

НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

ISSN 2616-7700 (print)
2708-9568 (online)



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 43 № 2

2023

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 43 № 2

Ужгород 2023

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2023. Т. 43, № 2. 167 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук, доц. (Україна).

Технічний секретар — Порохнавець І. М. (Україна).

Члени редакційної колегії: Бабич С. Ю. — д.т.н., проф. (Україна), Бовді В. А. — док. філ. з мат., проф. (ОАЕ), Бондаренко В. М. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Бортош М. Ю., к.ф.-м.н. (Україна), Гече Ф. Е. — д.т.н., проф. (Україна), Гуляницький Л. Ф. — д.т.н., с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — д.т.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Капустян О. А. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Кондрук Н. Е. — к.т.н., доц. (Україна), Король І. І. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Маринець В. В. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець К. В. — к.ф.-м.н., доц. (Нідерланди), Млавець Ю. Ю. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Моклячук М. П. — д.ф.-м.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Мулеса П. П. — к.т.н., доц. (Україна), Поліщук В. В. — д.т.н., доц. (Україна), Рейтій О. К. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Ронто А. М. — д.ф.-м.н., проф. (Чехія), Семенова Н. В. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Снитюк В. Є. — д.т.н., проф. (Україна), Тилищак О. А. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Шаркаді М. М. — к.екон.н., доц. (Україна), Щобак Н. М. — к.ф.-м.н., проф. (Чехія).

Рекомендовано до друку: Редакційно-видавничою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №7 від 24 жовтня 2023 р.), Вченою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №9 від 26 жовтня 2023 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2022 = 81.67.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2023

© Ужгородський національний університет,
2023

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 43 No 2

Uzhhorod 2023

UDC 51+001

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2023. Vol. 43, No 2. 167 p.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — I. Porokhnavets (Ukraine).

Members: S. Babich, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), O. Kapustyan, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), I. Korol, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Marynets, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), Yu. Mlavets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), P. Mulesa, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 7 of October 24, 2023) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 9 of October 24, 2023)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2022 = 81.67.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. *Балога С. І., Гапак О. М., Тютюнникова Г. С., Самусь Є. І., Тютюнников С. В.* Про зведення одного класу систем диференціальних рівнянь до L -діагонального вигляду 7
2. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Про матричні зображення наднапівгруп комутативної напівгрупи третього порядку без дільників нуля 15
3. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Обмежені розв'язки одного нелінійного диференціального рівняння в банаховому просторі 22
4. *Клесов О.І., Колеснік О. В.* Швидкість збіжності у підсиленому законі великих чисел для рекордів у F^α схемі 29
5. *Крижля Я. А.* Про деякі властивості вільних лівих n -тринільпотентних тріодів 34
6. *Маринець В. В., Когутич О. І., Питьовка О. Ю.* Один підхід дослідження математичної моделі поширення вологи у пористих середовищах 42
7. *Стаматієва В. В.* Узагальнення асимптотичного розкладу Рамануджана-Ватсона-Кнута 52
8. *Стьопочкіна М. В.* Коефіцієнти транзитивності частково впорядкованих множин мінімаксно ізоморфних суперкритичній непримітивній множині 62
9. *Раєвська М. Ю.* Про напівдистрибутивні локальні майже-кільця 67
10. *Хаць Р. В.* Про інтегральне зображення одного класу цілих функцій експоненційного типу 72

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. *Глухов Ю. П., Бабич С. Ю., Млавець Ю. Ю.* Реакція шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження 82
2. *Зінченко П. П.* Рекурентний аналіз самоподібних часових рядів 96
3. *Ічанська Н. В., Лисенко М. В.* Дослідження динаміки видобутку вугілля в Україні з використанням методів нечіткого моделювання 107
4. *Ічанська Н. В., Лозицький Д. Ю.* Використання математичного апарату та ІКТ для розв'язання прикладних задач 119
5. *Ліп'яніна-Гончаренко Х. В.* Метод генерування рекламного зображення на основі відео потоку 130
6. *Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В.* Еквациональне описання функціонально повних алгебр 136
7. *Поліщук В. В., Білак Ю. Ю., Шафар А. А., Шпак О. І.* Гібридна математична модель оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону 144
8. *Сабов Д. П., Шаркаді М. М., Сабо Т. Ш.* Використання нечітких моделей у дослідженнях сейсмологічних процесів регіону 155

