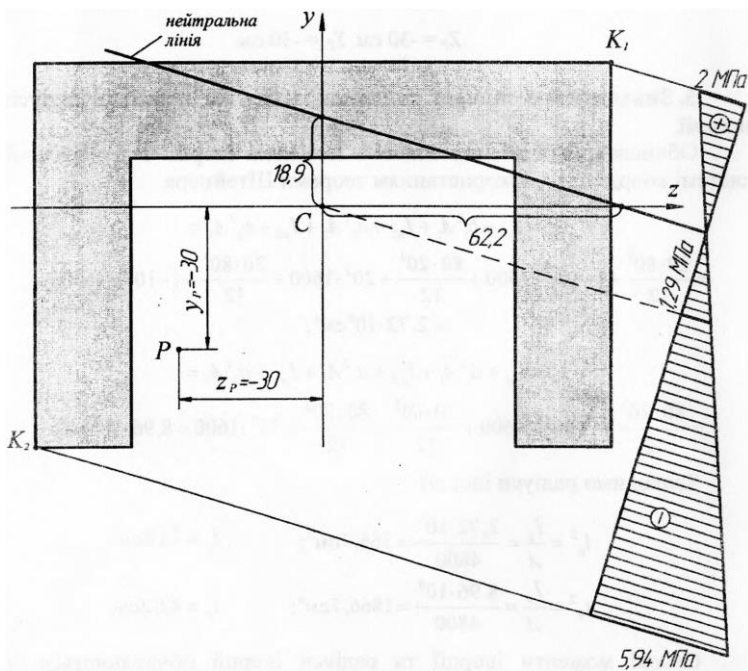


Рис. 4.3.

В точці K_1 маємо максимальні напруження розтягу. За формулою (4.5) умова міцності для цієї точки

$$-\frac{[F]}{A} \left(1 + \frac{y_{K_1}}{i_z^2} y_P + \frac{z_{K_1}}{i_y^2} z_P \right) \leq [\sigma_+],$$

$$-\frac{[F]}{4800} \left(1 + \frac{30 \cdot (-30)}{566,7} + \frac{60 \cdot (-30)}{1866,7} \right) \leq 2 \cdot 10^2.$$

$$[\sigma_+] = 2 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 2 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}.$$

Зауважимо, що

Допустиме значення прикладеної сили $[F]_{K_1} \leq 618,34 \text{ кН}$.

В точці K_2 маємо максимальні стискуючі напруження. Умова міцності для цієї точки згідно формули (4.6)

$$-\frac{[F]}{A} \left(1 + \frac{y_{K_2}}{i_z^2} y_P + \frac{z_{K_2}}{i_y^2} z_P \right) \leq [\sigma_-],$$

$$-\frac{[F]}{4800} \left(1 + \frac{(-50) \cdot (-30)}{566,7} + \frac{(-60) \cdot (-30)}{1866,7} \right) \leq -20 \cdot 10^2.$$

Допустиме значення прикладеної сили $[F]_{K1} \leq 2,08 \text{ МН}$.

З двох допустимих значень сили вибираємо менше:

$$[F] = \min([F]_{K1}, [F]_{K2}) = 618,34 \text{ кН}.$$

Отже, допустиме значення стискуючої сили $[F] = 618,34 \text{ кН}$.

8. Побудова епюри розподілення нормальних напружень в перерізі.

При значенні стискуючої сили $F = [F]$ обчислюємо нормальні напруження в характерних точках і будуємо епюру розподілення нормальних напружень в перерізі. За формулою (4.2):

точка K_1

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_{K_1}}{i_z^2} y_p + \frac{z_{K_1}}{i_y^2} z_p \right) = \\ &= -\frac{618,34 \cdot 10^3}{4800} \left(1 + \frac{30 \cdot (-30)}{566,7} + \frac{60 \cdot (-30)}{1866,7} \right) = 200 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 2 \text{ МПа};\end{aligned}$$

точка С (центр маси перерізу)

$$\sigma = -\frac{F}{A} = -\frac{618,34 \cdot 10^3}{4800 \cdot 10^{-4}} = -1,29 \text{ МПа};$$

точка K_2

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_{K_2}}{i_z^2} y_p + \frac{z_{K_2}}{i_y^2} z_p \right) = \\ &= -\frac{618,34 \cdot 10^3}{4800} \left(1 + \frac{(-50) \cdot (-30)}{566,7} + \frac{(-60) \cdot (-30)}{1866,7} \right) = -594 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = -5,94 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

За одержаними значеннями будуємо епюру розподілу нормальних напружень в перерізі (рис. 4.3).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який розтяг (стиск) називають позацентровим?
2. Нормальні напруження в точках перерізу.
3. Рівняння нейтральної лінії
4. Умова міцності для позацентрового розтягу (стиску)
5. Послідовність побудови епюри розподілення нормальних напружень у перерізу

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Позацентричний стиск

Для заданого перерізу (рис. 4.4, табл. 4.1) визначити допустиму силу F і побудувати епіюру розподілення нормальних напружень в перерізі, якщо відома точка прикладання сили F в системі координат Z'_F, Y'_F (координати полюса) і допустимі напруження $[\sigma_-] = 20 \text{ МПа}$, $[\sigma_+] = 2 \text{ МПа}$.

Таблиця 4.1

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ см}$	70	65	50	45	40	45	50	55	60	65
$Z'_P, \text{ см}$	40	30	20	15	10	15	25	35	40	15
$Y'_P, \text{ см}$	30	10	25	20	15	20	25	20	25	30

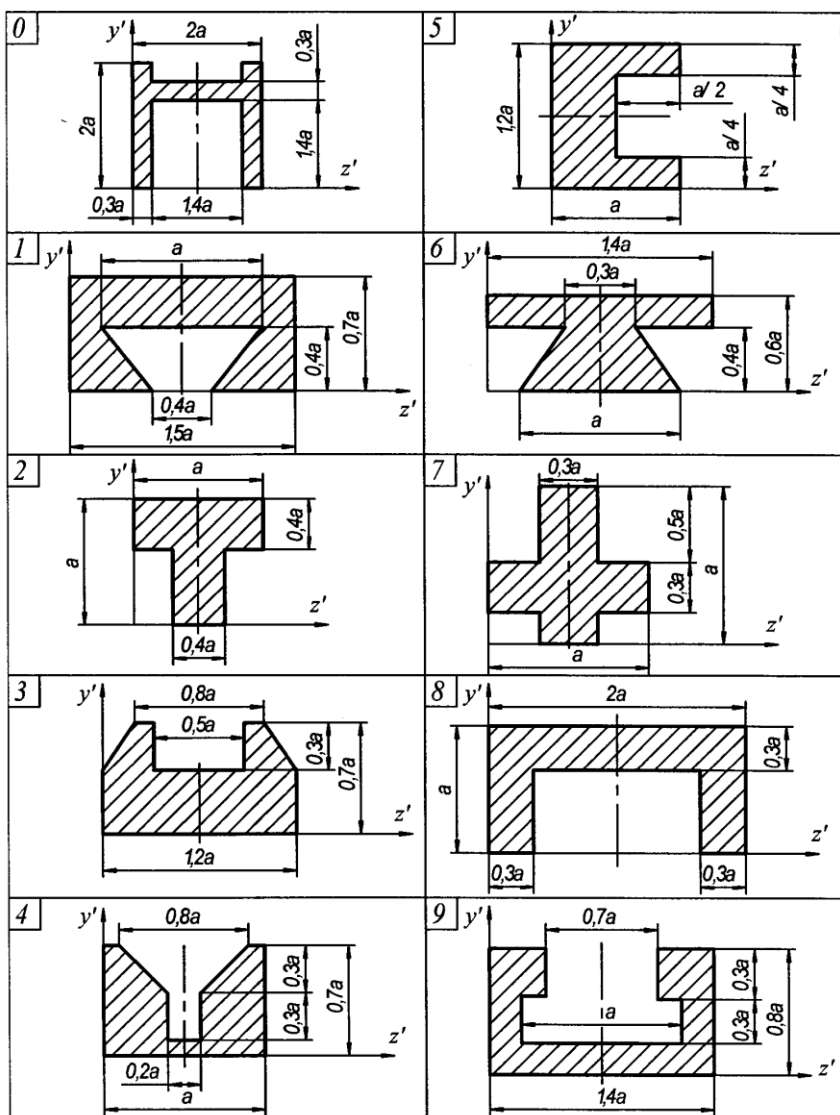


Рис. 4.4

V. РОЗРАХУНОК КРУГЛОГО ВАЛУ НА ЗГИН З КРУЧЕННЯМ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Згин з крученням такий вид напруженого стану стержня, коли в поперечних перерізах виникають два внутрішні силові фактори: згинальний і крутний момент.

Якщо при розрахунку валу відома потужність N (κBm), яка ним передається, та частота обертання ω ($сек^{-1}$), то крутний момент, що прикладений до валу

$$M_{\kappa} = \frac{N}{\omega} (\kappa H \cdot m) \quad (5.1)$$

В будь-якому поперечному перерізі одночасно виникають нормальні напруження від згинання в двох площинах, а також дотичні напруження від кручення та згинання.

Дотичними напруженнями від згинання нехтують по відношенню до дотичних напружень від кручення.

При згинанні валів в кожному з його поперечних перерізів відбувається пряме згинання від дії результуючого згинального моменту

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} \quad (5.2)$$

Вектор моменту M у різних перерізах може мати різні напрями, тому навіть якщо немає розподілених навантажень, епюра M може бути криволінійною.

Для загального випадку це легко показати аналітично.

Припустимо, що $M_z = a + bx$; $M_y = c + dx$; (a , b , c , d – сталі коефіцієнти).

Тоді:

$$M = \sqrt{(a + bx)^2 + (c + dx)^2} \quad (5.3)$$

Вираз під радикалом лише в деяких окремих випадках є повним квадратом, зокрема при $a = c = 0$, а здебільшого епюра криволінійна.

При розрахунку валів на міцність виготовлених із пластичних матеріалів використовують третю або четверту теорії міцності.

