МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ (УКРАЇНА)
ГУМАНІСТИЧНО-ПРИРОДНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ЯНА ДЛУГОША
В МІСТІ ЧЕНСТОХОВІ (ПОЛЬЩА)

ISSN (print) 2617-0833
ISSN (online)2617-0841

Міжнародний науковий журнал

«ОСВІТА І НАУКА»

ПРИРОДНИЧІ ТА ТЕХНІЧНІ НАУКИ
ГУМАНІТАРНІ ТА СУСПІЛЬНІ НАУКИ
ЕКОНОМІЧНІ НАУКИ

Виходить два рази на рік

Випуск 2(33) 2022

МУКАЧЕВО-ЧЕНСТОХОВА

Міжнародний науковий журнал
«ОСВІТА І НАУКА»

Заснований у 2006 році. Виходить двічі на рік.
Співзасновники та видавці журналу

Мукачівський державний університет (Україна)
Гуманістично-природничий університет ім. Яна Длугоша в місті Ченстохові (Польща)

У 2018 році перереєстрований, Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації КВ №23077-12917ПР

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет Науково- технічною радою (Протокол No10 від 19.12.2022 р.)

М 58

Міжнародний науковий журнал «ОСВІТА І НАУКА» / ред. кол.: Т.Д. Щербан (гол.ред.); заст. гол. ред.: Jerzy Piwowarski; В.В. Гоблик. – Мукачево-Ченстохова: РВВ МДУ; Гуманістично-природничий університет ім. Яна Длугоша в місті Ченстохові, 2022. – Вип. 2(33). – 340с.

УДК 37:001(051)-027.543-028.42"540*6"

Міжнародний науковий журнал "ОСВІТА І НАУКА" зареєстровано та проіндексовано в таких міжнародних наукометричних базах даних: ***Index Copernicus (ICV 2021 = 80,1), ResearchBib, SJIF/Inno-Space (Марокко), CiteFactor, Infobase Index (Індія), DRJI (Індія), Turkish Education Index, Global Impact Factor, Eurasian Scientific Journal Index, зареєстрований в Google Scholar.***

УДК 511.111(045)

ФАКТОРІАЛ ПОКРОКОВОЇ ЗМІНИ У МНОЖИНІ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Стащук М. Г., Олійник І. П., Лазар В. Ф.

FACTORIAL OF A STEP-BY-STEP CHANGE IN THE SET OF REAL NUMBERS

Stashchuk Mykola, Oliynyk Ivan, Lazar Vasyl

У роботі запропоновано результати спостережень за еволюційною зміною у множині дійсних чисел. Шляхом операції піднесення до степеня та послідовного віднімання сусідніх чисел при завершенні таких дій приходимо до результату, що дорівнює добутку степеня кроку між сусідніми числами та відповідного факторіалу цього ж степеня. Для кроку, рівного одиниці, остаточним результатом є лише факторіал початкового показника степеня. Для кроку, відмінного від одиниці, факторіал домножується на степінь величини кроку. Результати статті оформлені у вигляді наглядних таблиць та відповідних тверджень й додаткового продовження на достатньо великі степені.

Ключові слова: *множина дійсних чисел, алгоритм спостереження, факторіал, прирости, формула Стірлінга.*

The paper presents the results of observations of evolutionary change in the set of real numbers. Through the operation of exponentiation and successive subtraction of adjacent numbers at the end of such operations, we arrive at a result equal to the product of the power of the step between adjacent numbers and the corresponding factorial of the same power. For a step equal to one, the final result is simply the factorial of the initial exponent. For a step other than unity, the factorial is multiplied by the power of the step size. The results of the article are presented in the form of visual tables and corresponding statements and additional extensions to large powers.

Key words*: Set of real numbers, observation algorithm, factorial, increments, Stirling's formula.*

Від множини дійсних чисел [1] можна очікувати низку цікавих несподіванок та одержувати ряд закономірностей. В історії математики відомими уже давно стали біном Ньютона, знамениті формули скороченого множення, трикутник Паскаля, числа Фібоначчі і т.п. А от, що може бути аналогом цього? Цікавим стає факторіал. Виявляється, що до факторіалу зводяться підрахунки на приростах у множині дійсних чисел. Такий факт випливає із спостережень зміни множини дійсних чисел. Використання одержаних тут результатів може бути корисним в математичному моделюванні низки процесів природнього та технічного характеру. Важливими вони стають при стисненні інформації, при логарифмічній обробці зображень [2], у методах математичного моделювання екологічних [3], економічних, соціальних, а також в моделях реологічного плану [4]. Тому ставилась задача спостереження за покроковою зміною дійсних чисел та встановлення відповідної аналітичної формули.