21. Zhuchok, A. V., & Kryklya, Y. A. (2022). The least left n -trinilpotent congruence on the free trioid. *Algebra Univers*, 83(4). <https://doi.org/10.1007/s00012-021-00758-x>
22. Zhuchok, A.V., Zhuchok, Yul.V. (2023). Free k -nilpotent n -tuple semigroups. *Commun. Algebra*, 51, no. 9, 3972–3980. <https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2195000>.
23. Zhuchok, Yul. V. (2015). Free n -nilpotent trioids. *Mat. Stud.*, 43(1), 3–11.
24. Zhuchok, Yul. V. (2015). Free rectangular tribands. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat.*, 78(2), 61–73.
25. Zhuchok, Y. V. (2021). Free abelian trioids. *Algebra Discrete Math.*, 32(1), 147–160. <https://doi.org/10.12958/adm1860>
26. Zhuchok, Y. V. (2022). New models for the free commutative monogenic trioid and its endomorphism monoid. *Semigroup Forum*, 105, 575–581. <https://doi.org/10.1007/s00233-022-10313-2>
27. Zhuchok, Y. V. (2016). The endomorphism monoid of a free trioid of rank 1. *Algebra Univers.*, 76(3), 355–366. <https://doi.org/10.1007/s00012-016-0392-1>

Одержано 15.10.2023

УДК 517.946

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).42-51](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).42-51)**В. В. Маринець¹, О. І. Когутич², О. Ю. Питьовка³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор

vasyl.marynets@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2455-2833>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
oksana.kohutyich@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3094-2467>

³ Мукачівський державний університет,
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

O.Pitovka@mail.msu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0127-5032>**ОДИН ПІДХІД ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ПОШИРЕННЯ ВОЛОГИ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Будується одна модифікація двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі, яка описує поширення вологи у пористих середовищах. Одержані достатні умови існування, єдиності та регулярності і знакосталості шуканого розв'язку, доведено теореми про диференціальні нерівності, дається апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку розглядуваної задачі.

Ключові слова: модифікація двостороннього методу, функції порівняння, єдиність розв'язку, диференціальні рівняння в частинних похідних, наближений розв'язок

1. Вступ. Як відомо, процеси переносу вологи в ґрунтах, фільтрації рідини в середовищах з подвійною пористістю, передачі тепла в гетерогенному середовищі описуються скалярним рівнянням вигляду [1, 2]

$$m(t, x)D^{(1.2)}u(t, x) + \alpha(t, x)D^{(1.1)}u(t, x) + d(t, x)D^{(0.1)}u(t, x) + \eta(t, x)D^{(0.2)}u(t, x) + a(t, x)D^{(1.0)}u(t, x) + b(t, x)u(t, x) = g(t, x), \quad (1)$$

де коефіцієнти диференціального рівняння в частинних похідних (ДРЧП) є неперервними функціями у заданій області $D \in \mathbb{R}^2$. Крайові задачі у випадку рівняння (1) при різних вихідних даних розглядалися у багатьох роботах, зокрема і в [2]–[4].

У роботі [5] та монографії [6] досліджуються задачі з локальними та нелокальними крайовими умовами у випадку нелінійного ДРЧП вигляду

$$D^{(2.1)}u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), D^{(1.0)}u(t, x), D^{(0.1)}u(t, x), D^{(1.1)}u(t, x), D^{(0.2)}u(t, x); \quad (2)$$

при певних умовах, накладених на праву частину рівняння (2) та область відшукування розв'язку розглядуваних крайових задач, одержані достатні умови існування, єдиності, знакосталості шуканого розв'язку та будуються методи знаходження їх наближених розв'язків.

У даній роботі продовжуються дослідження приведені в [5, 6] для нового класу крайових задач і покращуються результати, раніше відомі.

2. Постановка задачі та основні означення. Розглянемо крайову задачу: у просторі функцій $C^*(\bar{D}_0) := C^{(1.2)}(D_0) \cap C(\bar{D}_0)$, $D_0 = \{(t, x) | t \in (0, b), x \in (0, a)\}$, знайти розв'язок ДРЧП

$$\begin{aligned} D^{(1.2)}u(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.2)}u(t, x) + a_2(t, x)D^{(1.1)}u(t, x) = \\ f(t, x, u(t, x), D^{(1.0)}u(t, x), D^{(0.1)}u(t, x)) := f[u(t, x)], \end{aligned} \quad (3)$$

який задовольняє крайові умови

$$u(0, x) = T(x), \quad x \in [0, a], \quad (4)$$

$$D^{(0.1)}u(t, 0) = \psi(t), \quad u(t, a) = \varphi(t), \quad t \in [0, b],$$

де $D^{(k)}u(t, x) : D_0 \rightarrow D_k \subset \mathbb{R}$, $k = (k_1, k_2)$, $k_r = 0, 1, r = 1, 2$; $k_1 + k_2 < 2$, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $B = D_0 \times \prod_{k_1, k_2} D_{(k_1, k_2)} \in \mathbb{R}^5$.

Надалі будемо вважати, що задані функції $T(x) \in C^2[0, a]$, $\varphi(t), \psi(t) \in C^1[0, b]$, $0 \geq a_1(t, x) \in C^{(0.1)}(D_0)$, $a_2(t, x) \in C^{(1.0)}(D_0)$ та виконуються умови узгодженості

$$T'(0) = \psi(0), \quad T(a) = \varphi(0), \quad (5)$$

а права частина рівняння (3) $f[u(t, x)] \in C(\bar{B})$.

Неважко переконатися у справедливості наступної леми.