За третьою теорією умова міцності

$$\sigma_{екв3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

або враховуючи, що $\sigma = \frac{M}{W}$; $\tau = \frac{T_k}{W_p}$; $W_p = 2W$, одержимо

$$\sigma = \frac{M_{p3}}{W} = \frac{\sqrt{M^2 + T_k^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (5.4)$$

Звідси осьовий момент опору перерізу

$$W \geq \frac{\sqrt{M^2 + T_k^2}}{[\sigma]} \quad (5.5)$$

За четвертою теорією умова міцності

$$\sigma_{екв4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma],$$

або

$$\sigma = \frac{M_{p4}}{W} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T_k^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (5.6)$$

Осьовий момент опору перерізу

$$W \geq \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T_k^2}}{[\sigma]} \quad (5.7)$$

За значенням осьового моменту опору знаходять діаметр валу

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

враховуючи при цьому, що

Звідси:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}}$$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Стальний вал трансмісії з трьома шківками рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω і передає потужність, завдану на двох, шківках. Діаметри шківів $D_1 = 0,6 \text{ м}$; $D_2 = 0,4 \text{ м}$; $D_3 = 0,3 \text{ м}$. Визначити діаметр валу, нехтуючи його власною масою і масою шківів, якщо $[\sigma] = 160$

МПа; $\alpha_1 = \frac{7}{6}\pi$; $\alpha_2 = \frac{1}{3}\pi$; $\alpha_3 = \frac{3}{2}\pi$; $\omega = 70 \text{ рад/с}$; $N_1 = 50 \text{ кВт}$;

$N_3 = 30 \text{ кВт}$; $N_2 = ?$.

План розв'язання задачі

1. Зобразити розрахункову схему згідно з даними умови задачі.
2. За формулою (5.1) обчислити крутильні моменти, що передаються шківами.
3. З умови рівноваги визначити крутильний момент на шківу де його не завдано.
4. За формулою $t = \frac{2M}{D}$ обчислити натяги пасів.
5. Визначити силу тиску, що передається на вал шківами, вважаючи, що натяг ведучого паса T в два рази більший натягу веденого t .
6. Зобразити в аксонометрії схему навантаження валу, звівши сили до центру маси перерізів і розклавши їх на горизонтальні і вертикальні складові.
7. Побудувати епюри згинальних моментів в горизонтальній і вертикальній площинах.
8. Побудувати епюру сумарного згинального моменту.
9. Прикласти до валу крутильні моменти і побудувати епюру крутних моментів T_k .
10. Визначити небезпечний переріз.
11. Обчислити діаметр валу за третьою і четвертою теоріями міцності, округливши величину його до найближчого більшого значення за рекомендованим рядом лінійних розмірів з Ra40 (див. додаток 5).

Розв'язання

1. Згідно з даними умови задачі зображаємо розрахункову схему (рис. 5.1, а).
2. Знаходження значень крутильних моментів, побудова епюр крутних моментів.

За формулою (5.1) визначаємо крутильні моменти на шківах

$$M_1 = \frac{N_1}{\omega} = \frac{50}{70} = 0,71 \text{ кНм};$$

$$M_3 = \frac{N_3}{\omega} = \frac{30}{70} = 0,43 \text{ кНм}.$$

3. З умови рівноваги визначаємо крутильний момент на шківу де його не завдано.

З рівняння рівноваги $\sum M_x(\vec{F}_k) = 0$ знаходимо крутний момент M_2

$$-M_3 + M_1 - M_2 = 0;$$

$$M_2 = M_1 - M_3 = 0,71 - 0,43 = 0,28 \text{ кНм}.$$

4. Обчислений натягу пасів.

За формулою $t = \frac{2M}{D}$ обчислюємо натяги пасів.

$$t_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,71}{0,6} = 2,37 \text{ кН};$$

$$t_2 = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,28}{0,4} = 1,4 \text{ кН};$$

$$t_3 = \frac{2M_3}{D_3} = \frac{2 \cdot 0,43}{0,3} = 2,87 \text{ кН}.$$

5. Знаходження сил тиску на вал, що передаються шківами.

Знаходимо зусилля F_1, F_2, F_3 , вважаючи, що натяг ведучого паса T в два рази більший натягу веденого t .

З формули

$$F = T + t = 2t + t = 3t,$$

$$F_1 = 3t_1 = 3 \cdot 2,37 = 7,11 \text{ кН};$$

$$F_2 = 3t_2 = 3 \cdot 1,4 = 4,20 \text{ кН};$$

$$F_3 = 3t_3 = 3 \cdot 2,87 = 8,61 \text{ кН}.$$

6. Зображаємо в аксонометрії схему навантаження валу, із зведенням сили до центру маси перерізів і розклавши їх на горизонтальні і вертикальні складові (рис. 5.1, б).

7. Зображуємо зусилля, що діють на вал у горизонтальній і вертикальній площинах. Будуємо епюри згинальних моментів.

7.1. Горизонтальна площина

Знаходимо проекції силових факторів на горизонтальну площину:

$$F_{1z} = F_1 \cos 30^\circ = 7,11 \cdot 0,866 = 6,16 \text{ кН};$$

$$F_{2z} = F_2 \cos 60^\circ = 4,20 \cdot 0,5 = 2,10 \text{ кН};$$

$$F_{3z} = 0.$$

Зображаємо вал у горизонтальній площині у вигляді балки на двох опорах від дії відповідних силових факторів і знаходимо реакції опор (рис. 5.1, в).

Визначаємо опорні реакції

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad 3 \cdot Z_B + 2 \cdot F_{2z} - 1 \cdot F_{1z} = 0;$$

$$Z_B = \frac{1 \cdot 6,16 - 2 \cdot 2,10}{3} = 0,65 \text{ кН}.$$

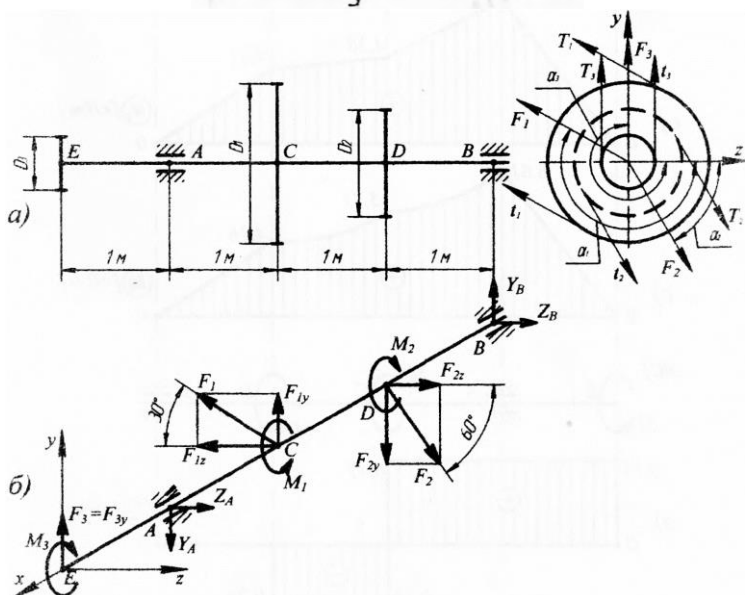


Рис. 5.1.

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad -3 \cdot Z_A + 2 \cdot F_{1z} - 1 \cdot F_{2z} = 0;$$

$$Z_A = \frac{2 \cdot 6,16 - 1 \cdot 2,10}{3} = 3,41 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B + F_{2z} - F_{1z} = 0;$$

$$3,41 + 0,65 + 2,10 - 6,16 = 0.$$

Обчислюємо значення згинального моменту M_y у характерних перерізах.

Переріз:

$$E: \quad M_y = 0;$$

$$A: \quad M_y = 0;$$

$$C: \quad M_y = 1 \cdot Z_A = 3,41 \text{ кНм};$$

$$B: \quad M_y = 0;$$

$$D: \quad M_y = 1 \cdot Z_B = 0,65 \text{ кНм}.$$

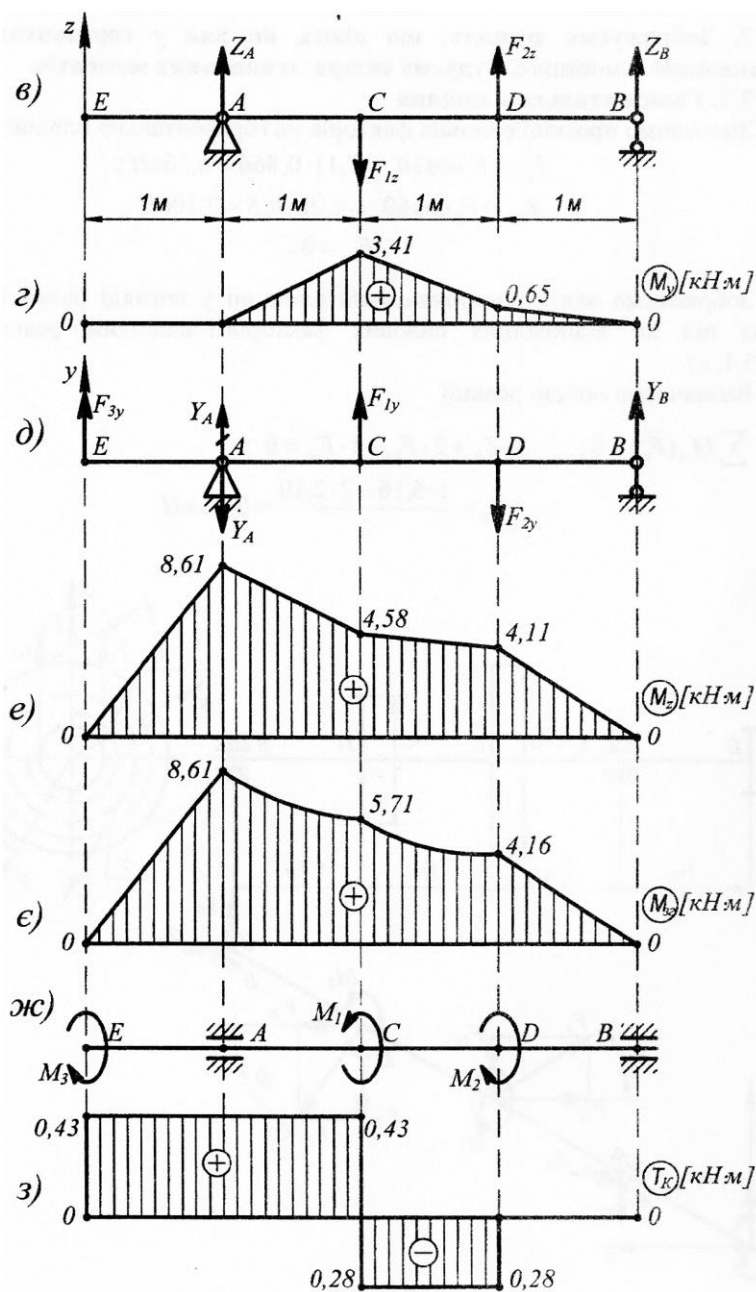


Рис. 5.1.