Алгоритм спостереження за зміною множини дійсних чисел. Виберемо деяку сукупність цілих чисел (наприклад:-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,5,6,7,8,9,10) і піднесемо їх спочатку до першого степеня, до квадрату, до кубу, а потім будемо віднімати послідовно від наступного результату попередній. Тоді одержимо результати, наведені в таблиці1.

Таблиця1. Спостереження зміни цілих чисел з кроком 1 для 1,2,3 – го степенів.

a_1^1 $\left(1^1\cdot 1=1!\right)$	
-5	
	1
-4	
	1
-3	
	1
-2	
	1
-1	
	1
0	
	1
1	
	1
2	
	1
3	
	1
4	
	1
5	
	1
6	
	1
7	
	1
8	
	1
9	
	1
10	

a_1^2 $\left(1^2\cdot 1\cdot 2=2!=2\right)$			
-5	25		
		-9	
-4	16		2
		-7	
-3	9		2
		-5	
-2	4		2
		-3	
-1	1		2
		-1	
0	0		2
		1	
1	1		2
		3	
2	4		2
		5	
3	9		2
		7	
4	16		2
		9	
5	25		2
		11	
6	36		2
		13	
7	49		2
		15	
8	64		2
		17	
9	81		2
		19	
10	100		

a_1^3 $\left(1^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3=3!=6\right)$				
-5	-125			
		61		
-4	-64		-24	
		37		6
-3	-27		-18	
		19		6
-2	-8		-12	
		7		6
-1	-1		-6	
		1		6
0	0		0	
		1		6
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		6
5	125		30	
		91		6
6	216		36	
		127		6
7	343		42	
		169		6
8	512		48	
		217		6
9	729		54	
		271		6
10	1000			

Як бачимо, результатами таких підрахунків в останньому стають числа $\left(1^1\cdot 1=1!\right),\left(1^2\cdot 1\cdot 2=2!=2\right),\left(1^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3=3!=6\right)$.

Аналогічна побудова відповідних таблиць для четвертого та п’ятого степенів приводить до таких же результатів.

Таблиця2. Спостереження зміни цілих чисел з кроком 1 для 4,5 – го степенів.

a_1^4 $\left(1^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=4!=24\right)$	a_1^5 $\left(1^5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=5!=120\right)$

-5	625				
		-369			
-4	256		194		
		-175		-84	
-3	81		110		24
		-65		-69	
-2	6		50		24
		-15		-36	
-1	1		14		24
		-1		-12	
0	0		2		24
		1		12	
1	1		14		24
		15		36	
2	16		50		24
		65		60	
3	81		110		24
		175		84	
4	256		194		24
		369		108	
5	625		302		24
		671		132	
6	1296		434		24
		1105		156	
7	2401		590		24
		1695		180	
8	4096		770		24
		2465		204	
9	6561		974		
		3465			
10	10000				

-5	-3125					
		2101				
-4	-1024		-1320			
		781		750		
-3	-243		-570		-360	
		211		390		120
-2	-32		-180		-240	
		31		150		120
-1	-1		-30		-120	
		1		30		120
0	0		0		0	
		1		30		120
1	1		30		120	
		31		150		120
2	32		180		240	
		211		390		120
3	243		570		360	
		781		750		120
4	1024		1320		480	
		2101		1230		120
5	3125		2550		600	
		4651		1830		120
6	7776		4380		720	
		9031		2550		120
7	16807		6930		840	
		1561		3390		120
8	32768		10320		960	
		26281		4350		
9	59049		14670			
		40951				
10	100000					

Знову ж, результатами підрахунків в останньому стовпці таблиць стають числа $\left(1^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24\right)$, $\left(1^5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120\right)$, тобто одержуємо відповідні факторіали. Зауважимо, що в таблицях 1,2 позначення a_1^n вказують на степінь та крок зміни дійсних чисел для $n = 1,2,3,4,5$.