Лема 1. *Якщо $a_1(t, x) \in C^{(0.1)}(D_0)$, $a_2(t, x) \in C^{(1.0)}(D_0)$ і виконується умова*

$$D^{(0.1)}a_1(t, x) = D^{(1.0)}a_2(t, x), \quad (6)$$

то крайова задача (3)–(5) еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню вигляду

$$u(t, x) = \Phi(t, x) + TF[u(\eta, \zeta)], \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) := & \varphi(t) + \int_a^x T'(\xi) \exp\left(\int_t^0 a_1(\eta, \xi) d\eta\right) d\xi - \\ & - T'(0) \int_a^x \exp\left(\int_t^0 a_1(\tau, \xi) d\tau + \int_\xi^0 a_2(0, \tau) d\tau\right) d\xi + \\ & + \psi(t) \int_a^x \exp\left(\int_\xi^0 a_2(t, \tau) d\tau\right) d\xi, \\ TF[u(\eta, \zeta)] := & \int_a^x \int_0^t \int_0^\xi K(t, \xi, \eta, \zeta) F[u(\eta, \zeta)] d\zeta d\eta d\xi, \\ K(t, x; \eta, \xi) := & \exp\left(\int_t^\eta a_1(\tau, x) d\tau + \int_x^\xi a_2(\eta, \tau) d\tau\right), \end{aligned}$$

$$F[u(t, x)] := f[u(t, x)] + [D^{(0.1)}a_1(t, x) + a_1(t, x)a_2(t, x)] D^{(0.1)}u(t, x).$$

Очевидно, що функція $\Phi(t, x) \in C^*(\overline{D}_0)$ і задовольняє крайові умови (4), (5), а отже, ввівши нову функцію $z(t, x) := u(t, x) - \Phi(t, x)$ ми зводимо задачу (3)–(5) до задачі з однорідними крайовими умовами. Тому, не зменшуючи загальності подальших міркувань, будемо вважати, що $T(x) = 0$, $\varphi(t) = \psi(t) = 0$.

Означення 1. Будемо говорити, що $F[u(t, x)] \in C_2^*(\overline{B})$, якщо функція $F[u(t, x)]$ задовольняє наступні умови [7, 8]:

1) $F[u(t, x)] \in C(\overline{B})$,

2) в просторі функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^8$, $\text{Pr}_{tOx}\overline{B}_1 = \overline{D}_0$, існує така функція $H(t, x, u(t, x), D^{(1,0)}u(t, x), D^{(0,1)}u(t, x); v(t, x), D^{(1,0)}v(t, x), D^{(0,1)}v(t, x)) := H[u(x, y); v(x, y)]$, що:

(а) $H[u(t, x); u(t, x)] \equiv F[u(t, x)]$;

(б) для довільної з простору $C^{(k_1, k_2)}(\overline{D}_0)$ пари функцій $u(t, x), v(t, x) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умову $D^{(k_1, k_2)}[u(t, x) - v(t, x)] \geq (\leq) 0$, $k_1 = 0, 1$, $k_2 = 1(k_2 = 0)$, $k_1 + k_2 < 2$, $(t, x) \in \overline{D}_0$, в області \overline{B}_1 виконується нерівність

$$H[u(t, x); v(t, x)] - H[v(t, x); u(t, x)] \geq 0; \quad (8)$$

3) функція $H[u(t, x); v(t, x)]$ в області \overline{B}_1 задовольняє умову Ліпшиця, тобто, для всяких з простору $C^*(\overline{D}_0)$ функцій $u_r(t, x), v_r(t, x)$, $r = 1, 2$, виконується умова

$$\begin{aligned} & |H[u_1(t, x); u_2(t, x)] - H[v_1(t, x); v_2(t, x)]| \leq \\ & \leq \frac{1}{6} L \sum_{r=1}^2 (|w_r(t, x)| + |D^{(1,0)}w_r(t, x)| + |D^{(0,1)}w_r(t, x)|), \end{aligned}$$

де $w_r(t, x) := u_r(t, x) - v_r(t, x)$, $r = 1, 2$, $\frac{1}{6} L$ — стала Ліпшиця.

Очевидно, якщо функція $F[u(t, x)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всіх своїх аргументах, розпочинаючи з третього, то $F[u(t, x)] \in C_2^*(\overline{B})$ [6]. Обернене твердження несправедливе.

Нехай функції $Z_p(t, x), V_p(t, x) \in C^k(\overline{D}_0)$ належать області \overline{B}_1 і $p \in \mathbb{N}_0$.