За одержаними значеннями будуюмо епюру згинальних моментів від дії силових факторів у горизонтальній площині (рис. 5.1, з).

7.2. Вертикальна площина.

Знаходимо проекції силових факторів на вертикальну площину:

$$F_{1y} = F_1 \cos 60^\circ = 7,11 \cdot 0,5 = 3,56 \text{ кН};$$

$$F_{2y} = F_2 \cos 30^\circ = 4,20 \cdot 0,866 = 3,64 \text{ кН};$$

$$F_{3y} = F_3 = 8,61 \text{ кН}.$$

Зображаємо вал у вертикальній площині у вигляді балки на двох опорах під дією відповідних силових факторів і знаходимо реакції опор (рис. 5.1, д).

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad 3 \cdot Y_B - 2 \cdot F_{2y} - 1 \cdot F_{3y} + 1 \cdot F_{1y} = 0,$$

$$Y_B = \frac{2 \cdot 3,64 + 1 \cdot 8,61 - 1 \cdot 3,56}{3} = 4,11 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad -3 \cdot Y_A - 4 \cdot F_{3y} - 2 \cdot F_{1y} + 1 \cdot F_{2y} = 0,$$

$$Y_A = \frac{-4 \cdot 8,61 - 2 \cdot 3,56 + 1 \cdot 3,64}{3} = -12,64 \text{ кН}.$$

Оскільки реакцію Y_A отримали із знаком "мінус", то її напрям змінюємо на протилежний.

Перевірка

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$\begin{aligned} -Y_A + Y_B + F_{3y} + F_{1y} - F_{2y} &= 0, \\ -12,64 + 4,11 + 8,61 + 3,56 - 3,64 &= 0. \end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинального моменту M_z у характерних перерізах.

Переріз:

$$E: \quad M_z = 0;$$

$$A: \quad M_z = 1 \cdot F_{3y} = 8,61 \text{ кНм};$$

$$C: \quad M_z = 2 \cdot F_{3y} - 1 \cdot Y_A = 2 \cdot 8,61 - 12,64 = 4,58 \text{ кНм};$$

$$B: \quad M_z = 0;$$

$$D: \quad M_z = 1 \cdot Y_B = 4,11 \text{ кНм}.$$

За одержаними значеннями будуюмо епюру згинальних моментів від дії силових факторів у вертикальній площині (рис. 5.1, е).

8. Знаходження значень сумарних моментів, побудова їх епюр.

За формулою (5.2) знаходимо значення сумарного згинального моменту $M_{\Sigma} = M$ у характерних перерізах.

Переріз:

$$E: M = 0;$$

$$A: M = 8,61 \text{ кНм};$$

$$C: M = \sqrt{3,41^2 + 4,58^2} = 5,71 \text{ кНм};$$

$$B: M = 0;$$

$$D: M = \sqrt{0,65^2 + 4,11^2} = 4,16 \text{ кНм}.$$

За одержаними значеннями будуємо епюру сумарних згинальних моментів врахувавши при цьому, що на ділянках AC і CD закон зміни моменту нелінійний (рис. 5.1, ϵ).

9. Побудова епюр крутних моментів

Прикладаємо до валу крутильні моменти на шківках (рис. 5.1, δ), обчислюємо крутні моменти T_k на характерних ділянках і будуємо їх епюру (рис. 5.1, ζ).

$$\text{Ділянки } EC: T_k = M_3 = 0,43 \text{ кНм};$$

$$BD: T_k = 0;$$

$$DC: T_k = -M_2 = -0,28 \text{ кНм};$$

10. Визначення небезпечного перерізу

Аналізуючи епюри $M_{\Sigma} = M$ і T_k визначаємо небезпечний переріз. Ці буде переріз з найбільшим значенням сумарного моменту. У нашому випадку це переріз A для якого: $M = 8,61 \text{ кНм}$, $T_k = 0,43 \text{ кНм}$.

11. Обчислення діаметра валу.

За третьою теорією міцності, теорією найбільших дотичних напружень, формула (5.4):

$$\sigma = \frac{M_{p3}}{W} = \frac{\sqrt{M^2 + T_k^2}}{W} \leq [\sigma],$$

$$W \geq \frac{\sqrt{M^2 + T_k^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{8,61^2 + 0,43^2} \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 53,88 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 53,88 \text{ см}^3.$$

За формулою (5.8) знаходимо діаметр валу

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 53,88 \cdot 10^3}{\pi}} = 81,87 \text{ мм}.$$

За четвертою теорією міцності, критерієм питомої потенціальної енергії формозміни, формула (5.6)

$$\sigma = \frac{M_{p4}}{W} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T_k^2}}{W} \leq [\sigma],$$

$$W \geq \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T_k^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{8,61^2 + 0,75 \cdot 0,43^2 \cdot 10^3}}{160 \cdot 10^6} = 53,86 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 53,86 \text{ см}^3,$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 53,86 \cdot 10^3}{\pi}} = 81,86 \text{ мм}.$$

Заокруглюємо величину діаметра до стандартного значення. Згідно з додатком 5 приймаємо $d=85 \text{ мм}$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Внутрішні силові фактори при згині з крученням.
2. Третя та четверта теорії міцності.
3. Осьовий момент опору перерізу.
4. Послідовність побудови епюри крутних моментів.
5. Послідовність побудови епюри згинальних моментів у горизонтальній та вертикальній площинах.
6. Послідовність побудови епюри сумарних моментів.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розрахунок круглого валу на згин з крученням

Стальний вал трансмісії з трьома шківками (рис. 5.2, табл. 5.1) рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω і передає потужність, задану на двох шківках. Діаметри шківків $D_1=0,6$ м; $D_2=0,4$ м; $D_3=0,3$ м, $a=1$ м. Визначити діаметр валу, нехтуючи його власною масою і масою шківків, якщо $[\sigma] = 160$ МПа.

Таблиця 5.1

Варіант	α_1 , рад	α_2 , рад	α_3 , рад	ω , рад/с	N_1 , кВт	N_2 , кВт	N_3 , кВт
0	0	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	30	-	30	40
1	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	π	40	60	-	40
2	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	50	30	10	-
3	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{1}{6}\pi$	100	-	10	20
4	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	0	10	40	-	20
5	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	0	20	60	20	-
6	π	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	80	50	10	-
7	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	90	-	60	50
8	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	60	-	50	60
9	$\frac{3}{2}\pi$	0	$\frac{1}{3}\pi$	70	50	-	30

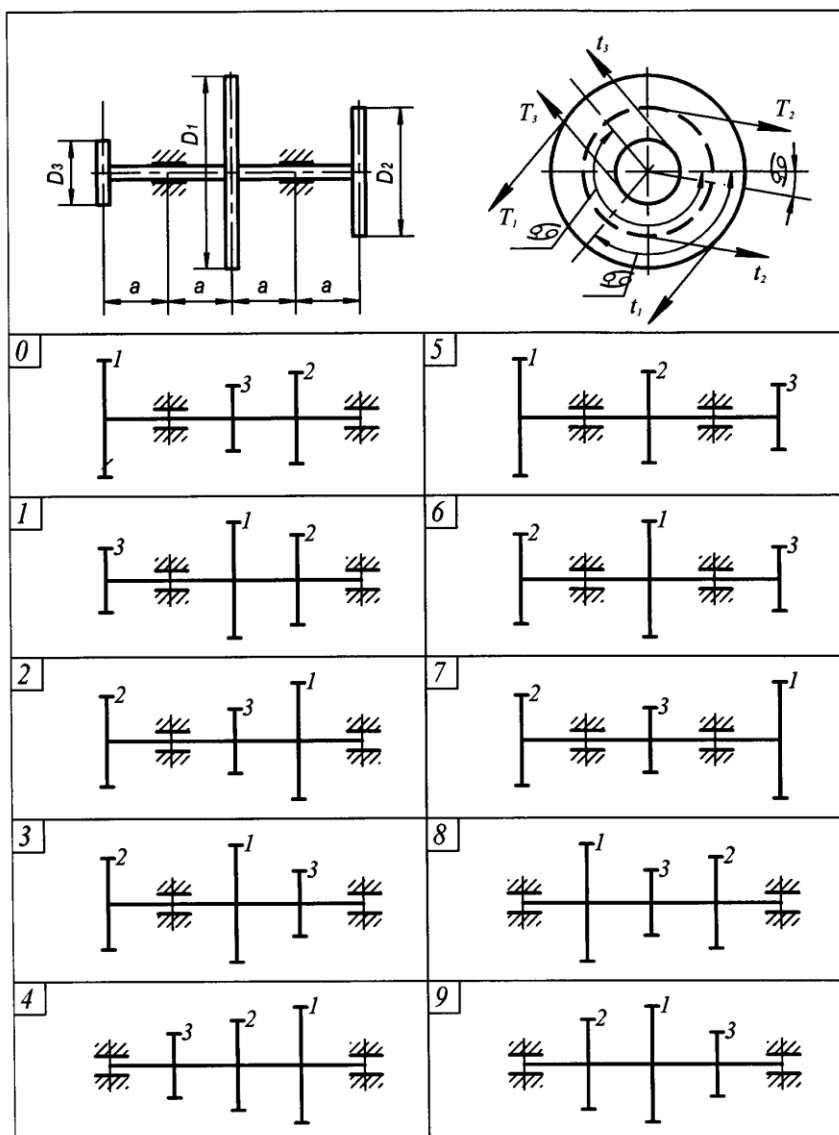


Рис. 5.2

Визначивши коефіцієнти δ_{ik} та вільні члени Δ/Γ , розв'язавши систему лінійних рівнянь (6.1) знаходять значення «зайвих» невідомих зусиль $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Переміщення від згинального моменту $M P$ можна обчислити за допомогою інтегралу Мора

$$\Delta_{iF} = \int_0^l \frac{M_F \bar{M}_i}{EI_z} dx \quad (6.3)$$

де M_F – вираз для згинального моменту від заданого навантаження;

$\bar{M}_i$ – вираз для згинального моменту від одиничного силового фактору.