На основі такого спостереження можемо сформулювати твердження.

Твердження 1. Якщо певну послідовність цілих чисел z, які відрізняються на одиницю, підносити до 1-го, 2-го, 3-го і так далі до n-го степенів з послідовним відніманням сусідніх чисел (від наступного відняти попереднє) і дальнійшого віднімання сусідніх результатів (від наступного відняти попереднє), то за n етапів віднімання одержуємо число, рівне $n!$.

Обґрунтування твердження. Розглянемо функцію $f(z) = z^n$. При $n = 1,2,3$ це є функції $f(z)=z$, $f(z)=z^2$, $f(z)=z^3$. Швидкості зміни цих функцій $f'(z)=1=1!$, $f'(z)=2z$, $f'(z)=3z^2$ відповідно. Швидкості зміни швидкостей (прискорень) цих функцій $f''(z)=0$, $f''(z)=2=1\cdot 2=2!$, $f''(z)=1\cdot 2\cdot 3=3!z$.Зміна прискорень функцій $f'''(z)=0$, $f'''(z)=0$, $f'''(z)=1\cdot 2\cdot 3=3!$ Аналогічною є ситуація, як бачимо з таблиць, і для $n=5{,}6$. Неважко переконатися в цьому й для наступних чисел $6{,}7{,}8\ldots n$ з натурального ряду. Кінцевий підрахунок становить $n!$.

Розглянемо тепер зміни дійсних чисел з приростами, відмінними від 1. Наведемо наступні таблиці

Таблиця 3. Спостереження зміни цілих чисел з кроками, відмінними від 1.

$a_{0,5}^2$ $\left(0{,}5^2\cdot 2!=0{,}5\right)$

-1,5	2,25		
		-1,25	
-1	1		0,5
		-0,75	
-0,5	0,25		0,5
		-0,25	
0	0		0,5
		0,25	
0,5	0,25		0,5
		0,75	
1	1		0,5
		1,25	
1,5	2,25		

$a_{0,3}^3$ $\left(0{,}3^3\cdot 3!=0{,}162\right)$

-0,9	-0,729			
		0,513		
-0,6	-0,216		-0,324	
		0,189		0,162
-0,3	-0,027		-0,162	
		0,027		0,162
0	0		0	
		0,027		0,162
0,3	0,027		0,162	
		0,189		0,162
0,6	0.216		0,324	
		0,513		
0.9	0,729			

$a_{0,2}^4$ $\left(0{,}2^4\cdot 4!=0{,}0384\right)$

- 0,6	0,1296				
		-0,104			
- 0,4	0,0256		0,08		
		-0,024		-0,0576	
- 0,2	0,0016		0,0224		0,0384
		-0,0016		-0,0192	
0	0	0	0,0032		0,0384
		0,0016		0,0192	
0,2	0,0016		0,0224		0,0384
		0,024		0,0576	
0,4	0,0256		0,08		
		0,104			
0,6	0,1296				

a_2^3 $\left(2^3\cdot 3!=48\right)$

-6	-216			
		152		
-4	-64		-96	
		56		48
-2	-8		-48	
		8		48
0	0		0	
		8		48
2	8		48	
		56		48
4	64		96	
		96		
6	216			

$a_{0,4}^4$ $\left(0{,}4^4\cdot 4!=0{,}6144\right)$

-	1,4641				

a_2^3 $\left(2^3\cdot 3!=48\right)$

-	-110,592			

1,1							4,8				
		-1,224							88,64		
-0,7	0,2401		0,992				-2,8	-21,952		-67,2	
		-0,232		-0,768					21,44		48
-0,3	0,0081		0,224		0,6144		-0,8	-0,512		-19,2	
		-0,008		-0,1536					2,24		48
0,1	0,0001	0	0,0704		0,6144		1,2	1,728		28,8	
		0,0624		0,4608					31,04		48
0,5	0,0625		0,5312		0,6144		3,2	32,798		76,8	
		0,5936		1,0752					107,84		48
0,9	0,6561		1,6064				5,2	140,608		124,8	
		2,2							232,64		
1,3	2,8561						7,2	373,248			

Таблиця 3 відповідає зміні числового ряду з кроком $0{,}5;0{,}4;0{,}3;0{,}2;2$, відмінними від одиниці та відповідними степенями $n = 2{,}3{,}4$, причому відлік спостереження не залежить від початкового конкретного числа. Тут є символи $a^n_{\Delta h}$, де n - степінь, Δh - крок.