Введемо позначення:

$$W_p(t, x) = Z_p(t, x) - V_p(t, x), \quad (t, x) \in \overline{D}_0,$$

$$f^p(t, x) = H[Z_p(t, x); V_p(t, x)], \quad \bar{f}^p(t, x) = H[V_p(t, x); Z_p(t, x)],$$

$$D^k \bar{Z}_p(t, x) := D^k Z_p(t, x) - q_p^k(t, x) D^k W_p(t, x),$$

$$D^k \bar{V}_p(t, x) := D^k V_p(t, x) + c_p^k(t, x) D^k W_p(t, x),$$

$$k = (k_1, k_2), \quad k_r = 0, 1; \quad r = 1, 2, \quad k_1 + k_2 < 2, \quad p \in \mathbb{N}_0,$$

$$\bar{f}^p(t, x) := H[\bar{Z}_p(t, x); \bar{V}_p(t, x)], \quad \bar{f}_p(t, x) = H[\bar{V}_p(t, x); \bar{Z}_p(t, x)],$$

$$\omega_p(t, x) := \int_0^x f_p(t, \xi) K(t, x; t, \xi) d\xi, \quad \omega^p(t, x) := \int_0^x \bar{f}^p(t, \xi) K(t, x; t, \xi) d\xi,$$

$$\alpha_p(t, x) := D^{(1.1)}Z_p(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}Z_p(t, x) - \omega^p(t, x), \quad (9)$$

$$\beta_p(t, x) := D^{(1.1)}V_p(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}V_p(t, x) - \omega_p(t, x), \quad (t, x) \in \bar{D}_0,$$

$q_p^k(t, x), c_p^k(t, x) \in$ довільними із простору $C(\bar{D}_0)$ функціями, які задовольняють умови

$$0 \leq q_p^k(t, x) \leq 0,5; \quad 0 \leq c_p^k(t, x) \leq 0,5; \quad (10)$$

$$p \in \mathbb{N}_0; \quad (t, x) \in \bar{D}_0; \quad k_r = 0,1; \quad k_1 + k_2 < 2.$$

3. Побудова модифікації двостороннього методу дослідження задачі (3)–(5) [8]. Побудуємо послідовності функцій $\{Z_p(t, x)\}, \{V_p(t, x)\}$ згідно формул

$$Z_{p+1}(t, x) = T\bar{f}^p(\eta, \zeta), \quad V_{p+1}(t, x) = T\bar{f}_p(\eta, \zeta), \quad (t, x) \in \bar{D}_0, \quad (11)$$

де функції нульового наближення $Z_0(t, x), V_0(t, x) \in C^{(1.1)}(\bar{D}_0)$, які належать області \bar{B}_1 вибираємо таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$\alpha_0(t, x) \geq 0, \quad \beta_0(t, x) \leq 0, \quad D^{(k_1, k_2)}W_0(t, x) \geq (\leq)0, \quad (12)$$

$$(t, x) \in \bar{D}_0, \quad k_1 = 0,1; \quad k_2 = 1 \quad (k_2 = 0), \quad k_1 + k_2 < 2.$$

Означення 2. Функції $Z_0(t, x), V_0(t, x) \in C^{(1.1)}(\bar{D}_0)$, які належать області \bar{B}_1 і задовольняють крайові умови (4) та нерівності (12), називаються функціями порівняння задачі (3)–(5).

Зауважимо, що із (11) маємо

$$D^{(1.1)}Z_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}Z_{p+1}(t, x) = \bar{\omega}^p(t, x),$$

$$D^{(1.1)}V_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}V_{p+1}(t, x) = \bar{\omega}_p(t, x).$$

Таким чином із (9) та (11) одержимо

$$\begin{aligned} \alpha_{p+1}(t, x) &= D^{(1.1)}Z_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}Z_{p+1}(t, x) - \omega^{p+1}(t, x) = \\ &= \bar{\omega}^p(t, x) - \omega^{p+1}(t, x), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\beta_{p+1}(t, x) = \bar{\omega}_p(t, x) - \omega_{p+1}(t, x),$$

$$\alpha_p(t, x) = D^{(1.1)}[Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] +$$

$$+ a_1(t, x)D^{(0.1)}[Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] + \bar{\omega}^p(t, x) - \omega^p(t, x), \quad (14)$$

$$\beta_p(t, x) = D^{(1.1)}[V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] +$$

$$+ a_1(t, x)D^{(0.1)}[V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] + \bar{\omega}_p(t, x) - \omega_p(t, x),$$

$$\begin{cases} W_{p+1}(t, x) = T\left(\bar{f}^p(\eta, \zeta) - \bar{f}_p(\eta, \zeta)\right), \\ D^{(1.1)}W_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}W_{p+1}(t, x) = \bar{\omega}^p(t, x) - \bar{\omega}_p(t, x). \end{cases} \quad (15)$$

Відмітимо, що в силу (10)

$$D^{(k_1, k_2)} V_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} \bar{V}_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} \bar{Z}_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} Z_0(t, x),$$

$$k_1 = 0, 1; k_2 = 1 (k_2 = 0), k_1 + k_2 < 2, (t, x) \in \bar{D}_0,$$

тобто, якщо $D^k Z_0(t, x)$, $D^k V_0(t, x) \in \bar{B}_1$, то $D^k \bar{Z}_0(t, x)$ та $D^k \bar{V}_0(t, x)$ також належить області \bar{B}_1 . Із (14), враховуючи першу із умов (4) маємо

$$\begin{aligned} & D^{(0,1)} [Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] = \\ & = \int_0^t [\alpha_p(\eta, x) + \omega^p(\eta, x) - \bar{\omega}^p(\eta, x)] \exp \left(\int_t^\eta [a_1(\tau, x) d\tau] \right) d\eta := \bar{\alpha}_p(t, x), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} & D^{(0,1)} [V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] = \\ & = \int_0^t [\beta_p(\eta, x) + \omega_p(\eta, x) - \bar{\omega}_p(\eta, x)] \exp \left(\int_t^\eta [a_1(\tau, x) d\tau] \right) d\eta := \bar{\beta}_p(t, x), \end{aligned}$$

звідки при $p = 0$, враховуючи (12), (10) та (8) одержимо

$$D^{(0,1)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] \geq 0, D^{(0,1)} [V_0(t, x) - V_1(t, x)] \leq 0.$$

Інтегруючи останні нерівності по x від x до a та враховуючи крайові умови (4), маємо

$$Z_0(t, x) - Z_1(t, x) \leq 0, V_0(t, x) - V_1(t, x) \geq 0.$$

Але тоді із (14) випливає, що

$$\begin{aligned} & D^{(1,1)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] = \\ & = \alpha_0(t, x) - a_1(t, x) D^{(0,1)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] + \omega^0(t, x) - \bar{\omega}^0(t, x) \geq 0, \end{aligned}$$

$$D^{(1,1)} [V_0(t, x) - V_1(t, x)] \leq 0,$$

а отже

$$D^{(1,0)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] \leq 0, D^{(1,0)} [V_0(t, x) - V_1(t, x)] \geq 0.$$

Із (15) враховуючи, що $\bar{f}^0(t, x) - \bar{f}_0(t, x) \geq 0$ при $p = 0$ маємо

$$D^{(k_1, k_2)} W_1(t, x) \geq (\leq) 0, k_1 = 0, 1; k_2 = 1 (k_2 = 0), k_1 + k_2 < 2, (t, x) \in \bar{D}_0.$$

Таким чином мають місце нерівності

$$D^{(k_1, k_2)} V_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} V_1(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} Z_1(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} Z_0(t, x),$$

а отже $D^k Z_1(t, x)$, $D^k V_1(t, x) \in \bar{B}_1$. Але тоді із (13) при $p = 0$ маємо

$$\alpha_1(t, x) = \bar{\omega}^0(t, x) - \omega^1(t, x) = \int_0^x (\bar{f}^0(t, \xi) - f^1(t, \xi)) K(t, x; t, \xi) d\xi,$$

$$\beta_1(t, x) = \int_0^x (\bar{f}_0(t, \xi) - f_1(t, \xi)) K(t, x; t, \xi) d\xi.$$

Вибираючи довільні з простору $C(\bar{D}_0)$ функції $q_0^k(t, x)$ та $c_0^k(t, x)$, які задовольняють умови (10) таким чином, щоб виконувались нерівності

$$\begin{aligned} D^k [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] - q_0^k(t, x) D^k W_0(t, x) &\geq (\leq) 0, \\ D^k [V_0(t, x) - V_1(t, x)] + c_0^k(t, x) D^k W_0(t, x) &\leq (\geq) 0, \\ k_2 = 1 \ (k_2 = 0), \ (t, x) \in \bar{D}_0, \end{aligned}$$

то із попередніх рівностей маємо $\alpha_1(t, x) \geq 0$, $\beta_1(t, x) \leq 0$, тобто побудовані функції $Z_1(t, x)$, $V_1(t, x)$ є також функціями порівняння крайової задачі (3)–(5). Беручи функції $Z_1(t, x)$ та $V_1(t, x)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування методом математичної індукції переконаємось, що якщо на кожному кроці ітерації (11) неперервні функції $q_0^k(t, x)$ та $c_0^k(t, x)$, які задовольняють умови (10), вибрати таким чином, щоб в області \bar{B}_1 виконувались нерівності

$$\begin{aligned} D^k [Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] - q_p^k(t, x) D^k W_p(t, x) &\geq (\leq) 0, \\ D^k [V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] + c_p^k(t, x) D^k W_p(t, x) &\leq (\geq) 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$(t, x) \in \bar{D}_0, \ k_1 = 0, 1, \ k_2 = 1 \ (k_2 = 0),$$

то для довільних $p \in \mathbb{N}$ матимемо

$$\begin{aligned} D^k V_p(t, x) \leq (\geq) D^k V_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k Z_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k Z_p(t, x); \\ (t, x) \in \bar{D}_0, \ k_2 = 1 \ (k_2 = 0), \ p \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Покажемо, що множина функцій $q_p^k(t, x)$ та $c_p^k(t, x)$, які задовольняють умови (10), (17), не порожня. Дійсно, позначимо:

$$\begin{aligned} \alpha_{p,1}(t, x) &:= \alpha_p(t, x) + \omega^p(t, x) - \bar{\omega}^p(t, x), \\ \alpha_{p,2}(t, x) &= \int_0^t \alpha_{p,1}(\eta, x) \exp \left(\int_t^\eta a_1(\tau, x) d\tau \right) d\eta, \\ \beta_{p,1}(t, x) &:= \beta_p(t, x) + \omega_p(t, x) - \bar{\omega}_p(t, x), \\ \beta_{p,2}(t, x) &= \int_0^t \beta_{p,1}(\eta, x) \exp \left(\int_t^\eta a_1(\tau, x) d\tau \right) d\eta, \\ \rho_{p,1}(t, x) &:= \alpha_{p,2}(t, x) - \beta_{p,2}(t, x) + D^{(0,1)} W_p(t, x), \\ \rho_{p,2}(t, x) &:= \alpha_{p,1}(t, x) - \beta_{p,1}(t, x) + D^{(1,1)} W_p(t, x). \end{aligned}$$

Лема 2. *Якщо виконуються умови Лемми 1 і функція $F[u(t, x)] \in C_2^*(\bar{B})$, а крайова задача (3)–(5) має функції порівняння, то множина функцій $q_p^k(t, x)$, $c_p^k(t, x)$, які задовольняють умови (10), (17), не порожня.*

Доведення. Дійсно, покладемо

$$q_p^{(0.1)}(t, x) = \frac{\alpha_{p,2}(t, x)}{\rho_{p,1}(t, x)}, \quad q_p(t, x) = \frac{\int_x^a \alpha_{p,2}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,1}(t, \xi) d\xi}, \quad q_p^{(1.0)}(t, x) = \frac{\int_x^a \alpha_{p,1}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,2}(t, \xi) d\xi},$$

$$c_p^{(0.1)}(t, x) = -\frac{\beta_{p,2}(t, x)}{\rho_{p,1}(t, x)}, \quad c_p(t, x) = -\frac{\int_x^a \beta_{p,2}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,1}(t, \xi) d\xi}, \quad c_p^{(1.0)}(t, x) = -\frac{\int_x^a \beta_{p,1}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,2}(t, \xi) d\xi},$$

$$(t, x) \in \overline{D}_0, \quad p \in \mathbb{N}_0.$$

Очевидно, таким чином вибрані функції $q_p^k(t, x)$ та $c_p^k(t, x)$, $k = (k_1, k_2)$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$, задовольняють умови (10), а

$$D^{(0.1)}[Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] - q_p^{(0.1)} D^{(0.1)} W_p(t, x) = \alpha_{p,2}(t, x) \left[1 - \frac{D^{(0.1)} W_p(t, x)}{\rho_{p,1}(t, x)} \right] \geq 0,$$

$$[V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] + c_p^{(0.1)} W_p(t, x) = -\int_x^a \beta_{p,2}(t, \xi) d\xi \left[1 + \frac{W_p(t, x)}{\int_x^a \rho_{p,1}(t, \xi) d\xi} \right] \geq 0.$$

Аналогічно переконаємось у виконанні усіх нерівностей в (17) і Лема 2 доведена.

Таким чином справедлива наступна

Теорема 1. *Нехай функція $F[u(t, x)] \in C_2^*(\overline{B})$, виконуються умови Лемми 1 і крайова задача (3)–(5) має функції порівняння. Тоді для функцій $Z_p(t, x)$, $V_p(t, x)$, побудованих згідно закону (11), (12), де $q_p^k(t, x)$ та $c_p^k(t, x) \in C(\overline{D}_0)$ задовольняють в області \overline{B}_1 умови (10), (17), справедливі нерівності (18) для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, $(t, x) \in \overline{D}_0$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$.*

Покажемо, що послідовності функцій $\{D^k Z_p(t, x)\}$, $\{D^k V_p(t, x)\}$, побудовані згідно закону (11), (12), (18), при існуванні функцій порівняння задач (3)–(5), збігаються рівномірно при $(t, x) \in \overline{D}_0$ до єдиного розв'язку інтегро-диференціального рівняння (7). Враховуючи нерівності (18) для цього достатньо показати, що $\lim_{p \rightarrow \infty} D^k W_p(t, x) = 0$ для $\forall (t, x) \in \overline{D}_0$, $k = (k_1, k_2)$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$.

Позначимо:

$$d := \max_{k_1, k_2} \sup_{\overline{D}_0} |D^{(k_1, k_2)} W_0(t, x)|, \quad q := \max_{k_1, k_2} \sup_{\overline{D}_0} (1 - q_p^k(t, x) - c_p^k(t, x)),$$

$$c := \sup_{\overline{D}_0} |a_1(t, x)|, \quad K := \sup_{\overline{D} \times \overline{D}} K(t, x; \eta, \zeta),$$

$$\gamma := \max \{1, a + b, a(a + b), (a + b)(1 + ab)\}.$$

Тоді із (15) методом математичної індукції неважко переконатись у справедливості оцінок

$$|D^{(k_1, k_2)} W_p(t, x)| \leq \frac{[qKL\gamma(a + t - x)]^p}{p!} d, \quad k_i = 0, 1, \quad i = 1, 2, \quad k_1 + k_2 < 2, \quad (19)$$

для всіх $(t, x) \in \overline{D}_0$, $p \in \mathbb{N}$.

На підставі оцінок (19) маємо, що $\lim_{p \rightarrow \infty} D^{(k_1, k_2)} W_p(t, x) = 0$, тобто $\lim_{p \rightarrow \infty} D^{(k_1, k_2)} Z_p(t, x) = D^{(k_1, k_2)} V_p(t, x) := U_{k_1, k_2}(t, x)$.

Для того, щоб показати, що $U_{k_1, k_2}(t, x) = D^{(k_1, k_2)} U(t, x)$, де $U(t, x)$ є регулярним розв'язком інтегро-диференціального рівняння (7) достатньо у (11) перейти до границі, коли $p \rightarrow \infty$ і результат продиференціювати по tk_1 разів, а по $x - k_2$, $k_1 + k_2 < 2$. У силу Лема 1 знайдена гранична функція і буде розв'язком крайової задачі (3)–(5).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови Теорема 1.*

Тоді:

- 1) інтегро-диференціальне рівняння (7) у класі функцій $C^*(\overline{D}_0)$ має розв'язок і він єдиний при $(t, x) \in \overline{D}_0$;
- 2) послідовності функцій $\{Z_p^k(t, x)\}$, $\{V_p^k(t, x)\}$, побудовані згідно закону (11), (12), (18) збігаються рівномірно при $(t, x) \in \overline{D}_0$ до єдиного розв'язку рівняння (7),
- 3) мають місце оцінки (19);
- 4) для довільних $p \in \mathbb{N}_0$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$ та $(t, x) \in \overline{D}_0$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} D^k V_p(t, x) &\leq (\geq) D^k V_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k U(t, x) \leq (\geq) \\ &\leq (\geq) D^k Z_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k Z_p(t, x), \end{aligned} \quad (20)$$

$$(t, x) \in \overline{D}_0, \quad k_1 = 0, 1, \quad k_2 = 1 \quad (k_2 = 0), \quad k_1 + k_2 < 2;$$

- 5) збіжність ітераційного методу (11), (12), (18) не повільніша збіжності методу, коли $q_p^k(t, x) \equiv 0$ та $c_p^k(t, x) \equiv 0$ для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, тобто методу

$$Z_{p+1}^*(t, x) = T f^p(\eta, \zeta), \quad V_{p+1}^*(t, x) = T \bar{f}^p(\eta, \zeta). \quad (21)$$

Доведення. Єдиність розв'язку рівняння (7) доводиться методом від супротивного [6]. Твердження пунктів 2) та 3) даної Теорема 2 доведені вище.

Доведемо справедливість нерівностей (20). З цією метою припустимо, що для деякого номера $p \in \mathbb{N}$ у деякій точці $(t_0, x_0) \in \overline{D}_0$ виконується нерівність $D^k Z_p(t_0, x_0) < (>) D^k U(t_0, x_0)$. Тоді для всякого $n \in \mathbb{N}$ у силу нерівностей (18)

$$D^k Z_{p+n}(t_0, x_0) \geq (\leq) D^k Z_p(t_0, x_0) < (>) D^k U(t_0, x_0),$$

$$k_1 = 0, 1, \quad k_2 = 1 \quad (k_2 = 0), \quad k_1 + k_2 < 2,$$

а отже послідовність функцій $\{D^k Z_{p+n}(t_0, x_0)\}$ при $n \rightarrow \infty$ не збігається у точці (t_0, x_0) до $D^k U(t_0, x_0)$, що суперечить доведеному.

Аналогічно доводяться інші нерівності у (20).

Покажемо, що збіжність методу (11), (12), (18) не повільніша збіжності ітераційного методу (21).

Нехай $Z_p(t, x)$ та $V_p(t, x)$ — функції порівняння задачі (3)–(5), побудовані згідно деякого двостороннього методу. Тоді із (11) та (21), враховуючи (8), маємо

$$Z_{p+1}^*(t, x) - Z_{p+1}(t, x) = T f^p(\eta, \zeta) - T \bar{f}^p(\eta, \zeta) = T [f^p(\eta, \zeta) - \bar{f}^p(\eta, \zeta)] \leq 0,$$

$$V_{p+1}^*(t, x) - V_{p+1}(t, x) = T[f_p(\eta, \zeta) - \bar{f}_p(\eta, \zeta)] \geq 0.$$

Тоді

$$Z_{p+1}^*(t, x) \leq Z_{p+1}(t, x) \leq V_{p+1}(t, x) \leq V_{p+1}^*(t, x),$$

що і потрібно було показати.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови Теорему 1 і $F[U(t, x)] \equiv H[U(t, x); 0]$, а крайові умови (4) є однорідними.*

Тоді якщо $F[0] \geq (\leq) 0$ в області \bar{B} , то розв'язок задачі (3), (4) задовольняє нерівності

$$D^{(k_1, k_2)}U(t, x) \geq (\leq) 0 \quad (D^{(k_1, k_2)}U(t, x) \leq (\geq) 0),$$

при $(t, x) \in \bar{D}_0$, $k_1 = 0, 1$, $k_2 = 1$ ($k_2 = 0$), $k_1 + k_2 < 2$.

4. Висновок. У даній роботі побудовано одну модифікацію двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі для ДРЧП. Одержано достатні умови існування, єдиності, регулярності та знакосталості шуканого розв'язку. Доведено теореми про диференціальні нерівності та визначено апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку задачі.

Список використаної літератури

1. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. Москва : Наука, 1976. 352 с.
2. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги. *Дифференциальные уравнения*. 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
3. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений. *Дифференциальные уравнения*. 1983. Т. 19, № 1. С. 145–152.
4. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса. *Дифференциальные уравнения*. 1982. Т. 18, № 2. С. 280–288.
5. Маринец В. В. О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями. *Дифференциальные уравнения*. 1988. Т. 24, № 8. С. 1393–1397.
6. Маринец В. В., Маринец К. В., Питьовка О. Ю. Аналітичні методи дослідження крайових задач. Монографія Ужгород : Вид-во УжНУ “Говерла”, 2019. 288 с.
7. Marynets V., Kateryna M., Kohutych O. Study of the Boundary Value Problems for Nonlinear Wave Prehistory. 2021. P. 12. URL: https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues/Advanced_Methods_Computational_Mathematical_Physics (date of access: 15.04.2023).
8. Marynets V., Marynets K., Kohutych O. On a novel approach for the investigation and approximation of solutions to the systems of higher nonlinear PDES. *Monatshefte für Mathematik*. 2022. 14 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/800605-022-01771-5>

Marynets V. V., Kohutych O. I., Pytovka O. Y. One approach of the investigation of a mathematical model of moisture distribution in porous environments.

The one modification of the two-side method of investigation and approximate solution to the boundary value problem (BVPs) that describe moisture distribution in porous environments is constructed. The sufficient conditions of existence, uniqueness, regularity, and sign-preserving of the desired solution are obtained. The theorems about differential inequalities are proven, and the posterior estimation of error of the approximate solution of BVPs is given.

Keywords: modification of the two-way method, comparison functions, uniqueness of solution, differential equations in parts of derivatives, approximate solution.

References

1. Chudnovskij, A. F. (1976). *Teplofizika pochv* [Thermal physics of soils]. Moscow: Nauka [in Russian].
2. Nahushev, A. M. (1979). Kraevye zadachi dlya nagruzhennyh integro-differencial'nyh uravnenij giperbolicheskogo tipa i nekotorye ih prilozheniya k prognozu pochvennoj vlagi [Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of soil moisture]. *Differenc. uravneniya*, 15(1), 96–105 [in Russian].
3. Shkhanukov, B. A. (1983). O nekotoryh kraevykh zadachah dlya uravneniya tret'ego porjadka i ekstremal'nykh svoystvah ego reshenij [On some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions]. *Differenc. uravneniya*, 18(2), 145–152 [in Russian].
4. Vodahova, V. A. (1982). Kraevaya zadacha s nelokal'nym usloviem A. M. Nahusheva dlya odnogo psevdoparabolicheskogo uravneniya vlagoperenosa [A boundary value problem with a nonlocal condition A.M. Nakhushhev for one pseudoparabolic equation of moisture transfer]. *Differenc. uravneniya*, 18(2), 280–288 [in Russian].
5. Marynets, V. V. (1988). O nekotorykh zadachah dlya sistem nelinejnykh differencial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh s nelokal'nymi kraevymi usloviyami [On some problems for systems of nonlinear partial differential equations with nonlocal boundary conditions]. *Differenc. uravneniya*, 24(8), 1393–1397 [in Russian].
6. Marynets, V. V., Marynets, K. V., & Pytovka, O. Yu. (2019). *Analytical methods of research of boundary value problems*. Uzhgorod: Vid-vo UzhNU "Goverla" [in Ukrainian].
7. Marynets, V., Marynets, K., & Kohutych, O. (2021). Study of the Boundary Value Problems for Nonlinear Wave Prehistory. Retrieved from https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues/Advanced_Methods_Computational_Mathematical_Physics
8. Marynets, V., Marynets, K., & Kohutych, O. (2022). On a novel approach for the investigation and approximation of solutions to the systems of higher nonlinear PDES. *Monatshefte für Mathematik*. <https://doi.org/10.1007/800605-022-01771-5>

Одержано 23.08.2023



МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26

тел./факс +380-3131-21109

Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua

E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua

Веб-сайт Інституційного репозитарію Наукової бібліотеки МДУ: <http://dspace.msu.edu.ua:8080>

Веб-сайт Наукової бібліотеки МДУ: <http://msu.edu.ua/library/>