EI_z – жорсткість перерізу.

Причому, для визначення лінійного переміщення перерізу прикладають одиничну силу. При визначенні кутових переміщень – одиничний момент.

Способи обчислення інтегралу Мора

Визначати переміщення стержневих систем можна як шляхом безпосереднього інтегрування інтегралу Мора, так і без його інтегрування, використавши деякі інші способи.

Графоаналітичний спосіб Верещагіна

Ґрунтується на тому факті, що вираз $\bar{M}_i$ в інтегралі Мора є лінійна функція. Згідно з цим способом переміщення

$$\Delta_{iF} = \frac{\omega \eta_C}{EI_z}, \quad (6.4)$$

де ω – площа епюри згинального моменту від заданого навантаження M_F ; η_C – ордината на одиничній епюрі $\bar{M}_i$, взята під центром маси епюри M_F (рис. 6.1).

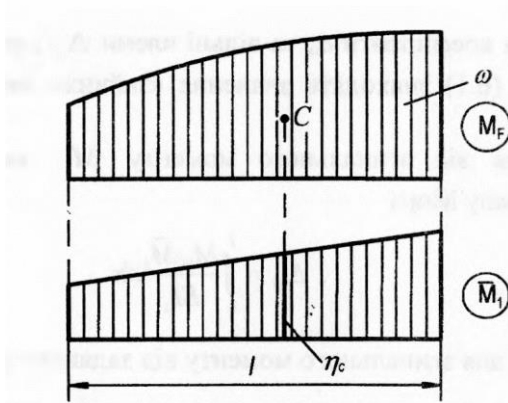


Рис. 6.1.

Якщо епюра M_F має складний вигляд, то її потрібно розділити на прості фігури, для яких легко визначити площу і положення центра маси (додаток 4).

При цьому кожному з площ треба множити на ординату' одиничної епюри під центром маси відповідної площі.

$$\Delta_{iF} = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k \eta_{Ck}}{EI_z} \quad (6.5)$$

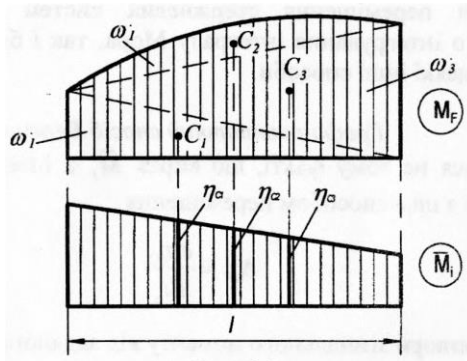


Рис. 6.2.

Якщо епюри M_F і $\bar{M}_I$ мають вигляд, який показаний на рис 6.2, то переміщення Δ_{iF} буде дорівнювати

$$\Delta_{iF} = \frac{1}{EI_z} (\omega_1 \cdot \eta_{c1} + \omega_2 \cdot \eta_{c2} + \omega_3 \cdot \eta_{c3}).$$

У разі, коли обидві епюри M_F і $\bar{M}_i$ – прямолінійні можна знаходити площу ω епюри $\bar{M}_i$ і множити на ординату η_C епюри M_F .

Спосіб перемноження трапецій

Коли перемножуються дві епюри, які мають вид трапеції (рис. 6.3), то результат перемноження можна записати у вигляді

$$\Delta_{iF} = \frac{l}{6EI_z} (2ac + 2bd + ad + bc) \quad (6.6)$$

В круглих дужках цього виразу добуток a с лівих ординат обох епюр і добуток $b \cdot d$ правих ординат беруться із коефіцієнтом, що дорівнює двом, а добутки $a \cdot d$ і $b \cdot c$, що розміщені по різні сторони з коефіцієнтом, який дорівнює одиниці.

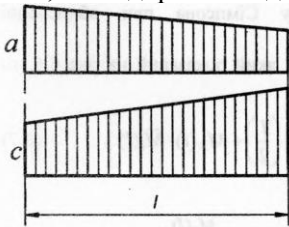


Рис. 6.3.

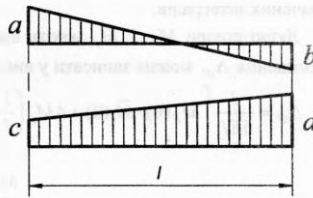


Рис. 6.4.

За допомогою формули (6.6) можна перемножити епюри, що мають вигляд "перекручених" трапецій.

При цьому добутки ординат, що мають однакові знаки, беруться із знаком плюс, а різні – мінус.

Наприклад, у випадку, показаному на рис. 6.4, результат перемноження "перекрученої" і звичайної трапеції дорівнює

$$\Delta_{iF} = \frac{l}{6EI_z} (2ac - 2bd + ad - bc).$$

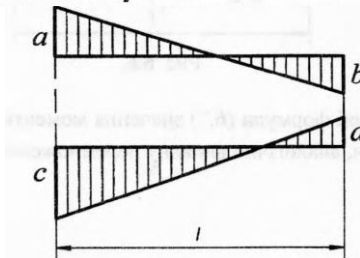


Рис. 6.5.

У випадку, що показаний на рис. 6.5, результат перемноження буде таким:

$$\Delta_{if} = \frac{l}{6EI_z} (-2ac - 2bd + ad + bc).$$

В додатку 4 наведено формули для визначення площ і координат центрів маси для тих поширених форм епюр, які зустрічаються в практичних розрахунках.

Спосіб Сімпсона-Карнаухова

Базується на використанні методу Сімпсона при обчисленні визначених інтегралів.

Якщо епюри M_F і $\bar{M}_i$ мають вигляд, який показаний на рис 6.6, то переміщення Δ_{iF} можна записати у вигляді

$$\Delta_{iF} = \frac{l}{6EI_z} \left[M_F(0) \cdot \bar{M}_i(0) + 4M_F\left(\frac{l}{2}\right) \cdot \bar{M}_i\left(\frac{l}{2}\right) + M_F(l) \cdot \bar{M}_i(l) \right]. \quad (6.7)$$

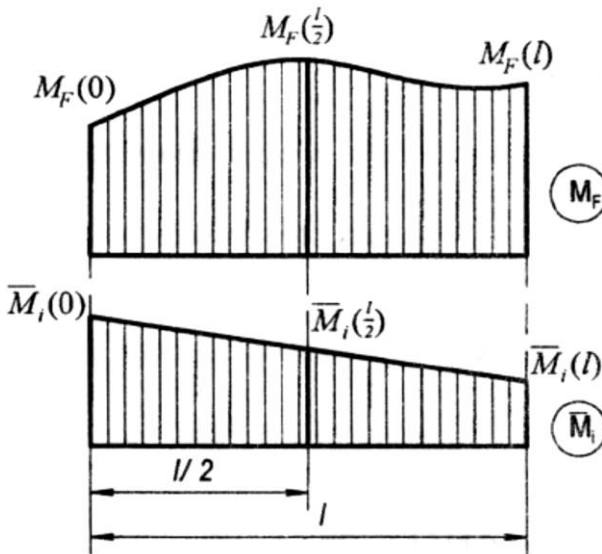


Рис. 6.6.

При використанні формули (6.7) значення моментів M_F і $\bar{M}_i$ беруть з відповідними знаками, аналогічно випадку перемноження трапецій.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Для заданої рами побудувати епюри згинальних моментів, поперечних сил і поздовжніх сил. Дібрати двотавровий переріз і визначити вертикальне переміщення перерізу D.

Взяти

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}; q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; F = 20 \text{ кН}; M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

План розв'язання задачі

1. Накреслити розрахункову схему відповідно до даних умови задачі.

2. Встановити ступінь статичної невизначеності.

3. У відповідності до ступеня статичної невизначеності записати систему канонічних рівнянь методу сил.

4. Шляхом відкидання в заданій системі зайвого зв'язку вибрати основну статично визначну систему таким чином, щоб вона була геометрично незмінною і вантажна епюра згинальних моментів була найбільш простою.

5. Зобразити еквівалентну систему. Для чого завантажити основну систему заданим навантаженням і невідомим зусиллям X_1 у напрямі відкинутої в'язі.

6. Прикласти до основної системи задане навантаженням і побудувати вантажну епюру згинальних моментів M_F .

7. Основну систему завантажити одиничним зусиллям $\bar{X}_1 = 1$ у напрямі відкинутої в'язі і побудувати одиничну епюру згинальних моментів $\bar{M}_1$.

8. Шляхом перемноження відповідних епюр з допомогою правила Верещагіна обчислити коефіцієнти δ_{11} і Δ_{1F} канонічного рівняння.

9. Розв'язати канонічне рівняння, знайти значення невідомого зусилля X_1 . Якщо в результаті силовий фактор одержали з від'ємним знаком, то його напрям необхідно змінити на протилежний.

10. Побудувати епюри згинальних моментів $M(x)$, поперечних сил $Q(x)$ і поздовжніх внутрішніх сил $N(x)$.

11. Перевірити правильність розкриття статичної невизначеності системи шляхом статичної та деформаційної перевірки.

11.1. Статична перевірка полягає у виконанні умов рівноваги вирізаних вузлів рами.

11.2. Деформаційна перевірка передбачає рівність нулеві переміщення перерізу у напрямі відкинутої в'язі, тобто у напрямі дії сили X_1 .

12. Встановити небезпечний переріз, з умови міцності підібрати необхідний двотавр.

13. За допомогою правила Верещагіна визначити переміщення вказаного перерізу.

Розв'язання

1. За даними умови задачі накреслимо розрахункову схему (рис. 6.7, а).

2. Встановлення ступеня статичної невизначеності.

У нашому випадку невідомі зусилля: X_E , U_E , M_E , X_A .

Для цієї рами можна скласти три рівняння рівноваги, отже, система один раз статично невизначена.

3. Запис системи канонічних рівнянь за методом сил.

У відповідності до ступеня статичної невизначеності складаємо систему канонічних рівнянь. У нашому випадку ця система представляє собою одне рівняння:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

4. Вибір основної системи.

Відкидаємо зайвий зв'язок (опора А), одержимо основну систему (рис. 6.7, б).

5. Вибір еквівалентної системи.

Завантажуємо основну систему заданим навантаженням і невідомим зусиллям X_1 , одержуємо еквівалентну систему (рис. 6.7, в).

6. Побудова епюри згинальних моментів M_F .

Завантажуємо основну систему заданим навантаженням (рис. 6.7, з) і будуємо вантажну епюру згинальних моментів M_F (рис. 6.7, д).

Епюру будуємо за підрахованими значеннями згинальних моментів у характерних перерізах окремих ділянок рами.

Ділянка АС: ($0 \leq x_1 < 1$ м) $M_1 = 10$ кН·м.

$$M_2 = -\frac{qx_2^2}{2} = -5x_2^2.$$

Ділянка ВС: ($0 \leq x_2 \leq 1$ м)

при $x_2 = 0$ $M_2 = 0$,

$x_2 = 0,5$ м $M_2 = -1,25$ кН·м,

$x_2 = 1,0$ м $M_2 = -5$ кН·м.

Ділянка СВ: ($0 \leq x_3 \leq 1$ м),

$M_3 = -q \cdot 1 \cdot (0,5 + x_3) - M = -10 \cdot (0,5 + x_3) - 10$,

при $x_3 = 0$ $M_3 = -15$ кН·м,

$x_3 = 1$ м $M_3 = -25$ кН·м.

Ділянка DE: ($0 \leq x_4 \leq 1$ м)

$$M_4 = -M - q \cdot 1 \cdot 1,5 + F \cdot x_4 = -10 - 15 + 20x_4 = -25 + 20x_4,$$

при $x_4 = 0$ $M_4 = -25$ кН·м,
 $x_4 = 1$ м $M_4 = -5$ кН·м.

7. Побудова епюри згинальних моментів $\bar{M}_1$.

Завантажуємо основну систему одиничним зусиллям $\bar{X}_1 = 1$ у напрямі відкинутої в'язі (рис. 6.7, е), знаходимо значення згинальних моментів у характерних перерізах. Будуємо одиничну епюру згинальних моментів $\bar{M}_1$ (рис. 6.7, є).

Ділянки АС: $\bar{M}_1 = 0$;

ВС: $\bar{M}_1 = 0$;

CD, переріз С: $\bar{M}_1 = 0$;

переріз D : $\bar{M}_1 = 1$;

DE, переріз D : $\bar{M}_1 = 1$;

переріз E: $\bar{M}_1 = 1$.

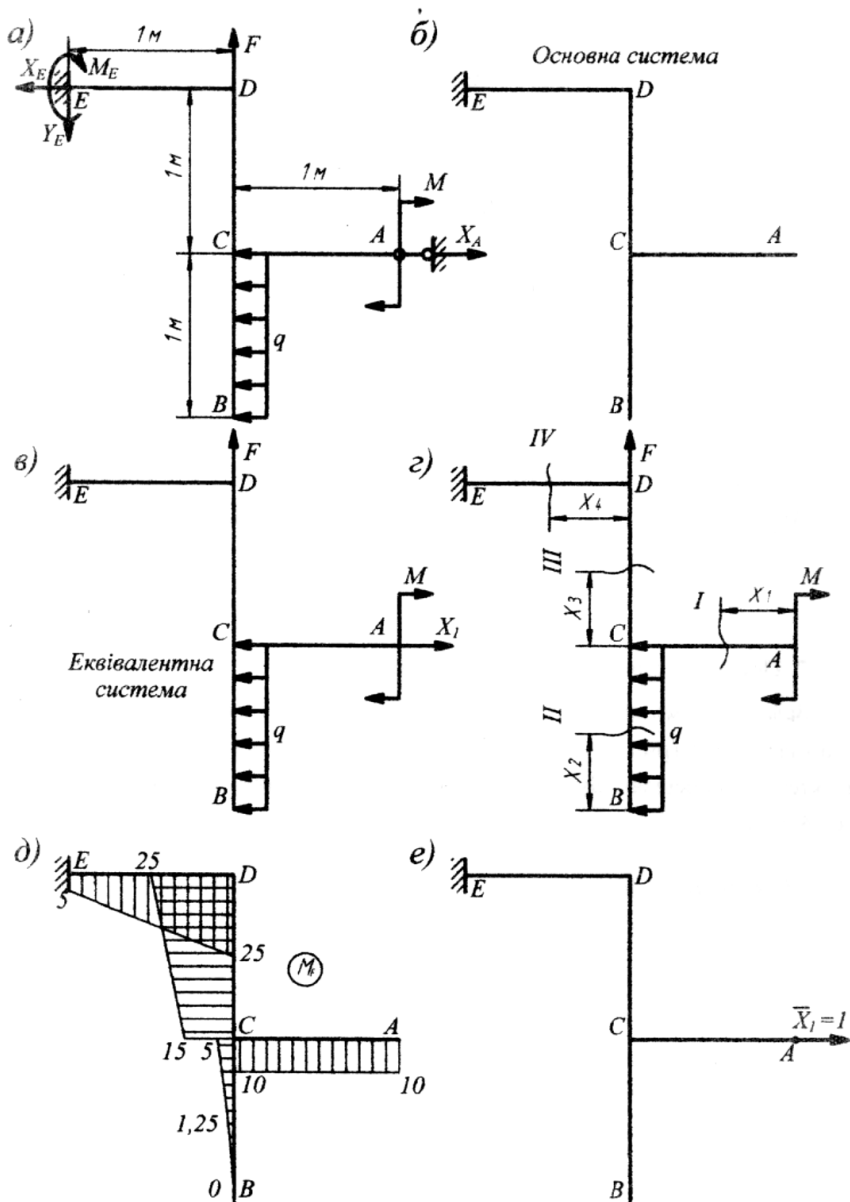


Рис. 6.7.

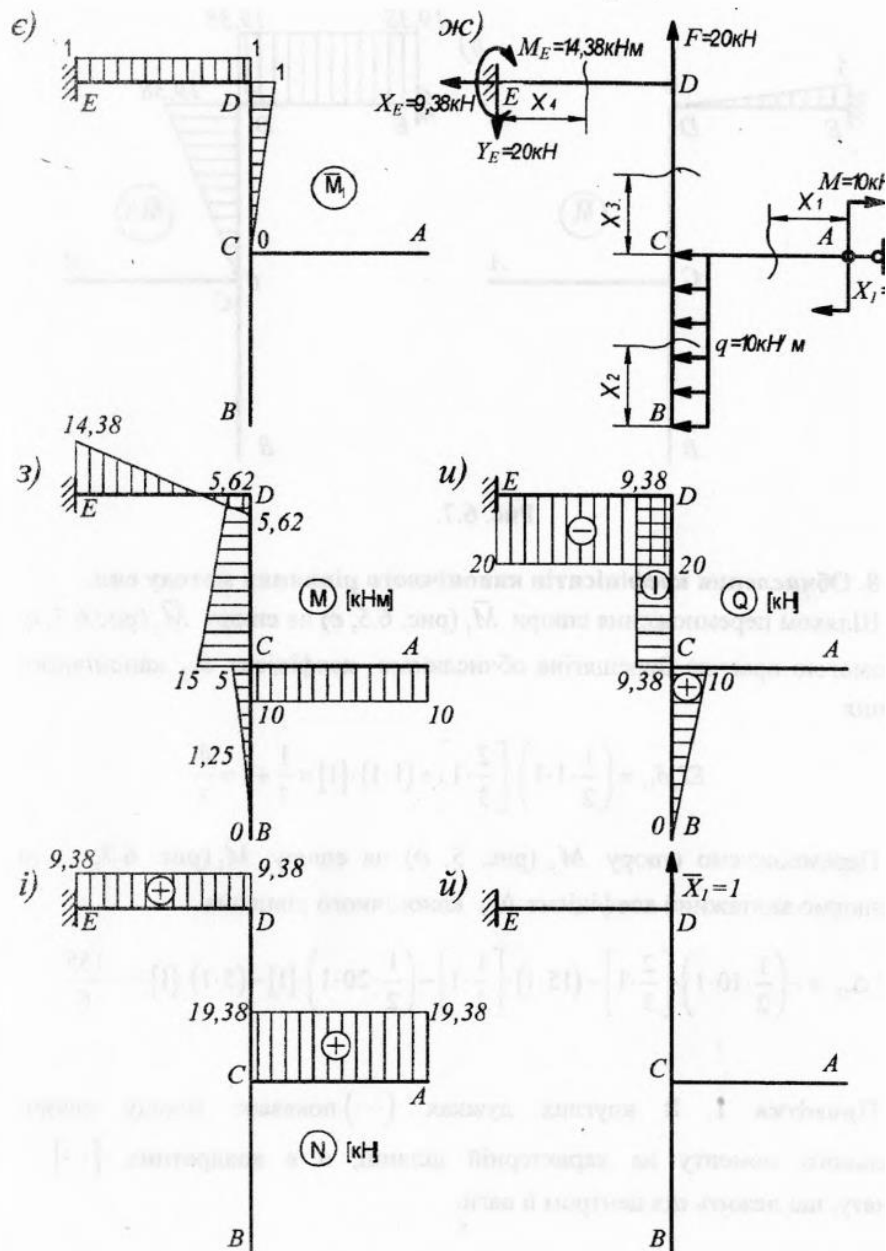


Рис. 6.7.

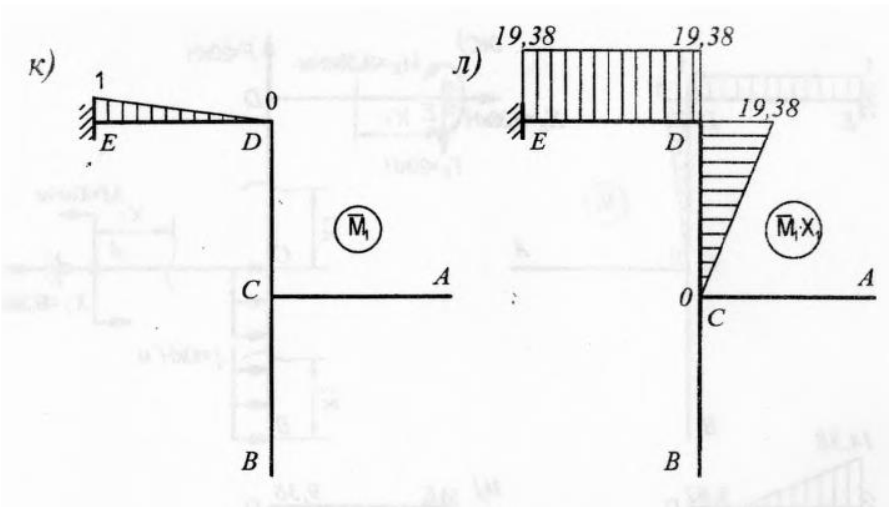


Рис. 6.7 (продовження).

8. Обчислення коефіцієнтів канонічного рівняння методу сил.

Шляхом перемноження епюри $\bar{M}_1$ (рис. 6.5, є) на епюру $\bar{M}_1$ (рис. 6.7, є) за допомогою правила Верещагіна обчислюємо коефіцієнт канонічного рівняння

$$EI_z \delta_{11} = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \right] + (1 \cdot 1) \cdot [1] = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Перемножуємо епюру M_F (рис. 5, д) на епюру $\bar{M}_1$ (рис. 6.7, є) та обчислюємо вантажний коефіцієнт Δ_{1F} канонічного рівняння.

$$EI_z \Delta_{1F} = - \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \right) \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \right] - (15 \cdot 1) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \right] - \left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1 \right) \cdot [1] - (5 \cdot 1) \cdot [1] = - \frac{155}{6}.$$

Примітка 1. В круглих дужках (...) показано площу епюри згинального моменту на характерній ділянці, а в квадратних [...] – ординату, що лежить під центром її маси.

Примітка 2. Коефіцієнти δ_{11} та Δ_{1F} можемо підрахувати скориставшись формулою перемноження трапецій (6.6)

$$\begin{aligned} EI_z \delta_{11} &= \frac{1}{6} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) + \\ &+ \frac{1}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{1}{6} (2 + 2 + 2 + 1 + 1) = \frac{4}{3}. \\ EI_z \Delta_{1F} &= \frac{1}{6} (2 \cdot 15 \cdot 0 - 2 \cdot 25 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 25 \cdot 0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{6}(-2 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 25 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 25 \cdot 1) = \\
 & = \frac{1}{6}(-50 - 15 - 10 - 50 - 5 - 25) = -\frac{155}{6},
 \end{aligned}$$

або за формулою Сімпсона-Карнаухова (6.5)

$$EI_z \delta_{11} = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \frac{1}{6}(1 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0) = \frac{4}{3};$$

$$EI_z \Delta_{1F} = \frac{1}{6}(-5 \cdot 1 - 4 \cdot 15 \cdot 1 - 25 \cdot 1) + \frac{1}{6}(-25 \cdot 1 - 4 \cdot 20 \cdot 0,5 - 15 \cdot 0) = -\frac{155}{6}.$$

Як бачимо, ми одержали такі ж значення коефіцієнтів.

9. Розв'язування канонічного рівняння методу сил.

Підставляючи в канонічне рівняння методу сил коефіцієнти δ_{11} і Δ_{1F} , знаходимо значення X_1 , скоротивши при цьому на жорсткість перерізу EI_z .

$$\frac{4}{3} X_1 - \frac{155}{6} = 0; \quad X_1 = 19,38 \text{ кН}.$$

10. Побудова епюр згинальних моментів $M(x)$, поперечних сил $Q(x)$ і поздовжніх внутрішніх сил $N(x)$.

Завантажуємо основну систему заданим навантаженням і знайденим зусиллям X_1 , будуємо епюри згинальних моментів, поперечних і поздовжніх внутрішніх сил.

Перед побудовою доцільно визначити опорні реакції в жорсткому закріпленні E : M_E , X_E , Y_E .

$$\begin{aligned}
 \sum M_E(\bar{F}_k) &= 0; & -M_E - M - q \cdot 1 \cdot 1,5 + P \cdot 1 + X_1 \cdot 1 &= 0; \\
 & & M_E &= -10 - 10 \cdot 1,5 + 20 + 19,38 = 14,38 \text{ кН} \cdot \text{м}. \\
 \sum F_{kx} &= 0; & -X_E - q \cdot 1 + X_1 &= 0; \\
 & & X_E &= -10 + 19,38 = 9,38 \text{ кН}. \\
 \sum F_{ky} &= 0; & -Y_E + F &= 0; & Y_E &= F = 20 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Для побудови епюр внутрішніх силових факторів на кожній характерній ділянці запишемо вирази для $M(x)$, $Q(x)$, $N(x)$ та обчислимо їх значення в характерних перерізах.

Ділянка AC:	$M_1 = -M = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$
	$N_1 = X_1 = 19,38 \text{ кН};$
	$Q_1 = 0.$
Ділянка BC:	$M_2 = -\frac{q \cdot x_2^2}{2} = -5x_2^2;$
	при $x_2 = 0 \quad M_2 = 0;$
	$x_2 = 0,5 \text{ м} \quad M_2 = -1,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$
	$x_2 = 1,0 \text{ м} \quad M_2 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м};$
	$N_2 = 0;$
Ділянка CD:	$Q_2 = q \cdot x_2 = 10x_2;$
	при $x_2 = 0 \quad Q_2 = 0;$
	$x_2 = 1,0 \text{ м} \quad Q_2 = 10 \text{ кН};$
	$M_3 = -M - q \cdot 1(0,5 + x_3) + X_1 \cdot x_3 =$ $= -10 - 10 \cdot (0,5 + x_3) + 19,38 \cdot x_3;$
	при $x_3 = 0 \quad M_3 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м};$ $x_3 = 1,0 \text{ м} \quad M_3 = -5,62 \text{ кН} \cdot \text{м};$
Ділянка ED:	$Q_3 = q \cdot 1 - X_1 = 10 - 19,38 = -9,38 \text{ кН};$
	$N_3 = 0.$
	$M_4 = -Y_E \cdot x_4 + M_E = -20 \cdot x_4 + 14,38$
	при $x_4 = 0 \quad M_4 = 14,38 \text{ кН} \cdot \text{м};$
	$x_4 = 1,0 \text{ м} \quad M_4 = -5,62 \text{ кН} \cdot \text{м};$
	$Q_4 = -Y_E = -20 \text{ кН};$
	$N_4 = X_E = 9,38 \text{ кН}.$

За одержаними значеннями будемо епюри згинальних моментів M (рис. 6.7, з), поперечних сил (рис. 6.7, и) та поздовжніх внутрішніх сил N (рис. 6.7, і).

Примітка. Епюру згинальних моментів M (рис. 6.7, з) можна також представити як суму епор згинальних моментів M_F і так званої "виправленої" епюри $\bar{M}_1 \cdot X_1$, тобто

$$M = M_F + \bar{M}_1 \cdot X_1.$$

На кожній з характерних ділянок накладаємо епюру M_F (рис. 6.7, д) на епюру $\bar{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 6.7, л).

Ділянка AC :	Переріз A: $M = 0 - 10 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$
	Переріз C: $M = 0 - 10 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$
Ділянка BC :	Переріз B: $M = 0 + 0 = 0$
	Переріз C: $M = -5 + 0 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}$
Ділянка CD :	Переріз C: $M = -15 + 0 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}$
	Переріз D: $M = -25 + 19,38 = -5,62 \text{ кН} \cdot \text{м}$
Ділянка DE :	Переріз D: $M = -25 + 19,38 = -5,62 \text{ кН} \cdot \text{м}$
	Переріз E: $M = -5 + 19,38 = 14,38 \text{ кН} \cdot \text{м}$

За одержаними значеннями будують кінцеву епюру згинальних моментів M (рис. 6.7, з).

11. Перевіряємо правильність розкриття статичної невизначеності системи шляхом статичної та деформаційної перевірки.

11.1. Статична перевірка полягає у виконанні умов рівноваги вирізаних вузлів рами.

Для цього вирізаємо вузол C і прикладаємо до нього згинальні моменти, поперечні сили та поздовжні внутрішні сили, що мають місце у цьому вузлі на відповідних суміжних характерних ділянках, які по відношенню до самого вузла є зовнішніми (рис. 6.6). Під дією цих силових факторів вузол C повинен знаходитись у рівновазі.

Напрями моментів відповідають розміщенню епюру на стиснутих волокнах.

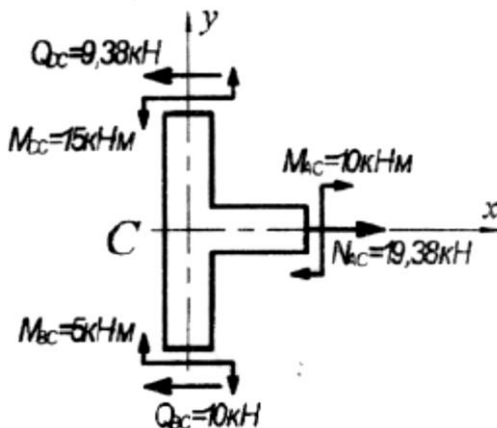


Рис. 6.8.

Рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum M_C(\vec{F}_k) &= 0; & -M_{AC} - M_{BC} + M_{DC} &= 0; & -10 - 5 + 15 &= 0. \\ \sum F_{kx} &= 0; & N_{AC} - Q_{DC} - Q_{BC} &= 0; & 19,38 - 9,38 - 10 &= 0. \\ \sum F_{ky} &= 0.\end{aligned}$$

Бачимо, що рівняння рівноваги задовольняються і вирізаний вузол знаходиться у рівновазі.

11.2. Деформаційна перевірка правильності розкриття статичної невизначеності системи.

Вона передбачає відсутність переміщення перерізу А у напрямі дії сили X_1 .

Для знаходження горизонтального переміщення перерізу А необхідно способом Верещагіна перемножити кінцеву епюру згинальних моментів M (рис. 6.7, з) на одиничну епюру $\bar{M}_1$ (рис. 6.7, є).

Перемноження епюр можна здійснити різними способами, а саме:

$$\begin{aligned}EI\Delta_{1F} &= M \cdot \bar{M}_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 14,38 \cdot 1\right) \cdot [1] - \left(\frac{1}{2} \cdot 5,62 \cdot 1\right) \cdot [1] - \\ &- (5,62 \cdot 1) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 1\right] - \left(\frac{1}{2} \cdot 9,38 \cdot 1\right) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1\right] = 7,19 - 2,81 - 2,81 - 1,56 = 0,01\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}EI\Delta_{1F} &= M \cdot \bar{M}_1 = (M_F + \bar{M}_1 \cdot X_1) \cdot \bar{M}_1 = M_F \cdot \bar{M}_1 + (\bar{M}_1 \cdot X_1) \cdot \bar{M}_1 = \\ &= -\frac{155}{6} + \left(\frac{1}{2} \cdot 19,38 \cdot 1\right) \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 1\right] + (19,38 \cdot 1) \cdot [1] = \\ &= -\frac{155}{6} + \frac{19,38}{3} + 19,38 = -25,83 + 6,46 + 19,38 = 0,01.\end{aligned}$$

З допомогою формули перемноження трапецій (6.6):

$$\begin{aligned}EI\Delta_{1F} &= M \cdot \bar{M}_1 = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc) = \\ &= \frac{1}{6}(2 \cdot 15 \cdot 0 - 2 \cdot 5,62 \cdot 1 - 15 \cdot 1 + 5,62 \cdot 0) + \\ &+ \frac{1}{6}(2 \cdot 14,38 \cdot 1 - 2 \cdot 5,62 \cdot 1 + 14,38 \cdot 1 - 5,62 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{6}(0 - 11,24 - 15 + 0 + 28,76 - 11,24 + 14,38 - 5,62) = 0,04.\end{aligned}$$

З допомогою способу Сімпсона-Карнаухова

$$EI_z \Delta_{IF} = \frac{1}{6} (14,38 \cdot 1 + 4 \cdot 4,38 \cdot 1 - 5,62 \cdot 1) + \\ + \frac{1}{6} (-5,62 \cdot 1 - 4 \cdot 10,31 \cdot 0,5 - 15 \cdot 0) = 6,66 \cdot 10^{-3}.$$

Оскільки при розрахунку системи зайві невідомі обчислюються з певною точністю, то й результати перевірки можуть мати деяку похибку – шукані переміщення не дорівнюють нулю. Тому при перевірці рекомендується окремо обчислювати суми додатних і від'ємних членів. Якщо різниця між обома сумами, виражена в процентах до меншої з них, невелика (до 5 %), то результат розрахунку можна вважати задовільним.

У нашому прикладі:

$$\frac{(-43,1 + 43,14)}{43,1} \cdot 100\% = \frac{0,04}{43,1} \cdot 100\% = 0,09\%.$$

12. Вибір двотаврового перерізу рами.

З епюри згинальних моментів (рис. 6.7, з) визначимо небезпечний переріз рами. Це буде переріз С ділянки CD, для якого згинальний момент $M_z = 15 \text{ кН м}$.

З умови міцності на згин визначаємо значення осевого моменту опору перерізу. За формулою (3.8)

$$W_z \geq \frac{\max M_z}{[\sigma]} = \frac{15 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 93,75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 93,75 \text{ см}^3$$

За таблицею сортаменту (див. додаток 2) для двотавру № 14 $W_z = 81,7 \text{ см}^3$, для двотавру № 16 – $W_z = 109 \text{ см}^3$. Вирахуємо перенапруження для двотавра № 14

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} = \frac{15 \cdot 10^3}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 183,6 \text{ МПа}$$

Перенапруження складає

$$\frac{183,6 - 160}{160} \cdot 100\% = 14,75\% > 5\%$$

Остаточно вибираємо двотавр № 16 для якого

$$W_z = 109 \text{ см}^3; \quad I_z = 873 \text{ см}^4.$$

13. Визначення вказаного в умові задачі переміщення.

Визначимо вертикальне переміщення перерізу D. Для цього скористаємося способом Верещагіна.

У напрямі шуканого переміщення прикладаємо одиничну силу $\bar{X}_1 = 1$ і будуємо одиничну епюру $\bar{M}_1$ (рис. 6.7, к).

Способом Верещагіна перемножуємо епюру згинальних моментів M (рис. 6.7, з) на одиничну епюру $\bar{M}_1$, (рис. 6.7, к).

$$EI_z w_D = \left(\frac{1}{2} \cdot 14,38 \cdot 1 \right) \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \right] - \left(\frac{1}{2} \cdot 5,62 \cdot 1 \right) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \right] = 4,79 - 0,94 = 3,85$$

Звідси:

$$w_D = \frac{3,85 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,2 \text{ мм.}$$

Знак "+" означає, що напрям переміщення співпадає з напрямом одиничного силового фактору.

Примітка. Якщо в умові задачі необхідно знайти кут повороту вказаного перерізу, то замість одиничної сили в напрямі шуканого кутового переміщення прикладають одиничний момент $\bar{M}_1 = 1$. Будують одиничну епюру згинальних моментів $\bar{M}_1 = 1$ і перемножують способом Верещагіна на епюру згинальних моментів M . Одержаний результат необхідно розділити на жорсткість поперечного перерізу.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які системи називаються статично невизначеними?
2. Канонічні рівняння методу сил.
3. Способи обчислення інтегралу Мора.
4. Графоаналітичний спосіб Верещагіна.
5. Спосіб перемноження трапецій.
6. Спосіб Сімпсона-Карнаухова.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розрахунок статично невизначених рам

Для заданої рами (рис. 6.9, табл. 6.1) побудувати епюри згинальних моментів, поперечних сил і поздовжніх сил. Підібрати двотавровий переріз і визначити вказане в таблиці переміщення перерізу A . Допустиме напруження для матеріалу $[\sigma]=160$ МПа; $l=1$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

З двох зв'язків 1 і 2 необхідно залишити той, який вказаний в таблиці.

Таблиця 6.1

Варіант	$q, \kappa H/m$	$F, \kappa H$	$M, \kappa Hm$	Переміщення	Номер зв'язку
0	10	30	40	w_A верт	1
1	15	25	-35	w_A гор	2
2	20	20	30	θ_A	2
3	25	15	-25	θ_A	1
4	-10	-30	20	w_A гор	2
5	-15	-25	-20	w_A верт	1
6	-20	10	-40	w_A гор	1
7	-25	20	35	θ_A	2
8	30	-10	-30	θ_A	1
9	-30	-20	25	w_A верт	2

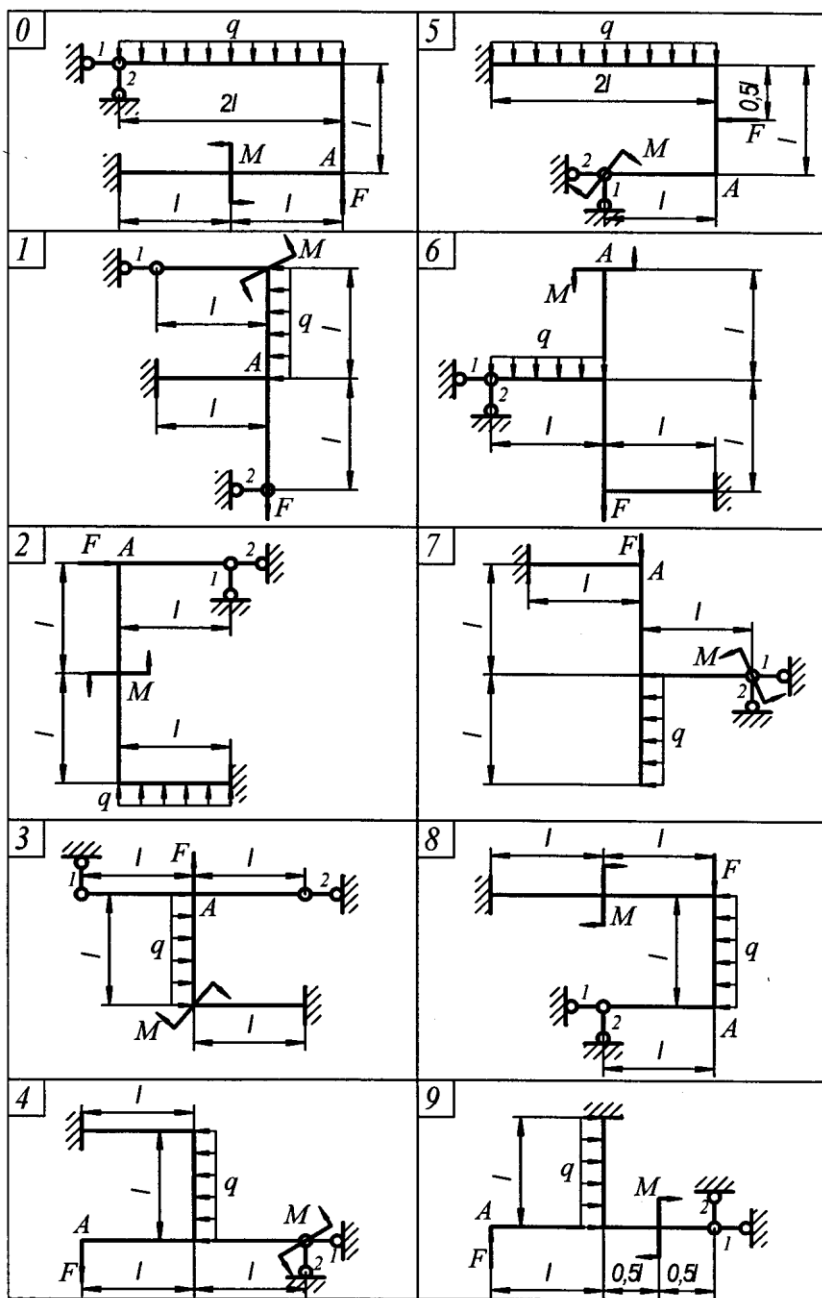


Рис. 6.9

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ РОБОТИ

Виконання розрахунково-проектувальної роботи оцінюється за 5 -бальною системою з наступним переводом у 100-бальну.

Оцінка *«відмінно»* – здобувач правильно виконав розрахунково-проектувальну роботу у повному обсязі з відповідними розрахунками та висновками.

Оцінка *«добре»* – здобувач правильно виконав розрахунково-проектувальну роботу у повному обсязі, але допустив помилки у розрахунках або в обґрунтуванні висновків.

Оцінка *«задовільно»* – здобувач застосував алгоритм розв’язання типової задачі, але допустив помилки у розрахунках та/або у висновках.

Оцінка *«незадовільно»* – здобувач не виконав.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ТА РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Огородніков В.А., Сивак І.О., Бабак М.В. Опір матеріалів з елементами теорії пластичності. Під загальною редакцією В.А. Огороднікова. Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 100 с.
2. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257 с.
3. Довбуш Т.А., Хомик Н.І., Довбуш А.Д. Опір матеріалів. Конкурсні задачі з прикладами розв’язування: навчальний посібник. Частина 2. Тернопіль: ФОП Паляниця В.М, 2023. – 192 с.
4. Банах А.В., Черненко Т.В. Опір матеріалів: Навчальний посібник для студентів ЗДІА інженерних спеціальностей денної та заочної форм навчання / А. В. Банах, Т. В. Черненко; Запорізька державна інженерна академія. – Запоріжжя: ЗДІА, 2017. – 265 с.
5. Опір матеріалів : навчальний посібник : у 2 ч. / Д.О. Жигилій, С.М. Верещака, С.С. Некрасов, А.Ю. Довгополов. – Суми : Сумський державний університет, 2022. – Ч. 1. – 159 с.
6. Матисіна Н.В. Конспект лекцій з дисципліни «Технічна механіка» розділ «Опір матеріалів» [Електронний ресурс] / Н.В. Матисіна, С.В. Онищенко – Дніпро: НТУ «Дніпровська політехніка», 2020 – 75 с.
7. Чихладзе Е.Д., Кітов Ю.П. Вибрані задачі з опору матеріалів з розв’язаннями: Навч. посібник. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 231 с., рис. 210. ISBN 978-966-2033-62-5.
8. Методичні вказівки до розрахунково-проектувальних завдань з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів усіх спеціальностей денної та вечірньої форм навчання. Частина I / Укл. Г.Є.Візерська, Л.В.Рогозіна, В.І.Ковальчук, К.М.Рудаков. – К.: КГП, 1993. – 52 с.
9. Методичні вказівки до розрахунково-проектувальних завдань з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів усіх спеціальностей денної та вечірньої форм навчання. Ч.П I Укл. Г.Є. Візерська, Л.В.Рогозіна, В.І. Ковальчук та ін. – К.: КПІ, 1993. – 32 с.
10. Методичні вказівки до лабораторних робіт «Опір матеріалів». Укл. Ігнатишин М.І. – Мукачево: МДУ, 2022. – 38 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Титульна сторінка студентського звіту

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ІНЖЕНЕРІЇ, ТЕХНОЛОГІЇ ТА ПРОФЕСІЙНОЇ ОСВІТИ

РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНА РОБОТА
З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Група ПМ-2

Студент Забишний Сергій

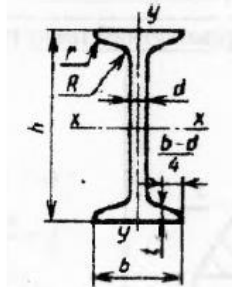
Шифр - 17

Викладач

Максютова О.В.

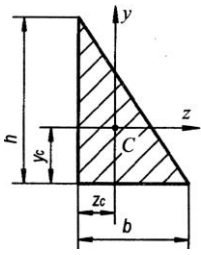
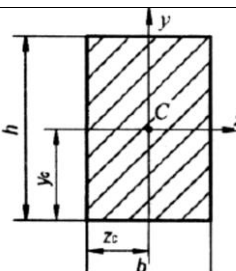
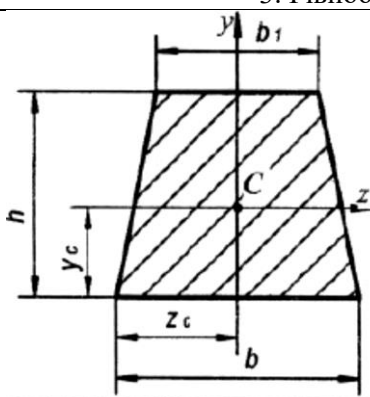
Мукачево - 2024

Балки двотаврові (ГОСТ 8239-72)



Номер профілю	Розміри, мм.				Площа поперечного перерізу A , см^2	Моменти інерції, см^4		Моменти опору, см^3		Радіуси інерції, см		S_{max} , см^3	Маса 1 м., кг
	h	b	d	t		J_x	J_y	W_x	W_y	i_x	i_y		
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	17,9	39,7	6,49	4,06	1,22	23,0	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	27,9	58,4	8,72	4,88	1,38	33,7	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,1	572	41,9	81,7	11,5	5,73	1,55	46,8	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	58,6	109	14,5	6,57	1,70	62,3	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	82,6	143	18,4	7,42	1,88	81,4	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	114	159	22,8	7,51	2,12	89,8	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	115	184	23,1	8,28	2,07	104	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	155	203	28,2	8,37	2,32	114	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	157	232	28,6	9,13	2,27	131	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	206	254	34,3	9,22	2,50	143	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	198	289	34,5	9,97	2,37	163	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	260	317	41,6	10,1	2,63	178	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	260	371	41,5	11,2	2,54	210	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	337	407	50,0	11,3	2,80	229	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	337	472	49,9	12,3	2,69	268	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	436	518	60,1	12,5	2,95	292	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	419	597	59,9	13,5	2,79	339	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	516	743	71,1	14,7	2,89	423	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	667	953	86,1	16,2	3,03	545	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	808	1231	101	18,1	3,09	708	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1043	1589	123	19,9	3,23	919	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	1356	2035	151	21,8	3,39	1181	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	1725	2560	182	23,6	3,54	1491	108

Геометричні характеристики деяких перерізів

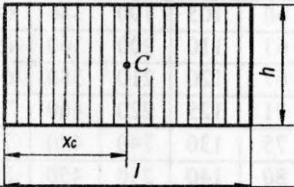
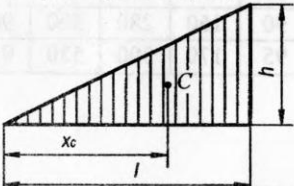
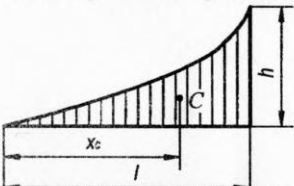
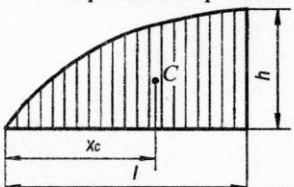
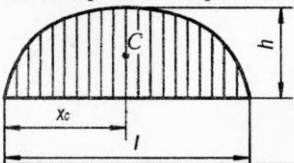
1. Прямокутний трикутник	
	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$ $z_c = \frac{1}{3} b; \quad y_c = \frac{1}{3} h$ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{36}; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$ $i_z^2 = \frac{I_z}{A}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A}$
2. Прямокутник	
	$A = b \cdot h$ $z_c = \frac{1}{2} b; \quad y_c = \frac{1}{2} h$ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$ $i_z^2 = \frac{I_z}{A}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A}$
3. Рівнобедрена трапеція	
	$A = \frac{1}{2} (b_1 + b) \cdot h$ $z_c = \frac{b}{2}; \quad y_c = \frac{h}{3} \cdot \frac{b + 2b_1}{b + b_1}$ $I_z = \frac{h^3 (b^2 + 4b \cdot b_1 + b_1^2)}{36(b + b_1)}$ $I_y = \frac{h}{48} \cdot \frac{b^4 - b_1^4}{b - b_1}$ $i_z^2 = \frac{I_z}{A}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A}$

Примітка.

A – площа перерізу;

 z_c, y_c – координати центра маси; I_z, I_y – осеві моменти інерції; i_y^2, i_z^2 – квадрати радіусів інерції.

Формули для визначення площ і координат центрів мас деяких епюр

Форма епюри	Площа епюри ω	Координата центра ваги епюри x_c
1. Прямокутник 	$\omega = l \cdot h$	$x_c = \frac{1}{2}l$
2. Прямокутний трикутник 	$\omega = \frac{1}{2}l \cdot h$	$x_c = \frac{2}{3}l$
3. Квадратична парабола 	$\omega = \frac{1}{3}l \cdot h$	$x_c = \frac{3}{4}l$
4. Квадратична парабола 	$\omega = \frac{2}{3}l \cdot h$	$x_c = \frac{5}{8}l$
5. Квадратична парабола 	$\omega = \frac{2}{3}l \cdot h$	$x_c = \frac{1}{2}l$

**Рекомендований ряд нормальних лінійних розмірів в діапазоні від
1 до 950 мм за Ra 40 (СТ PEB 514-77)**

1,0	1,8	3,2	5,6	10,5	19	34	56	100	180	320	560
1,05	1,9	3,4	6,0	11	20	36	60	105	190	340	600
1,1	2,0	3,6	6,3	11,5	21	38	63	110	200	360	630
1,15	2,1	3,8	6,7	12	22	40	67	120	210	380	670
1,2	2,2	4,0	7,1	13	24	42	71	125	220	400	710
1,3	2,4	4,2	7,5	14	25	44	75	130	240	420	750
1,4	2,5	4,5	8,0	15	26	45	80	140	250	450	800
1,5	2,6	4,8	9,0	16	28	48	85	150	260	480	850
1,6	2,8	5,0	9,5	17	30	50	90	160	280	500	900
1,7	3,0	5,3	10,0	18	32	53	95	170	300	530	950

Навчально-методичне видання

Юрій Юрійович Жигуц
Олена Володимирівна Максютова

ОПР МАТЕРІАЛІВ:

**РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНІ
РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ**

Навчально-методичний посібник

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 131 «Прикладна механіка»

Підписано до друку 01.05.2024.

Формат 60х84/16. Умовн. друк. арк. 3,75.

Облік.-вид. арк. 3,75. Друк офсетний. Зам. № 9. Наклад 100.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції ДК № 6984 від 20.11.2019 р.

Редакційно-видавничий відділ МДУ,
89600 м. Мукачево, вул. Ужгородська. 26



МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26

тел./факс +380-3131-21109

Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua

E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua

Веб-сайт Інституційного репозитарію Наукової бібліотеки МДУ: <http://dspace.msu.edu.ua:8080>

Веб-сайт Наукової бібліотеки МДУ: <http://msu.edu.ua/library/>