На основі наведених таблиць можемо провести їх продовження на довільний приріст Δh дійсного числа z та сформолювати наступне твердження.

Твердження 2. Зміна множини дійсних чисел з кроком Δh до з попереднім піднесенням до n -го степеня за схемою, наведеною для твердження1, приводить до кінцевого виразу $(\Delta h)^n n!$

Обґрунтування твердження. Розглянемо прирости

$$\Delta^1 = (z + \Delta h)^n - z^n = \Delta h, \text{ при } n = 1 \text{ приріст } 1!\Delta h;$$

$$\Delta^2 = \Delta\left(\Delta^1\right) = \Delta\left((z+\Delta h)^n - z^n\right) = \left((z+\Delta h)^n - z^n\right)' \Delta h = n\left((z+\Delta h)^{n-1} - z^{n-1}\right)\Delta h,$$

$$\text{при } n = 2 \text{ приріст } 2!(\Delta h)^2;$$

$$\Delta^3 = \Delta\left(\Delta^2\right) = \left(n\left((z+\Delta h)^{n-1} - z^{n-1}\right)\Delta h\right)' \Delta h = n(n-1)\left((z+\Delta h)^{n-2} - z^{n-2}\right)(\Delta h)^2,$$

$$\text{при } n = 3 \text{ приріст } 3!(\Delta h)^3;$$

$$\Delta^4 = \Delta\left(\Delta^3\right) = \left(n(n-1)\left((z+\Delta h)^{n-2} - z^{n-2}\right)(\Delta h)^2\right)' \Delta h =$$
$$= n(n-1)(n-2)\left((z+\Delta h)^{n-3} - z^{n-3}\right)(\Delta h)^3,$$

$$\text{при } n = 4 \text{ приріст } 4!(\Delta h)^4; \text{ і т.д.}$$

Логічно бачити, що для степеневої функції із показником степеня n черговий k -тий приріст для $k < n$ стане

$$\Delta^k = \Delta\left(\Delta^{k-1}\right) = \left(n(n-1)(n-2)\cdots\left((z+\Delta h)^{n-k+1} - z^{n-k+1}\right)(\Delta h)^{k-1}\right)'\Delta h =$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot\left((z+\Delta h)^{n-k} - z^{n-k}\right)(\Delta h)^k$$

Якщо припустити що для n - го степеня $n!(\Delta h)^n$, то за аналізом останньої рівності при $n = k+1$ одержимо,

$$\Delta^{n+1} = \Delta\left(\Delta^n\right) = \left((n+1)n(n-1)(n-2)\cdots\left((z+\Delta h)^2 - z^2\right)(\Delta h)^n\right)'\Delta h =$$
$$= (n+1)n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot(z+\Delta h - z)(\Delta h)^n = (n+1)!\Delta h\cdot(\Delta h)^n = (n+1)!(\Delta h)^{n+1}.$$

Отже, за принципом математичної індукції твердження 2 істинне.

Застосування формули Стірлінга. Заважимо, що факторіали великих чисел можуть бути наближено виражені формулою Стірлінга [5]

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right).$$

Використовуючи цю формулу для достатньо великої вибірки чисел із множини дійсних чисел результат запропонованого алгоритму їх зміни можна записати так:

$$n!(\Delta h)^n \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right)(\Delta h)^n.$$

Одержані формули є необхідними при обчисленні сингуляних інтегралів [6], а також в розрахунках росту дислокаційних тріщин [7], необхідних в діагностиці руйнування матеріалів.

Нетрадиційним способом проведено спостереження за зміною дійсних чисел з піднесенням їх до довільного степеня. Побудовано відповідні таблиці, в яких в останніх стовпцях одержуємо ідентичні результати. На основі спостережень сформульовано два твердження щодо кінцевого результату алгоритму розрахунків. Доведено, що останній стовпець обчислюється за формулою $n!(\Delta h)^n$. Для великих n записано аналог формули Стірлінга. Результати роботи можуть бути застосовними у розвитку інформаційних технологій. Також вони є корисними в числових методах механіки руйнування.

Список використаних джерел

1. Основи дискретної математики. Теорія множин. Комбінаторний аналіз: навч. посібник / Я. О. Баранецький, Б. В. Гнатів, В. С. Ільків та інші. – Львів: Вид-во Національного університету "Львівська політехніка", 2006. – 136 с.

2. Воробель Р. А. Логарифмічна обробка зображень / Р. А. Воробель. – К.: Наук. думка, 2012. – 231 с.

3. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології / В. І. Лаврик. – К.: ВД «КМ Академія», 2002. – 203 с.

4.Сугаков В. Й. Основи синергетики / В. Й. Сугаков. – К.: Обереги, 2001. – 287 с.

5. Ігнатишин М. І. Анімація механізмів та механіко-математичне моделювання реологічних моделей і напружено-деформованого стану конструкцій в Mathcad / М. І. Ігнатишин. – Мукачево: РВВ МДУ, 2022. – 205 с.

6. Броштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Броштейн, К. А. Семендяев; под ред. Г. Гроше, В. Циглера, перевод с немецкого. – М.: Изд-во «Тойберг»Лейпциг; «Наука»Москва, 1981. – 718 с.

7. Обчислення сингулярних інтегралів, необхідних для діагностики воденьвмісних матеріалів / М. Г. Стащук, П. Я. Пукач, В. Ф. Лазар, Н. М.Стащук // Міжнародний науковий журнал «Освіта і наука». – 2021. – Вип. 2(31). – С. 27–34.

8. Стащук М.Г. Мікротріщина на продовженні ядра дислокації / М. Г. Стащук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2022. Вип. 58, № 2. – С. 95–102.

References

1. Baraneczkyj, Ya. O., Gnativ, B. V., Ilkiv, V. S. and others. 2006. *Osnovy dyskretnoyi matematyky. Teoriya mnozhyn. Kombinatornyj analiz [Fundamentals of discrete mathematics. Theory of sets. Combinatorial analysis]*. Lviv: Department of the National University "Lviv Polytechnic".

2. Vorobel, R. A. 2012. *Logaryfmichna obrobka zobrazhen [Logarithmic image processing]*. Kyiv: Nauk. dumka.

3. Lavryk, V. I. 2002. *Metody matematychnogo modelyuvannya v ekologiyi [Methods of mathematical modeling in ecology]*. Kyiv: VD "KM Academy".

4.Sugakov, V. J. 2001. *Osnovy synergetyky [Basics of synergy]*. Kyiv: Oberegy.

5. Ignatyshyn, M. I. 2022. *Animaciya mexanizmiv ta mexaniko – matematychne modelyuvannya reologichnyx modelej i napruzheno – deformovanogo stanu konstrukcij v Mathcad [Animation of mechanisms and mechano-mathematical modeling of rheological models and stress-strain state of structures in Mathcad]*. Mukachevo: RVV MDU.

6. Broshtejn, Y. N. and Semendyaev, K. A.; Groshe, G. and Cyglera V. eds. 1981. *Spravochnyk po matematyke dlya ynzhenerov y uchashhyxsya vuzov [Handbook of Mathematics for Engineers and University Students]*. Moscow: Publishing house "Toyberg" Leipzig; "Nauka" Moscow.

7. Stashhuk, M. G., Pukach, P. Ya., Lazar, V. F. and Stashhuk, N. M. 2021. “Obchyslennya syngulyarnyx integraliv, neobxidnyx dlya diagnostyky vodenvmisnyx materialiv [Calculation of singular integrals necessary for the diagnosis of hydrogen-containing materials]”. *International Scientific Journal "Education and Science"* 2(31): 27–34.

8. Stashhuk, M. G. 2022. Mikrotrishhyna na prodovzhenni yadra dyslokaciyi [A microcrack on the extension of the dislocation core]. *Physical and chemical mechanics of materials* 58, 2: 95–102.

МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26
тел./факс +380-3131-21109
Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua
E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua