Міністерство освіти і науки України
Мукачівський державний університет
Кафедра природничих дисциплін та інформаційних технологій

Серія «Основи вищої математики»

Серія **«Основи вищої математики»**

Математичний аналіз

Математичний аналіз

Інтегральне числення

Інтегральне числення

Навчально-методичний посібник

$\int f(x)dx = F(x) + C$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Мукачево – 2016

Міністерство освіти і науки України
Мукачівський державний університет
Кафедра природничих дисциплін та інформаційних технологій

Серія **«Основи вищої математики»**

Математичний аналіз

Інтегральне числення

Навчально-методичний посібник

Мукачево – 2016

ББК 22.11я73
УДК 51(075.8)

Математичний аналіз: Інтегральне числення. Навчально-методичний посібник/ Укладачі: Пагіря М.М., Питьовка О.Ю. – Мукачево, МДУ, 2016. – 79 с. — (Серія "Основи вищої математики")

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою Мукачівського державного університету, протокол № 9 від «21» квітня 2016 р.

Обговорено і схвалено на засіданні кафедри природничих дисциплін та інформаційних технологій протокол № 10 від «29» березня 2016 р.

Укладачі:
М.М.Пагіря, кандидат фізико–математичних наук, доцент, Мукачівський державний університет,
О.Ю.Питьовка, кандидат фізико–математичних наук, доцент, Мукачівський державний університет,

Відповідальний за випуск:
О.Ю.Питьовка, зав. кафедрою природничих дисциплін та інформаційних технологій, кандидат фізико–математичних наук, доцент

Рецензент:
Стегней М. І., доктор економічних наук, доцент кафедри фінансів, Мукачівський державний університет

Методичний посібнику присвячений розділам математичного аналізу: невизначений інтеграл, визначений інтеграл та його застосування, невласні інтеграли. В кожному з них містяться як теоретичні відомості із розглядуваних тем так і приклади, а також наведенні завдання, які сприяють засвоєнню матеріалу. Матеріал, який вміщений у посібнику, відповідає навчальній програмі з курсу «Вища математика» і викладається для студентів всіх напрямів підготовки Мукачівського державного університету.

Вступ

Навчальний посібник присвячений вибраним розділам курсу "Вища математика", який вивчається студентами денної та заочної форми навчання. Зокрема в методичному посібнику розглянуті розділи: "Невизначений інтеграл", "Визначений інтеграл та його застосування", "Невласні інтеграли".

Кожна частина розділу містить повний виклад теоретичного матеріалу, який має бути засвоєний студентами, зразки розв'язування задач, завдання для самостійного виконання. Опрацювання матеріалу, викладеного у посібнику, надасть змогу студентам підготуватися до написання модульних контрольних робіт та до підсумкового контролю.

В кінці посібника наведено покажчик всіх термінів, який, на думку авторів, краще зорієнтує студентів у викладеному матеріалі.

Як вже відмічалося, в посібнику наведенні розв'язки задач. Для того, щоб помітити початок та закінчення розв'язання прикладу будемо використовувати відповідно значки $\diamondsuit$, $\blacklozenge$.

Розділ 1

Невизначений інтеграл

1.1 Поняття первісної функції та невизначеного інтегралу

У цьому розділі розглянемо задачу, що за своєю природою є оберненою до задачі диференціювання функції. Якщо в диференціальному численні ставилася задача про знаходження похідної функції, то в інтегральному численні будемо розглядати задачу про відшукання функції, похідна якої відома, задана.

Приклад 1.1. Нехай відомо, що

$$f'(x) = 4 \tag{1.1}$$

Потрібно знайти функцію $f(x)$, для якої буде виконуватися умова (1.1).

Такою функцією буде

$$f(x) = 4x, \tag{1.2}$$

оскільки $(4x)' = 4$. Але також є очевидним, що і функції $f(x) = 4x+4$, $f(x) = 4x - 3$ також задовольняють умову (1.1), оскільки функції відрізняються на сталу, похідна з якої рівна нулю. Більше того, будь-яка функція вигляду

$$f(x) = 4x + C,\ C = const \tag{1.3}$$

задовольняє умову (1.1).

Означення 1.1. Функція $F(x)$ називається *первісною функції* $f(x)$ на деякому проміжку X, якщо $F(x)$ неперервна на цьому проміжку, диференційована в кожній внутрішній точці проміжку і

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема 1.1. *Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку X, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на X має вигляд $F(x)+C$.*

Таким чином у прикладі 1.1 первісна функція має вигляд (1.3), тобто

$$F(x) = 4x + C, \tag{1.4}$$

де C — довільна стала.

Означення 1.2. Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом функції* $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ C = const \tag{1.5}$$

Символ $\int$ називають *знаком інтегралу*, $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*, x — *змінною інтегрування*.

Якщо функція $f(x)$ має первісну, то справедливими є наступні **властивості невизначеного інтегралу**:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
3. $\int F'(x)dx = F(x) + C$;
4. $\int dF(x) = F(x) + C$;
5. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx, A = const$;
6. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;
7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(a\cdot x + b)dx = \dfrac{1}{a}F(a\cdot x+b) + C$, де a, b=const, $a \neq 0$.

Наведемо **таблицю невизначених інтегралів** для елементарних функцій:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$, у тому числі
   - $\int dx = x + C$;
   - $\int \sqrt{x}\,dx = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C$;

- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$;

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$;
3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, у тому числі $\int e^x dx = e^x + C$;
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$;
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$;
8. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$, у тому числі $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;
9. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$, у тому числі $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;
10. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;
11. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;
12. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right| + C$;
13. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right| + C$;

14. $\int \frac{x}{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 \pm a^2\right| + C$;

15. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$;

16. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$;

17. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$;

18. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$.

1.2 Методи обчислення невизначених інтегралів

1.2.1 Безпосереднє інтегрування невизначеного інтегралу

Метод безпосереднього інтегрування ґрунтується на загальних властивостях невизначеного інтегралу та таблиці невизначених інтегралів. Частинним випадком є метод розкладання підінтегральної функції на суму.

Приклад 1.2. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}\,.$$

$\Diamond$ Використаємо табличний інтеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-16}\right| + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.3. Знайти інтеграл

$$\int (2-x^3)^2 dx\,.$$

$$\Diamond \int (2-x^3)^2 dx = \int (4 - 4x^3 + x^6) dx = \int 4dx - \int 4x^3 dx + \int x^6 dx =$$

$$= 4\int dx - 4\int x^3 dx + \int x^6 dx = 4x - 4\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C = 4x - x^4 + \frac{x^7}{7} + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.4. Знайти інтеграл

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - 4\sqrt{x} - 3x^2 + 5x - 7 \right) dx.$$

$$\lozenge \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - 4\sqrt{x} - 3x^2 + 5x - 7 \right) dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\, dx - 4\int \sqrt{x}\, dx -$$

$$-3\int x^2\, dx + 5\int x\, dx - 7\int dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} - 4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 3\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 7x + C =$$

$$= -3x^{-\frac{1}{3}} - \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^3 + \frac{5x^2}{2} - 7x + C = \frac{-3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{8x\sqrt{x}}{3} - x^3 + \frac{5x^2}{2} - 7x + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.5. Знайти інтеграл

$$\int \frac{2\sqrt{x} - 5x^2}{3x\sqrt{x}} dx.$$

$$\lozenge \int \frac{2\sqrt{x} - 5x^2}{3x\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{2x^{\frac{1}{2}} - 5x^2}{3x^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{2}{3}\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx - \frac{5}{3}\int \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{5}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{3\,\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{10}{9}x\,\sqrt{x} + C\,. \blacklozenge$$

Приклад 1.6. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx$$

та зробити перевірку.

$$\lozenge \int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \tfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \tfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\tfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \operatorname{tg} x - x + C\,.$$

Зробимо перевірку:

$$(\operatorname{tg} x - x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x\,. \blacklozenge$$

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

Знайти невизначені інтеграли:

$$1. \int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{5}{x^2}\right)dx, \quad 2. \int\frac{\sqrt{x}+x^3-x^2}{x^3}dx, 3. \int\frac{(x^2-1)(x^2+2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx,$$

$$4. \int\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx, \quad 5. \int\frac{1}{x^2+7}dx, \quad 6. \int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx,$$

$$7. \int\operatorname{ctg}^2 x\,dx, \quad 8. \int(\sin^2\frac{x}{2}+2\cos x)dx, \quad 9. \int\frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx,$$

$$10. \int\frac{\sin^2 x+2\sin x-3}{\sin^2 x}dx, \quad 11. \int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx, \quad 12. \int\sin\left(\frac{3x}{2}+2\right)dx.$$

1.2.2 Заміна змінної у невизначеному інтегралі

Метод **заміни змінної** або **підстановки** ґрунтується на введенні під знак інтеграла нової змінної, після підстановки якої одержуємо інтеграл, який обчислюється методом безпосереднього інтегрування.

Розглянемо підстановки двох видів:

1) Нехай інтеграл $\int f(x)dx$ не обчислюється шляхом безпосереднього інтегрування. Введемо до розгляду функцію $x=\varphi(t)$, тоді $dx=\varphi'(t)dt$, де $\varphi(t),\varphi'(t)$ — неперервні на деякому проміжку функції. Тоді справедливою буде формула:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,. \tag{1.6}$$

2) Введемо нову змінну $t=\phi(x)$, тоді формула заміни змінної буде мати вигляд:

$$\int f[\phi(x)]\cdot\phi'(x)dx=\int f(t)dt \tag{1.7}$$

Приклад 1.7. Знайти інтеграл

$$\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

◊ Для знаходження даного інтегралу використаємо заміну згідно формули (1.6)

$$\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\left[\begin{array}{c} x=t^3,\\ dx=3t^2dt\end{array}\right]=\int\frac{\sin t\cdot 3t^2dt}{t^2}=$$

$$= 3\int \sin t dt = -3\cos t + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C. \ \blacklozenge$$

Приклад 1.8. Знайти інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}\, dx.$$

$\lozenge$ Для знаходження даного інтегралу використаємо заміну змінної згідно формули (1.7)

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}\, dx = \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t, \\ \dfrac{1}{x^2+1}\, dx = dt \end{array}\right] = \int \sqrt{t}\; dt = \int t^{\frac{1}{2}}\; dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} t\,\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x\,\sqrt{\operatorname{arctg} x} + C. \ \blacklozenge$$

Приклад 1.9. Знайти інтеграл

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\, dx.$$

$\lozenge$ Використаємо формулу (1.7):

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\, dx = \left[\begin{array}{c} x^8 = t, \\ 8x^7 dx = dt, \\ x^7 dx = \frac{1}{8} dt \end{array}\right] = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{8}\arcsin t + C = \frac{1}{8}\,\arcsin x^8 + C. \ \blacklozenge$$

Частинним випадком методу заміни змінної є *метод підведення під знак диференціала*, який ґрунтується на інваріантності формули інтегрування. Інтегрування проводиться за формулою:

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]\cdot d(\varphi(x)) = F[\varphi(x)] + C\,. \qquad (1.8)$$

Згідно даного методу у підінтегральному виразі виділяють множник і підводять його під знак диференціала, керуючись тим, щоб у функції, яка залишилася під знаком інтеграла і у диференціала був однаковий новий аргумент.

Приклад 1.10. Знайти інтеграл

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

$\Diamond$ Використаємо метод підведення функції під знак диференціала, а саме функцію $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ запишемо під знак диференціала:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})\right] = 2\int e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}} + C. \ \blacklozenge$$

Приклад 1.11. Знайти інтеграл

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$$

$$\Diamond \ \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left[\frac{dx}{x} = d(\ln x)\right] = \int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C. \ \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти невизначені інтеграли:

$$13.\ \int x\sqrt{5x^2+2}\,dx,\quad 14.\ \int \frac{x^3dx}{\sqrt{3+x^4}},\quad 15.\ \int e^x \sin(e^x)\,dx,$$

$$16.\ \int \cos\ln x \frac{dx}{x},\quad 17.\ \int \frac{x}{x^4+4}\,dx,\quad 18.\ \int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx,$$

$$19.\ \int \frac{e^{\arcsin x}+x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\quad 20.\ \int \frac{2x-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\quad 21.\ \int \frac{\sin x}{(\cos x-1)^3}\,dx,$$

$$22.\ \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx,\quad 23.\ \int \frac{\sin x}{25+\cos^2 x}\,dx,\quad 24.\ \int \frac{dx}{\arccos 2x\cdot\sqrt{1-4x^2}}.$$

1.2.3 Метод інтегрування частинами

Нехай на деякому проміжку X задані неперервні та диференційовані у всіх внутрішніх точках цього проміжку функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$.

Добре відомо, що

$$d(uv) = udv + vdu\,.$$

Проведемо інтегрування рівності

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu\,.$$

Оскільки $\int d(uv) = uv$, то

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

звідки

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{1.9}$$

Формула (1.9) називається **формулою інтегрування частинами**.

За допомогою даної формули обчислення інтегралу $\int u \cdot dv$ зводиться до обчислення $\int v \cdot du$. Для цього за відомою функцією u знаходимо du, а із dv визначаємо v.

Більша частина інтегралів, які можуть бути обчислені методом інтегрування частинами, можна розбити на такі три групи:

1)

$$\int P_n(x)\left\{\begin{array}{l} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{array}\right\}dx = \left[\begin{array}{l} \mathbf{u} = P_n(x),\ \mathbf{du} = (P_n(x))'dx = P_{n-1}(x)dx, \\ \mathbf{dv} = \left\{\begin{array}{l} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{array}\right\}dx,\ \mathbf{v} = \dfrac{1}{k}\left\{\begin{array}{l} e^{kx} \\ -\cos kx \\ \sin kx \end{array}\right\} \end{array}\right]$$

де $P_n(x)$ — многочлен степеня n, k — дійсне число ($k \neq 0$).

2)

$$\int\left\{\begin{array}{l} \ln x \\ \arcsin x \\ \mathrm{arctg}\, x \end{array}\right\}P_n(x)dx = \left[\begin{array}{l} \mathbf{u} = \left\{\begin{array}{l} \ln x \\ \arcsin x \\ \mathrm{arctg}\, x \end{array}\right\},\ \mathbf{du} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right\}dx, \\ \mathbf{dv} = P_n(x)dx,\ \mathbf{v} = \int P_n(x)dx = P_{n+1}(x) \end{array}\right]$$

3) Інтеграли виду:

$$\int e^{\alpha x}\left\{\begin{array}{l}\sin\beta x\\ \cos\beta x\end{array}\right\}dx,\quad \int\cos(\ln x)dx,\quad \int\sin(\ln x)dx.$$

Позначаючи невідомий інтеграл через I і проводячи двократне інтегрування частинами, складаємо для I рівняння першого степеня і знаходимо значення інтегралу I.

Надзвичайно важливим є правильний вибір u та dv. Якщо цей вибір провести невдало, то, застосовуючи формулу (1.9), можна отримати ще більш складний інтеграл.

Інтеграли

$$\int\frac{x}{\cos^2 x}dx,\quad \int\frac{x}{\sin^2 x}dx,\quad \int\sqrt{1-x^2}\,dx,\quad \int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

не належать до жодної із вказаних груп, але обчислюються за допомогою формули (1.9). Тому, можна говорити, що наведена вище класифікація є умовною.

Приклад 1.12. Обчислити інтеграл методом інтегрування частинами

$$\int x^2\cdot e^x dx.$$

$\lozenge$

$$\int x^2\cdot e^x dx=\left[\begin{array}{ll}u=x^2, & du=2x\,dx;\\ dv=e^x dx, & v=e^x\end{array}\right]=x^2e^x-2\int x\cdot e^x dx=$$

$$=\left[\begin{array}{ll}u=x, & du=dx;\\ dv=e^x dx, & v=e^x\end{array}\right]=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x dx\right)=$$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-e^x\right)+C=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C\,.\ \blacklozenge$$

Приклад 1.13. Обчислити інтеграл

$$\int x\cdot\operatorname{arctg} x dx\,.$$

$\lozenge$ Для обчислення заданого інтегралу використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x\cdot\operatorname{arctg} x dx=\left[\begin{array}{ll}u=\operatorname{arctg} x, & du=\dfrac{1}{1+x^2}\,dx;\\ dv=x\,dx, & v=\dfrac{1}{2}\,x^2\end{array}\right]=\frac{1}{2}\,x^2\operatorname{arctg} x-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\,x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\,x^2\operatorname{arctg}x-$$

$$-\frac{1}{2}\int 1-\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\,x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}x+C\,.\ \blacklozenge$$

Приклад 1.14. Обчислити інтеграл

$$\int e^{2x}\cos 3xdx$$

$\lozenge$ Для обчислення заданого інтегралу використаємо формулу (1.9)

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\begin{bmatrix} u=e^{2x}, & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\cos 3xdx, & v=\frac{1}{3}\,\sin 3x \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\,e^{2x}\sin 3x-$$

$$-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\;dx=\begin{bmatrix} u=e^{2x}, & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\sin 3xdx, & v=-\frac{1}{3}\,\cos 3x \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\,e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\,e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\,e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}\,e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx\,.$$

Застосувавши формулу інтегрування частинами два рази, одержали рівність

$$\int e^{2x}\cos 3x\;dx=\frac{1}{3}\,e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}\,e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\;dx,$$

з якої визначаємо шуканий інтеграл

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{9}\,e^{2x}\left(3\sin 3x+2\cos 3x\right),$$

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{13}\,e^{2x}\left(3\sin 3x+2\cos 3x\right)+C.\ \blacklozenge$$

Приклад 1.15. Обчислити інтеграл

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx\,.$$

$\Diamond$ Для обчислення заданого інтегралу два рази використаємо формулу (1.9)

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=\sqrt{x^2+4}, & du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx; \\ dv=dx, & v=x \end{array}\right] = x\sqrt{x^2+4}-$$

$$-\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = x\sqrt{x^2+4}-\int \frac{(x^2+4)-4}{\sqrt{x^2+4}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+4}-\int\left(\sqrt{x^2+4}-\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx = x\sqrt{x^2+4}-$$

$$-\int \sqrt{x^2+4}\,dx + 4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|.$$

В результаті проведеного інтегрування одержано рівність

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4}-\int \sqrt{x^2+4}\,dx+4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|$$

із якої визначаємо $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$

$$2\int \sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4}+4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|,$$

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+4}+4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|\right)+C. \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання.

Знайти невизначені інтеграли:

25. $\int (3x+2)\cos x\,dx$, 26. $\int x\sin 7x\,dx$, 27. $\int \ln x\,dx$, 28. $\int x^2\cos 4x\,dx$,

29. $\int e^x\sin 3x\,dx$, 30. $\int e^{-x}(2+3x)dx$, 31. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\,dx$,

32. $\int \dfrac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, 33. $\int \ln(x^2+1)dx$, 34. $\int \sin\ln x\,dx$, 35. $\int \dfrac{x}{\sin^2 x}\,dx$.

1.2.4 Інтегрування раціональних функцій

Раціональним дробом або **раціональною функцією** називається відношення двох алгебраїчних многочленів

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де

$$P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m, \quad b_0 \neq 0,$$
$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Раціональний дріб $R(x)$ називається **правильним**, якщо степінь чисельника m менше степені знаменника n: $m < n$, якщо $m \geqslant n$, то дріб називається **неправильним**.

Питання інтегрування раціональних функцій вирішується шляхом розкладання підінтегральної функції на суму більш простих дробів.

Поділити многочлен $P_m(x)$ на $Q_n(x)$ при $m \geqslant n$, означає знайти многочлен (частку)

$$S_{m-n}(x) = c_0x^{m-n} + c_1x^{m-n-1} + ... + c_{m-n}, \quad c_0 \neq 0$$

і многочлен (залишок) $r_k(x)$ степеня k, $k < n$, для яких виконується рівність:

$$P_m(x) = Q_n(x) \cdot S_{m-n}(x) + r_k(x).$$

Многочлени $S_{m-n}(x)$ та $r_k(x)$ визначаються однозначно, наприклад, за допомогою методу ділення кутом (алгоритму ділення Евкліда).

Приклад 1.16. Поділити многочлен $P_3 = 8x^3 + 16x^2 - 2x + 4$ на многочлен $Q_2(x) = 4x^2 - 2x + 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
8x^3 & +16x^2 & -\ 2x & +4 & 4x^2 - 2x + 1 \\
\cline{5-5}
8x^3 & -\ 4x^2 & +\ 2x & & 2x + 5 \\
\cline{1-3}
- & 20x^2 & -\ 4x & +4 & \\
 & 20x^2 & -10x & +5 & \\
\cline{2-4}
 & & 6x & -1 &
\end{array}$$

$S_1 = 2x + 5$, $r_1(x) = 6x - 1$.

Отже, отримано розклад многочлена:

$$8x^3 + 16x^2 - 2x + 4 = (4x^2 - 2x + 1)(2x + 5) + (6x - 1).$$

Таким чином, будь-який неправильний раціональний дріб за допомогою ділення методу "кутом" може бути представлений у вигляді суми алгебраїчного многочлена $S_{m-n}(x)$ і правильного раціонального дробу:

$$R(x) = S_{m-n}(x) + \frac{r_k(x)}{Q_n(x)}, \quad 0 \leqslant k < n \leqslant m. \tag{1.10}$$

Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму елементарних раціональних дробів (простих дробів). Виділяють чотири типи простих дробів:

$$\textbf{I}\ )\quad \frac{A}{x-a};\quad \textbf{II}\ )\quad \frac{A}{(x-a)^k};\ k\text{–ціле число}, k>1$$

$$\textbf{III}\ )\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad \textbf{IV}\ )\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s},\ s\text{–ціле число}, s>1, p^2-4q<0.$$

Такий розклад є єдиним, але методи за допомогою яких можна його провести є різноманітними. Найбільш широко використовується *метод невизначених коефіцієнтів.*

Розглянемо алгоритм методу невизначених коефіцієнтів:

1) якщо задано неправильний раціональний дріб, то потрібно виділити з нього цілу частину, тобто записати дріб у вигляді (1.10);

2) знаменник дробу $Q_n(x)$ розкласти на множники многочленів першого та другого степенів

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_l)^{k_l}\dots(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{s_t}$$

де квадратні тричлени $x^2+p_jx+q_j, j=1,2,\dots,t$ такі, що $p_j^2-4q_j<0$, тобто тричлен має комплексно спряжені корені;

3) правильний раціональний дріб розкласти на прості дроби

$$\frac{r_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{x-a_1} + \dots +$$
$$+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \frac{B_2^{(1)}x+C_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1-1}} + \dots + \frac{B_{s_1}^{(1)}x+C_{s_1}^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots, \tag{1.11}$$

4) знайти невизначені коефіцієнти

$$A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_{k_1}^{(1)}, B_1^{(1)}, C_1^{(1)}, B_2^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, B_{s_1}^{(1)}, C_{s_1}^{(1)}, \dots .$$

Для цього:
– праву частину рівності (1.11) приводимо до спільного знаменника;
– прирівнюємо чисельники лівої та правої частини одержаної рівності;
– прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x в лівій та правій частинах одержаної тотожності;
– отриману систему лінійних рівнянь розв'язуємо відносно невідомих коефіцієнтів.

Крім методу невизначених коефіцієнтів широко використовується *метод викреслювання* (*метод частинних значень*). Він є ефективним у застосуванні до раціональних дробів, знаменник яких $Q_n(x)$ має лише однократні дійсні корені. Нехай

$$Q_n(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) ... \cdot (x - a_n) \,.$$

Тоді

$$\frac{r_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + ... + \frac{A_n}{x - a_n}.$$

Звідси

$$r_k(x) = A_1(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n) + A_2(x - a_1)(x - a_3) \ldots (x - a_n) +$$
$$+ \cdots + A_n(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n-1}).$$

Після підстановки в останню рівність значення $x = a_j$ всі доданки правої частини, крім j-го, перетворюються на нуль:

$$\begin{array}{c|l}
x = a_1 & r_k(a_1) = A_1(a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_n) \;\Rightarrow\; A_1 = \dfrac{r_k(a_1)}{(a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_n)}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x = a_n & r_k(a_n) = A_n(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}) \Rightarrow A_n = \dfrac{r_k(a_n)}{(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}.
\end{array}$$

Приклад 1.17. Розкласти раціональний дріб на прості дроби

$$\frac{x^3 + 3x + 2}{(x + 2)x^3}.$$

◊ Оскільки знаменник раціонального дробу має дійсні корені, а один із коренів має кратність 3, то дріб можна розкладати на прості дроби I та II типів:

$$\frac{x^3 + 3x + 2}{(x + 2)x^3} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x} =$$

$$= \frac{Ax^3 + B(x+2) + Cx(x+2) + Dx^2(x+2)}{(x+2)x^3};$$

$$Ax^3 + Bx + 2B + Cx^2 + 2Cx + Dx^3 + 2Dx^2 = x^3 + 3x + 2;$$

$$(A+D)x^3 + (C+2D)x^2 + (B+2C)x + 2B = x^3 + 3x + 2\,.$$

Складаємо систему і визначаємо коефіцієнти:

$$\left.\begin{array}{c} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\right| \quad \left\{\begin{array}{l} A + D = 1; \\ C + 2D = 0; \\ B + 2C = 3; \\ 2B = 2; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} A = 3/2; \\ D = -1/2; \\ C = 1; \\ B = 1. \end{array}\right.$$

Таким чином

$$\frac{x^3 + 3x + 2}{(x+2)x^3} = \frac{3/2}{x+2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1/2}{x}\,. \ \blacklozenge$$

Приклад 1.18. Розкласти раціональний дріб на прості дроби

$$\frac{3x+5}{x^3 + x^2 + 4x + 4}\,.$$

$\lozenge$ Спочатку розкладаємо знаменник на множники:

$$x^3 + x^2 + 4x + 4 = x^2(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^2+4)\,.$$

Як бачимо, знаменник має дійсний корінь та комплексні корені, тому заданий раціональний дріб розкладаємо на прості дроби I та III типів:

$$\frac{3x+5}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{3x+5}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+4}$$

$$\left.\begin{array}{c} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\right| \quad \left\{\begin{array}{l} A + B = 0; \\ B + C = 3; \\ 4A + C = 5; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A + B = 0; \\ -A + C = 3; \\ 4A + C = 5; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A + B = 0; \\ -A + C = 3; \\ 5A = 2; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} B = -2/5; \\ C = 17/5; \\ A = 2/5. \end{array}\right.$$

Тоді

$$\frac{3x+5}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{2/5}{x+1} + \frac{-\,2/5x + 17/5}{x^2+4}\,. \ \blacklozenge$$

Приклад 1.19. Розкласти раціональний дріб на прості дроби

$$\frac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 - 4x}\,.$$

$\Diamond$ Попередні розглядувані дроби були правильними. У цьому прикладі маємо неправильний раціональний дріб. Тому спочатку поділимо чисельник на знаменник і цим саме виділимо цілу частину

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 - 1 & x^3 - 4x \\
\cline{2-2}
x^4 - 4x^2 & x + 1 \\
\cline{1-1}
x^3 + 4x^2 - 1 & \\
- \; x^3 - 4x & \\
\hline
4x^2 + 4x - 1 &
\end{array}
$$

Таким чином

$$\frac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 - 4x} = x + 1 + \frac{4x^2 + 4x - 1}{x^3 - 4x}.$$

Розглянемо одержаний правильний дріб $\dfrac{4x^2 + 4x - 1}{x^3 - 4x}$ і його знаменник запишемо у вигляді $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$.

Так як корені знаменника дійсні і різні, то правильний раціональний дріб розкладаємо на прості дроби I типу.

$$\frac{4x^2 + 4x - 1}{x^3 - 4x} = \frac{4x^2 + 4x - 1}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 2}$$

Знаходимо коефіцієнти:

$$
\begin{array}{c|}
x^2 \\ x^1 \\ x^0
\end{array}
\quad
\left\{
\begin{array}{l}
A + B + C = 4; \\
-2B + 2C = 4; \\
-4A = -1;
\end{array}
\right.
\quad
\left\{
\begin{array}{l}
B = 7/8; \\
C = 23/8; \\
A = 1/4.
\end{array}
\right.
$$

Тоді

$$\frac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 - 4x} = x + 1 + \frac{1/4}{x} + \frac{7/8}{x + 2} + \frac{23/8}{x - 2}. \ \blacklozenge$$

Розглянемо інтегрування простих дробів.

I) Простий дріб I–го типу є табличним інтегралом

$$\int \frac{A}{x - a}\, dx = A \ln|x - a| + C;$$

II) І в цьому випадку маємо табличний інтеграл

$$\int \frac{A}{(x - a)^k}\, dx = A \cdot \frac{(x - a)^{-k+1}}{-k + 1} + C = \frac{A}{(1 - k)(x - a)^{k-1}} + C;$$

III) Потрібно знайти значення інтеграла від простого дробу III–го типу

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx.$$

Спочатку у чисельнику дробу $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ виділяємо похідну знаменника, тобто чисельник записуємо у вигляді: $Ax+B=(2x+p)\cdot\dfrac{A}{2}-\dfrac{Ap}{2}+B$. У знаменнику виділимо повний квадрат і зробимо заміну:

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4},\quad t=x+\frac{p}{2},\quad a=q-\frac{p^2}{4}.$$

Тоді

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}\int\frac{2t}{t^2+a^2}\,dt+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{t^2+a^2}\,dt=$$

$$=\frac{A}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2B-Ap}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$$

IV) У випадку простого дробу IV–го типу маємо

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^s}.$$

Виконавши перетворення, аналогічні попередньому випадку, одержуємо інтеграл:

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^s}=\frac{A}{2}\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^s}\,dt+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{(t^2+a^2)^s}\,dt=$$

$$=\frac{A}{2(s-1)}(t^2+a^2)^{1-s}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)K_s(t)$$

де $K_s(t)$ обчислюється за рекурентною формулою:

$$K_s(t)=\frac{t}{2a^2(s-1)(t^2+a^2)^{s-1}}+\frac{2s-3}{2a^2(s-1)}\cdot K_{s-1},\ s\geqslant 2,$$

$$K_1(t)=\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}.$$

Приклад 1.20. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3}{x-2}\,dx.$$

$\Diamond$ Підінтегральна функція є простим дробом I типу. Тоді проводимо інтегрування згідно зазначеної вище формули

$$\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\ln|x-2| + C. \ \blacklozenge$$

Приклад 1.21. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{5}{(x+3)^7}\,dx.$$

$\Diamond$ Підінтегральна функція є простим дробом II типу.

$$\int \frac{5}{(x+3)^7}\,dx = -\frac{5}{6(x+3)^6} + C. \ \blacklozenge$$

Приклад 1.22. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}\,dx.$$

$\Diamond$ Оскільки знаменник підінтегральної функції має тільки комплексні корені, то розглядувана функція є простим дробом III типу.

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}\,dx = \left[\begin{array}{c} (x^2+2x+10)' = 2x+2; \\ x^2+2x+10 = (x^2+2x+1)+9 = (x+1)^2+9 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)-2+\frac{4}{3}}{x^2+2x+10}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)-\frac{2}{3}}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+10}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C\,. \ \blacklozenge$$

Приклад 1.23. Знайти інтеграл від раціональної функції

$$\int \frac{3x-5}{(x-3)(x+2)}\,dx.$$

$\Diamond$ Підінтегральна функція — правильний раціональний дріб. Корені знаменника дійсні і різні: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Тому підінтегральний дріб розкладаємо на суму простих дробів I типу.

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A та B, дріб у правій частині рівності зводимо до спільного знаменника:

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3}^{\backslash x+2} + \frac{B}{x+2}^{\backslash x-3} =$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-3B}{(x-3)(x+2)}.$$

Знаменники у лівій і правій частині рівності рівні, тому мусять бути рівними чисельники:

$$3x-5 = (A+B)x + 2A - 3B\,.$$

Складаємо систему для визначення коефіцієнтів A та B:

$$\begin{array}{c|} x^1 \\ x^0 \end{array} \quad \begin{cases} A+B=3; \\ 2A-3B=-5; \end{cases} \qquad \begin{cases} A=4/5; \\ B=11/5. \end{cases}$$

Таким чином

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x+2)} = \frac{4/5}{x-3} + \frac{11/5}{x+2}.$$

Повертаємося до інтеграла і проводимо його обчислення:

$$\int \frac{3x-5}{(x-3)(x+2)}dx = \int \left(\frac{4/5}{x-3} + \frac{11/5}{x+2} \right) dx = \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{11}{5}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{4}{5}\ln|x-3| + \frac{11}{5}\ln|x+2| + C. \ \blacklozenge$$

Приклад 1.24. Знайти інтеграл від раціональної функції

$$\int \frac{x^2+4}{(x^2-16)(x-4)}\,dx.$$

$\lozenge$ Підінтегральна функція — правильний раціональний дріб. Проведемо перетворення знаменника:

$$\frac{x^2+4}{(x^2-16)(x-4)} = \frac{x^2+4}{(x-4)(x+4)(x-4)} = \frac{x^2+4}{(x-4)^2(x+4)}.$$

Як бачимо корені знаменника дійсні, а один із них є кратним: $x_{1,2} = 4$, $x_3 = -4$. Розкладаємо дріб на прості дроби I та II типів:

$$\frac{x^2+4}{(x-4)^2(x+4)} = \frac{A}{(x-4)^2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+4}.$$

Знаходимо A, B та C методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x^2+4}{(x-4)^2(x+4)} = \frac{A}{(x-4)^2}^{\backslash x+4} + \frac{B}{x-4}^{\backslash (x+4)(x-4)} + \frac{C}{x+4}^{\backslash (x-4)^2} =$$

$$= \frac{Ax+4A+Bx^2-16B+Cx^2-8Cx+16C}{(x-4)^2(x+4)};$$

$$x^2+4 = (B+C)x^2 + (A-8C)x + 4A - 16B + 16C;$$

$$\begin{array}{c|} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \quad \begin{cases} B+C=1; \\ A-8C=0; \\ 4A-16B+16C=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} A=5/2; \\ B=11/16; \\ C=5/16. \end{cases}$$

Проводимо інтегрування:

$$\int \frac{x^2+4}{(x^2-16)(x-4)}\,dx = \int \frac{x^2+4}{(x+4)(x-4)^2}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{5/2}{(x-4)^2} + \frac{11/16}{x-4} + \frac{5/16}{x+4} \right) dx = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-4)^2} + \frac{11}{16}\int \frac{dx}{x-4} +$$

$$+ \frac{5}{16}\int \frac{dx}{x+4} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(x-4)} + \frac{11}{16}\ln|x-4| + \frac{5}{16}\ln|x+4| + C\,. \ \blacklozenge$$

Приклад 1.25. Знайти інтеграл від раціональної функції

$$\int \frac{x^5-3}{x^3+2x^2+5x}\,dx.$$

$\Diamond$ Підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & & & -3 & & x^3+2x^2+5x \\
\cline{7-7}
x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & & & x^2-2x-1 \\
\cline{1-3}
- & -2x^4 & -5x^3 & & -3 & & \\
 & -2x^4 & -4x^3 & -10x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & - & -x^3 & +10x^2 & -3 & & \\
 & & -x^3 & -2x^2 & -5x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 12x^2 & +5x & -3 &
\end{array}
$$

Таким чином

$$\frac{x^5-3}{x^3+2x^2+5x} = x^2-2x-1+\frac{12x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x}.$$

Дріб у правій частині рівності є правильним. Розкладаємо його на прості дроби, попередньо перетворивши знаменник

$$\frac{12x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x} = \frac{12x^2+5x-3}{x(x^2+2x+5)}.$$

Квадратний тричлен x^2+2x+5 має комплексні корені $(D<0)$, тому одержимо простий дріб III типу. Розкладаємо правильний дріб на прості дроби:

$$\frac{12x^2+5x-3}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}.$$

Невизначені коефіцієнти знаходимо вище описаним методом:

$$\frac{12x^2+5x-3}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x}^{\backslash x^2+2x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}^{\backslash x} = \frac{Ax^2+2Ax+5A+Bx^2+Cx}{x(x^2+2x+5)};$$

$$12x^2+5x-3 = Ax^2+2Ax+5A+Bx^2+Cx;$$

$$
\begin{array}{c|}
x^2 \\ x^1 \\ x^0
\end{array}
\quad
\begin{cases}
A+B=12; \\
2A+C=5; \\
5A=-3;
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
B=63/5; \\
C=31/5; \\
A=-3/5.
\end{cases}
$$

Отже,

$$\frac{12x^2+5x-3}{x(x^2+2x+5)} = \frac{-3/5}{x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{63x+31}{x^2+2x+5}.$$

Проводимо інтегрування дробово-раціональної функції:

$$\int \frac{x^5-3}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \int \left(x^2 - 2x - 1 - \frac{3}{5x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{63x+31}{x^2+2x+5} \right) dx =$$

$$= \int x^2 dx - 2\int x\,dx - \int dx - \frac{3}{5}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{63x+31}{x^2+2x+5}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 - x - \frac{3}{5}\ln|x| + \frac{1}{5}\int \frac{63x+31}{x^2+2x+5}\,dx\,.$$

Обчислення останнього інтегралу проведемо окремо. Під знаком інтеграла простий дріб III типу, а тому

$$\int \frac{63x+31}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{63x+31}{(x+1)^2+4}\,dx = \begin{bmatrix} t = x+1, \\ x = t-1, \\ dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{63(t-1)+31}{t^2+4}\,dt = \int \frac{63t-32}{t^2+4}\,dt = \frac{63}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+4} - 32\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{63}{2}\ln|t| - 16\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C = \frac{63}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| - 16\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2} + C.$$

Таким чином, одержуємо відповідь:

$$\int \frac{x^5-3}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - x - \frac{3}{5}\ln|x| + \frac{63}{10}\ln\left|x^2+2x+5\right| -$$

$$-\frac{16}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2} + C. \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання.

Розкласти раціональні функції на прості дроби:

36. $\dfrac{1}{(x^2+5x+6)(x+4)}$, 37. $\dfrac{x+5}{(x+4)^3(x-3)}$, 38. $\dfrac{2x^2-3}{(x^2+4)(x-10x+25)}$,

39. $\dfrac{x^5+2x^3+3}{x^4-2x^2+1}$, 40. $\dfrac{1-7x}{(x^2+5x+14)(x^3-x^2)}$, 41. $\dfrac{x}{(x+6)(x^2-4x+4)}$,

$$42. \frac{5}{(x^2+8)x}, \quad 43. \frac{1}{x^4+5x^2+4}, \quad 44. \frac{x^2-2}{x^5+4x^4+4x^3}, \quad 45. \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Обчислити інтеграли від простих дробів:

$$46. \int \frac{3}{x-5}\,dx, \quad 47. \int \frac{6}{x-\sqrt{3}}\,dx, \quad 48. \int \frac{4}{(x-3)^7}\,dx, \quad 49. \int \frac{7}{(x-9)^5}\,dx,$$

$$50. \int \frac{3x^2-1}{x^2+3x+\frac{13}{4}}\,dx, \quad 51. \int \frac{x-5}{x^2-4x+6}dx\ , \quad 52. \int \frac{1-x}{x^2+1}dx\ ,$$

$$53. \int \frac{3}{(x-5)^3}\,dx, \quad 54. \int \frac{2x-5}{3x^2+6x-2}\,dx, \quad 55. \int \frac{x+2}{x^2+9}\,dx.$$

Обчислити інтеграли:

$$56. \int \frac{x}{x^2-4x-5}\,dx, \quad 57. \int \frac{3x-1}{x^3-3x^2}\,dx, \quad 58. \int \frac{2x-1}{x^3+5x^2+2x+10}\,dx,$$

$$59. \int \frac{x-5}{x^3-4x^2+4x}dx\ , \quad 60. \int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx, \quad 61. \int \frac{3x+2}{x^2-8x-9}\,dx,$$

$$62. \int \frac{1-x}{x^3-1}dx\ , \quad 63. \int \frac{x^3+1}{x^2-x}\,dx, \quad 64. \int \frac{x^4+2x-4}{x^3+4x}\,dx.$$

1.2.5 Інтегрування ірраціональних функцій

Якщо в раціональному дробі деякі доданки в чисельнику і знаменнику замінити коренями від раціональних функцій (в тому числі і від многочленів), то одержана функція називається **ірраціональною.**

У деяких випадках інтеграли від ірраціональних функцій можна раціоналізувати, тобто за допомогою придатної підстановки привести до інтегралів від раціональних функцій.

Розглянемо найбільш типові випадки:

1. Маємо інтеграл вигляду:

$$\int R(x, \sqrt[n]{x^k}, \sqrt[m]{x^p}, ..., \sqrt[q]{x^l})\,dx,$$

де $R(\cdot,\cdot,\cdots,\cdot)$ — раціональна функція від аргументів $x, \sqrt[n]{x^k}, \sqrt[m]{x^p}, \ldots, \sqrt[q]{x^l}$. Підінтегральна функція раціоналізується за допомогою підстановки $x = t^s$, де s — це найменше спільне кратне показників коренів, тобто чисел n, m, q.

Нагадаємо: найменше спільне кратне (НСК) декількох чисел — це найменше натуральне число, яке ділиться націло на кожне із заданих чисел.

Приклад 1.26. Знайти інтеграл від ірраціональної функції:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx.$$

$\Diamond$ Оскільки підінтегральна функція містить $\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x^2}, \sqrt{x}$, то вона раціоналізується за допомогою підстановки $x = t^6$, оскільки НСК(2,3)=6.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx = \left[x = t^6, dx = 6t^5 dt\right] = \int \frac{t^2}{t^4-t^3}\cdot 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^7}{t^4-t^3}\,dt =$$

$$= 6\int \frac{t^4}{t-1}\,dt = \left[\begin{array}{l|l} t^4 & t-1 \\ \underline{t^4 - t^3} & \overline{t^3+t^2+t+1} \\ \quad - t^3 & \\ \quad \underline{t^3 - t^2} & \\ \qquad - t^2 & \\ \qquad \underline{t^2 - t} & \\ \qquad\quad - t & \\ \qquad\quad \underline{t - 1} & \\ \qquad\qquad 1 & \end{array}\right] =$$

$$= 6\int (t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1})\,dt = 6\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right)+C. \blacklozenge$$

2. Інтеграл вигляду:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^k}, \sqrt[m]{(ax+b)^p}, ..., \sqrt[q]{(ax+b)^l}\right)dx,$$

раціоналізується за допомогою підстановки: $ax + b = t^s$, де s — це найменше спільне кратне показників коренів, тобто чисел n, m, q.

Приклад 1.27. Знайти інтеграл від ірраціональної функції

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}\,dx}.$$

$\Diamond$ Оскільки підінтегральна функція містить $x, \sqrt{1+x}, \sqrt[3]{1+x}$, то вона раціоналізується за допомогою підстановки $1+x=t^6$.

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx = \left[1+x=t^6;\ dx=6t^5\,dt\right] = \int \frac{(t^6-1)+t^3}{t^2}\cdot 6t^5\,dt =$$

$$6\int (t^6-1+t^3)\cdot t^3\,dt = 6\int (t^9+t^6-t^3)\,dt =$$

$$= 6\left[\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right]+C = \left[\begin{array}{c}\text{повертаємося до змінної } x:\\ 1+x=t^6,\ t=\sqrt[6]{1+x}\end{array}\right] =$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt[6]{(1+x)^{10}}}{10}+\frac{\sqrt[6]{(1+x)^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{(1+x)^4}}{4}\right]+C =$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt[3]{(1+x)^5}}{10}+\frac{\sqrt[6]{(1+x)^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}}{4}\right]+C.\ \blacklozenge$$

3. Обчислення інтегралів вигляду:

$$\text{а)}\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx;\quad \text{б)}\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx;\quad \text{в)}\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx$$

проводиться за допомогою наступних підстановок:

$$\text{а) } x=a\sin t \text{ (або } x=a\cos t),\ \text{тоді } dx=a\cos t\,dt,$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t;$$

$$\text{б) } x=a\,\mathrm{tg}\,t \text{ (або } x=a\,\mathrm{ctg}\,t),\ \text{тоді } dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t},$$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,t}=a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t};$$

$$\text{в) } x=\frac{a}{\cos t} \text{ (або } x=\frac{a}{\sin t}),\ \text{тоді } dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=a\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=a\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=a\,\mathrm{tg}\,t.$$

Приклад 1.28. Обчислити інтеграли

$$\text{а)}\int \sqrt{9-x^2}\,dx,\quad \text{б)}\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}},\quad \text{в)}\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-4}}.$$

а) $\Diamond$ Раціоналізацію підінтегрального виразу проведемо за допомогою підстановки: $x = a\sin t$

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} x = 3\sin t,\ dx = 3\cos t\,dt; \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\cos t \end{array}\right] =$$

$$\int 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt = 9\int \cos^2 t\,dt = 9\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{9}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{9}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \Bigg[\text{повертаємося до змінної } x\text{: } \sin t = \frac{x}{3},\ t = \arcsin\frac{x}{3};$$

$$\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t \cdot \cos t = \sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} = \sin(\arcsin\frac{x}{3})\times$$

$$\times\sqrt{1-(\sin(\arcsin\tfrac{x}{3}))^2} = \frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\tfrac{x^2}{9}}\ \Bigg] = \frac{9}{2}\left(\arcsin\tfrac{x}{3} + \frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\tfrac{x^2}{9}}\right)\ . \blacklozenge$$

б) $\Diamond$ У даному випадку використаємо підстановку: $x = a\,\mathrm{tg}\,t$.

$$\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}} = \left[\begin{array}{c} x = \mathrm{tg}\,t,\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}, \\ \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\mathrm{tg}^2 t + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \dfrac{1}{\cos t} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{\mathrm{tg}^2 t\cdot\dfrac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t\cdot dt}{\mathrm{tg}^2 t\cdot\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\mathrm{tg}^2 t\cdot\cos t} = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\cos t}\,dt =$$

$$= \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C = \left[\begin{array}{c} \text{повертаємося до змінної } x: \\ x = \mathrm{tg}\,t,\ t = \mathrm{arctg}\,x \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\sin(\mathrm{arctg}\,x)} + C.\ \blacklozenge$$

в) $\Diamond$ Використаємо підстановку: $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-4}} = \left[\begin{array}{c} x = \dfrac{2}{\cos t},\ dx = \frac{2\sin t\,dt}{\cos^2 t}, \\ \sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = 2\,\mathrm{tg}\,t \end{array}\right] =$$

$$\int \frac{\frac{2\sin t\,dt}{\cos^2 t}}{\frac{2}{\cos t}\cdot 2\operatorname{tg} t} = \int \frac{\operatorname{tg} t\,dt}{2\operatorname{tg} t} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}\,t + C =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{повертаємося до змінної } x: \\ \cos t = \dfrac{2}{x},\ t = \arccos\dfrac{2}{x} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x} + C.\ \blacklozenge$$

4. Окремим випадком розглянемо інтегрування біномінальних диференціалів.

Вираз $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ де $a,\ b,\ m,\ n,\ p$ — дійсні числа, $a\neq 0,\ b\neq 0$, називається **біноміальним диференціалом**.

Теорема 1.2. *Інтеграл від біноміального диференціала*

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \tag{1.12}$$

може бути проінтегрований в елементарних функціях шляхом раціоналізуючої заміни тільки для раціональних $m,\ n,\ p$ в одному з трьох випадків:
1. Нехай p — ціле. Тоді $x=t^k$, де k — спільний знаменник чисел $m,\ n$.
2. Нехай $\dfrac{m+1}{n}$ — ціле. Тоді $a+bx^n=t^k$, де k — знаменник дробу p.
3. Нехай $\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле. Тоді $ax^{-n}+b=t^k$, де k — знаменник дробу p.

Приклад 1.29. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

$\lozenge$ Запишемо заданий інтеграл у наступному вигляді:

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx$$

і тоді, порівнюючи із (1.12), отримаємо

$$m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{3}.$$

Складаємо вираз $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$ — ціле число. Таким чином у нас другий випадок теореми і тому використаємо відповідну підстановку.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{c} 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3,\ x^{\frac{1}{4}}=t^3-1,\ x=(t^3-1)^4,\ x^{-\frac{1}{2}}= \\ \dfrac{1}{(t^3-1)^2},\ dx=4(t^3-1)^3 3t^2dt=12t^2(t^3-1)^3dt \end{array}\right] =$$

$$\int \frac{1}{(t^3-1)^2}\, t\cdot 12(t^3-1)^3t^2\, dt = 12\int t^3(t^3-1)dt = 12\int (t^6-t^3)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = 12t^4\left(\frac{t^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C = \left[\begin{array}{c}\text{повертаємося до } x:\\ t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\end{array}\right] =$$

$$= 12(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C. \blacklozenge$$

5. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx$, де R — раціональна функція, обчислюються за допомогою **підстановок Ейлера**. Є три підстановки Ейлера, але частіше використовуються перші дві.

Розглянемо три можливі випадки їх використання:

а) Якщо $a>0$, то застосовується **перша підстановка Ейлера**::

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x \qquad (1.13)$$

Знак $''+''$ або $''-''$ можна вибирати довільним чином. Для проведення подальших дій виберемо знак $''+''$, тобто візьмемо підстановку $\sqrt{ax^2+bx+c} = t+\sqrt{a}x$. Обидві частини рівності підносимо до квадрату:

$$ax^2+bx+c = t^2+2\sqrt{a}xt+ax^2,\ bx+c = t^2+2\sqrt{a}xt,$$

звідки і отримуємо вираз для змінної x у явному вигляді:

$$x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}.$$

Тоді

$$dx = \frac{2t(b-2t\sqrt{a})+2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b-2t\sqrt{a})^2}\, dt.$$

Знаходимо вираз для $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t+\sqrt{a}x = \frac{bt-t^2\sqrt{a}-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}\,.$$

Таким чином заданий інтеграл набуде вигляду:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx =$$

$$\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}, \frac{bt-t^2\sqrt{a}-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}\right)\frac{2t(b-2t\sqrt{a})+2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b-2t\sqrt{a})^2}\, dt$$

і обчислюється методом розкладання на прості дроби.

Приклад 1.30. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$$

$\diamondsuit$ Підінтегральна функція є раціональною функцією відносно $\sqrt{x^2+x+1}$ та x, тому можна використати підстановку Ейлера. Оскільки $a=1$ і $1>0$, то використаємо першу підстанову (1.13):

$$\sqrt{x^2+x+1}=t+x\,.$$

Підносимо обидві частини рівності до квадрату і виражаємо змінну x через змінну t:

$$x^2+x+1=t^2+2tx+x^2;\ x=\frac{t^2-1}{1-2t}.$$

Знаходимо dx:

$$dx=\frac{-\,2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}\,dt.$$

Залишається виразити $\sqrt{x^2+x+1}$ через нову змінну t і підставити у підінтегральний вираз:

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+t=\frac{t^2-1}{1-2t}+t=\frac{-\,t^2+t-1}{1-2t}\,,$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=\int \frac{\dfrac{-\,2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}\,dt}{\dfrac{t^2-1}{1-2t}+\dfrac{-\,t^2+t-1}{1-2t}}=$$

$$=\int \frac{(-2t^2+2t-2)\;dt}{(1-2t)^2\left(\dfrac{t^2-1}{1-2t}+\dfrac{-\,t^2+t-1}{1-2t}\right)}=\int \frac{(-2t^2+2t-2)\;dt}{(1-2t)\,(t^2-1-t^2+t-1)}=$$

$$=\int \frac{(-2t^2+2t-2)\;dt}{(1-2t)(t-2)}.$$

Таким чином ми отримали інтеграл від дробово-раціональної функції. Підінтегральна функція є неправильним дробом (степінь чисельника і знаменника рівні 2). Щоб отримати правильний дріб спочатку розкриємо дужки у знаменнику, а потім чисельник і знаменник помножимо на (-1):

$$\frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)(t-2)}=\frac{-2t^2+2t-2}{-2t^2+5t-2}=\frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2}.$$

Зазвичай у таких випадках многочлен чисельника ділиться на многочлен знаменника. Але у даному прикладі зручніше буде поступити іншим способом — у чисельнику додати і відняти $3t$:

$$\frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2}=\frac{2t^2-5t+2+3t}{2t^2-5t+2}=$$

$$\frac{2t^2-5t+2}{2t^2-5t+2}+\frac{3t}{2t^2-5t+2}=1+\frac{3t}{2t^2-5t+2},$$

де дріб $\dfrac{3t}{2t^2-5t+2}$ є правильним і розкладається на прості дроби першого типу:

$$\frac{3t}{2t^2-5t+2}=\frac{3t}{(2t-1)(t-2)}=\frac{A}{2t-1}+\frac{B}{t-2}=\frac{(A+2B)t-2A-B}{(2t-1)(t-2)};$$

$$(A+2B)t-2A-B=3t;\ \left\{\begin{array}{l} A+2B=3, \\ -2A-B=0, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} A=-1, \\ B=2. \end{array}\right.$$

Тоді

$$\int\frac{(-2t^2+2t-2)\,dt}{(1-2t)(t-2)}=\int\left(1-\frac{1}{2t-1}+\frac{2}{t-2}\right)\,dt=t-\frac{1}{2}\ln|2t-1|+$$

$+2\ln|t-2|+C=$ [враховуємо, що $t=\sqrt{x^2+x+1}-x$] $=\sqrt{x^2+x+1}-x-$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right|+2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-2\right|+C.\ \blacklozenge$$

б) Якщо $c>0$, то використовується **друга підстановка Ейлера**:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}\,. \tag{1.14}$$

Знак $''+''$ або $''-''$ можна вибирати довільним чином. Виберемо знак $''+''$, тобто візьмемо підстановку $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$. Обидві частини рівності підносимо до квадрату:

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2\sqrt{c}tx+c,\ ax^2+bx=x^2t^2+2\sqrt{c}tx$$

і виражаємо змінну x у явному вигляді:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

Тоді

$$dx = \frac{2\sqrt{c}(a - t^2) + 2t(2\sqrt{c}t - b)}{(a - t^2)^2}\, dt.$$

Знаходимо вираз для $\sqrt{ax^2 + bx + c}$:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{c\, t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}\,.$$

Підставивши знайдені вирази у заданий інтеграл, одержуємо інтеграл від дробово-раціональної функції:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\, dx =$$

$$= \int R\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{c\, t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}\right) \frac{2\sqrt{c}(a - t^2) + 2t(2\sqrt{c}t - b)}{(a - t^2)^2}\, dt,$$

який обчислюється методом розкладання на прості дроби.

Приклад 1.31. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}\, dx.$$

$\lozenge$ Підінтегральна функція є раціональною функцією відносно $\sqrt{x^2 - x + 1}$ та x, тому можна використати підстановку Ейлера. Оскільки $c = 1$ і $1 > 0$, то використаємо другу підстанову (1.14):

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = xt + 1\,.$$

Підносимо обидві частини рівності до квадрату і виражаємо змінну x через нову змінну t:

$$x^2 - x + 1 = x^2t^2 + 2tx + 1;\; x = \frac{2t + 1}{-t^2 + 1}.$$

Знаходимо dx:

$$dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(-t^2 + 1)^2}\, dt.$$

Виражаємо $\sqrt{x^2-x+1}$ через нову змінну t і підставляємо у підінтегральний вираз:

$$\sqrt{x^2-x+1} = xt+1 = \frac{t^2+t+1}{(-t^2+1)}\,,$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\,dx = \int \frac{\dfrac{2t^2+2t+2}{(-t^2+1)^2}\,dt}{\dfrac{2t+1}{-t^2+1}+\dfrac{t^2+t+1}{-t^2+1}} =$$

$$= -\int \frac{(2t^2+2t+2)\,dt}{(t^2-1)(t^2+3t+2)} = -\int \frac{(2t^2+2t+2)\,dt}{(t+1)^2(t-1)(t+2)}.$$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, який розкладаємо на суму простих дробів першого та другого типів:

$$\frac{(2t^2+2t+2)}{(t+1)^2(t-1)(t+2)} = \frac{A}{(t+1)^2}+\frac{B}{(t+1)}+\frac{C}{(t-1)}+\frac{D}{(t+2)} =$$

$$\frac{A(t-1)(t+2)+B(t^2-1)(t+2)+C(t+1)^2(t+2)+D(t^2-1)(t+1)}{(t+1)^2(t-1)(t+2)};$$

$$(B+C+D)t^3+(A+2B+4C+D)t^2+(A-B+5C-D)t-$$

$$-2A-2B+2C-D = 2t^2+2t+2;$$

$$\begin{cases} B+C+D=0, \\ A+2B+4C+D=2, \\ A-B+5C-D=2, \\ -2A-2B+2C-D=2, \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1, \\ B=3/2, \\ C=1/2, \\ D=-2. \end{cases}$$

Тоді

$$-\int \frac{(2t^2+2t+2)\,dt}{(t+1)^2(t-1)(t+2)} = -\int \frac{-1}{(t+1)^2}+\frac{3/2}{(t+1)}+\frac{1/2}{(t-1)}+\frac{-2}{(t+2)} =$$

$$\frac{-1}{t+1}-\frac{3}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+2\ln|t+2|+C =$$

$$= \left[\text{враховуємо, що } t = \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}\right] =$$

$$= \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}+1} - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}+1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}-1\right| +$$

$$+2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}+2\right| + C = -\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+x-1} -$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x-1}{x}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x-1}{x}\right| +$$

$$+2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+2x-1}{x}\right| + C = \left[\begin{array}{c}\text{враховуючи, що } \ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b,\\ \text{результат можна спростити}\end{array}\right] =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+x-1} - \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+x-1\right| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-x-1\right| + 2\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+2x-1\right| + C. \blacklozenge$$

Слід зауважити, що у багатьох випадках застосування першої підстановки Ейлера не виключає можливості застосування другої. У прикладах (1.30) та (1.31) можна використовувати і першу, і другу підстановки Ейлера.

в) Якщо многочлен ax^2+bx+c має дійсні різні корені x_1, x_2, тобто ax^2+ $+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, то використовується **третя підстановка Ейлера**:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1) \text{ або } \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_2). \qquad (1.15)$$

Розглянемо перший із запропонованих варіантів підстановки (1.15). Підносимо обидві частини рівності до квадрату і виражаємо змінну x у явному вигляді:

$$ax^2+bx+c = t^2(x-x_1)^2,\ a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2;$$

$$x = \frac{t^2x_1 - ax_2}{t^2-a}.$$

Тоді

$$dx = \frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

Через нову змінну t виражаємо вираз $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{at(x_1-x_2)}{(t^2-a)}\,.$$

Приклад 1.32. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{2x+8}{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx.$$

$\Diamond$ Оскільки $\sqrt{3-2x-x^2}$ має дійсні різні корені $x=-3$, $x=1$, то можна використати третю підстановку Ейлера (1.15):

$$\sqrt{3-2x-x^2}=t(x+3).$$

Виражаємо змінну x через t і знаходимо dx:

$$x=\frac{1-3t^2}{t^2+1},\quad dx=\frac{-8t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Підставляємо одержані вирази у заданий інтеграл:

$$\int \frac{2x+8}{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx=\int \frac{2\cdot\dfrac{1-3t^2}{t^2+1}+8}{\left(\dfrac{1-3t^2}{t^2+1}+1\right)\dfrac{4t}{t^2+1}}\cdot\frac{-8t}{(t^2+1)^2}\,dt=$$

$$=\int\frac{2t^2+10}{(t^2-1)(t^2+1)}\,dt=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\dfrac{2t^2+10}{(t^2-1)(t^2+1)}=\dfrac{2t^2+10}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{t+1}+\dfrac{Ct+D}{t^2+1}=\\ =\dfrac{A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t-1)(t+1)}{(t-1)(t+1)(t^2+1)};\\ 2t^2+10=A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t-1)(t+1)=\\ =(A+B+C)t^3+(A-B+D)t^2+(A+B-C)t+A-B-D;\\ \begin{cases}A+B+C=0;\\ A-B+D=2;\\ A+B-C=0;\\ A-B-D=10,\end{cases}\quad\begin{cases}A=3;\\ B=-3;\\ C=0;\\ D=-4.\end{cases}\end{array}\right]=$$

$$=\int\left(\frac{3}{t-1}-\frac{3}{t+1}-\frac{4}{t^2+1}\right)\,dt=3\ln|t-1|-3\ln|t+1|-4\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\left[t=\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+3}=\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}\right]=3\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}-1\right|-3\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}+1\right|-$$

$$-4\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}+C. \ \blacklozenge$$

Зауваження. Часто підстановки Ейлера приводять до громіздких викладок. Тому деколи доцільніше використати інші заміни змінної для знаходження невизначених інтегралів, що містять квадратичні ірраціональності.

Завдання для самостійного виконання

Знайти невизначені інтеграли:

$$65.\ \int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx,\quad 66.\ \int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx,\quad 67.\ \int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx,$$

$$68.\ \int\frac{\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}\,dx,\quad 69.\ \int\frac{x^4}{\sqrt{x-1}}\,dx,\quad 70.\ \int\frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4}\,dx,$$

$$71.\ \int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx,\quad 72.\ \int\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx,\quad 73.\ \int\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx,$$

$$74.\ \int\frac{1}{x^3\sqrt{x^2+1}}\,dx,\quad 75.\ \int\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx,\quad 76.\ \int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$77.\ \int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,\quad 78.\ \int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx,\quad 79.\ \int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx,$$

$$80.\ \int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx,\quad 81.\ \int\frac{1}{x\sqrt{2+x-x^2}}\,dx,\quad 82.\ \int\frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}\,dx,$$

$$83.\ \int\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx,\quad 84.\ \int\frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$$

1.2.6 Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо деякі випадки інтегрування тригонометричних функцій

1. Інтеграли вигляду

$$\int\sin nx\cdot\cos mx\,dx,\ \int\sin nx\cdot\sin mx\,dx,\ \int\cos nx\cdot\cos mx\,dx$$

легко обчислюються за допомогою тригонометричних формул, які дозволяють *добуток тригонометричних функцій* представити у вигляді суми або різниці, а саме:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]\,;$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\,;$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\,.$$

Приклад 1.33. Обчислити інтеграл $\int\cos 4x\cdot\cos 3x\,dx$.

$\lozenge$ Оскільки

$$\cos 4x\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}[\cos(4x-3x)+\cos(4x+3x)]==\frac{1}{2}[\cos x+\cos 7x]\,,$$

то

$$\int\cos 4x\cdot\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int[\cos x+\cos 7x]\,dx=\frac{1}{2}\left(\sin x+\frac{1}{7}\sin 7x\right)+C\,.\ \blacklozenge$$

2. Інтеграли вигляду

$$\int\sin^n x\cdot\cos^m x\,dx,$$

де $m,n\in\mathbb{N}$, легко обчислюються, якщо m,n — парні, за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\,;\ \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\,;\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Якщо хоч один із показників степеня непарний (наприклад $m=2k+1$), то, враховуючи, що $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, одержуємо інтеграл

$$\int\sin^n x\cdot\cos^m x\,dx=\int\sin^n x\cdot\cos^{2k+1}x\,dx=\int\sin^n x\cdot\cos^{2k}x\cdot\cos x\,dx=$$

$$=\int\sin^n x\cdot(1-\sin^2 x)^k\cdot\cos x\,dx,$$

який обчислюється за допомогою підстановки $t=\sin x$.

Приклад 1.34. Обчислити інтеграли:

$$\text{а)} \int \cos^4 x\,dx,\ \text{б)} \int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx,\ \text{в)} \int \sin^4 x\cdot\cos^3 x\,dx,\ \text{г)} \int \cos^5 x\,dx.$$

$\lozenge$ а) Оскільки

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\,(1+\cos 2x)\right)^2 = \tfrac{1}{4}\,(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) =$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\tfrac{1}{2}(1+\cos 4x)\right),$$

то

$$\int \cos^4 x\,dx = \tfrac{1}{4}\int (\tfrac{3}{2}+2\cos 2x+\tfrac{1}{2}\cos 4x)\,dx = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}\,x+\sin 2x+\tfrac{1}{8}\sin 4x\right)+C\,.$$

б) Підінтегральну функцію перетворимо за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin^4 x\cdot\cos^2 x = \sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x = (\sin x\cdot\cos x)^2\sin^2 x = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2\sin^2 x =$$

$$= \tfrac{1}{4}\sin^2 2x\sin^2 x = \tfrac{1}{4}\ \cdot\frac{1}{2}\,(1-\cos 4x)\ \cdot\tfrac{1}{2}\,(1-\cos 2x) = \tfrac{1}{16}(1-\cos 4x-\cos 2x+$$
$$+\cos 4x\cdot\cos 2x) = \frac{1}{16}\left(1-\cos 4x-\cos 2x+\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(1-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x\right)\,.$$

Тоді

$$\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx = \frac{1}{16}\int\left(1-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x\right)\,dx =$$
$$= \frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C.$$

в) У тригонометричній функції, яка знаходиться під знаком інтеграла у непарному степені виділимо перший степінь і застосуємо відповідні тригонометричні формули:

$$\sin^4 x\cdot\cos^3 x = \sin^4 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x = \sin^4 x\cdot(1-\sin^2 x)\cdot\cos x =$$

$$= (\sin^4 x - \sin^6 x) \cdot \cos x$$

і застосуємо підстановку $t = \sin x$

$$\int (\sin^4 x - \sin^6 x) \cdot \cos x \, dx = [t = \sin x; \; dt = \cos x \, dx] = \int (t^4 - t^6) \, dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C \, .$$

г) Запишемо, що $\cos^5 x = \cos^4 x \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$ і тоді застосуємо підстановку $t = \sin x$:

$$\int \cos^5 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx = [t = \sin x; \; dt = \cos x \, dx] =$$

$$= \int (1 - t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) \, dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \sin x - \frac{2}{3} \, \sin^3 x + \frac{1}{5} \, \sin^5 x + C. \; ♦$$

3. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$, де R — раціональна функція відносно $\sin x$, $\cos x$ раціоналізуються за допомогою підстановки

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi, \tag{1.16}$$

яка називається **універсальною тригонометричною підстановкою**.

Так як тригонометричні функції $\sin x$, $\cos x$ виражаються через функцію $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ наступним чином

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

то за допомогою універсальної підстановки $\sin x$, $\cos x$, dx можна виразити через нову змінну t:

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \, .$$

Приклад 1.35. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{1}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x} \, dx.$$

$\Diamond$ Для обчислення інтегралу використаємо універсальну підстановку (1.16)

$$\int \frac{1}{8-4\sin x+7\cos x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}, \\ 8-4\sin x+7\cos x= \\ =8-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{7(1-t^2)}{1+t^2}= \\ =\frac{t^2-8t+15}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{t^2-8t+15}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2-8t+15} = \int \frac{2dt}{(t-3)(t-5)} = \left[\begin{array}{c} \frac{2}{(t-3)(t-5)}=\frac{A}{t-3}+\frac{B}{t-5}= \\ \frac{A(t-5)+B(t-3)}{(t-3)(t-5)}; \\ (A+B)t-5A-3B=2; \\ \begin{cases} A+B=0, \\ -5A-3B=2, \end{cases} \begin{cases} A=-1, \\ B=1, \end{cases} \end{array}\right] =$$

$$= \int \left(\frac{-1}{t-3}+\frac{1}{t-3}\right)dt = -\ln|t-3|+\ln|t-5|+C =$$

$$= \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right| + C. \ \blacklozenge$$

Підстановка (1.13) хоча і є універсальною, але бувають випадки, коли вона приводить до складних обчислень. Розглянемо декілька випадки, у яких підінтегральна функція раціоналізується за допомогою інших підстановок.

а) якщо $R(\sin x, \cos x)$ — непарна функція відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то використаємо підстановку $t = \cos x$.

Приклад 1.36. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx.$$

$\Diamond$ Підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$, тому використаємо підстановку $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \left[t=\cos x,\ dt=-\sin x\,dx,\ \sin^2=1-t^2\right] = \int \frac{(1-t^2)\cdot(-dt)}{t^4} =$$

$$= \int \frac{(t^2-1)dt}{t^4} = \int \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}\right)dt = -\frac{1}{t}+\frac{1}{3t^3}+C = -\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+C\,. \ \blacklozenge$$

б) якщо $R(\sin x, \cos x)$ — непарна функція відносно $\cos x$, іншими словами $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то використаємо підстановку $t = \sin x$.

Приклад 1.37. Обчислити інтеграл $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}\, dx$.

$\Diamond$ Підінтегральна функція є непарною відносно $\cos x$, тому використаємо підстановку $t = \sin x$:

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}\, dx = \left[t = \sin x,\ dt = \cos x\, dx,\ \cos^4 x = (1-t^2)^2\right] = \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^8} =$$

$$= \int \frac{(1-2t^2+t^4)dt}{t^8} = \int \left(\frac{1}{t^8} - \frac{2}{t^6} + \frac{1}{t^4}\right) dt = -\frac{1}{7t^7} + \frac{2}{5t^5} - \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= -\frac{1}{\sin^7 x} + \frac{2}{5\sin^5 x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C. \ \blacklozenge$$

в) якщо $R(\sin x, \cos x)$ — парна функція відносно $\sin x, \cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то використаємо пістановку $t = \operatorname{tg} x$. У цьому випадку $\sin x$, $\cos x$ та dx легко виразити через нову змінну t:

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,,\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Приклад 1.38. Обчислити інтеграл $\int \frac{1}{2\sin^2 x + 4\cos^2}\, dx$.

$\Diamond$ Підінтегральна функція є парною відносно $\sin x$ та $\cos x$, тому використаємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x + 4\cos^2 x}\, dx = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} x\ ,\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}\,,\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}\,, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\,,\ 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = \dfrac{2t^2+4}{1+t^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{2t^2+4} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C. \ \blacklozenge$$

4. Інтеграли вигляду $\int \operatorname{tg}^n x\, dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx$, де n — ціле та $n > 2$ обчислюються за допомогою підстановки: $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

Приклад 1.39. Обчислити інтеграл

$$\int \operatorname{tg}^4 x\, dx.$$

$\lozenge$ Використаємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \left[t = \operatorname{tg} x\ , dx = \tfrac{dt}{1+t^2}\right] = \int \tfrac{t^4}{1+t^2}\, dt = \int \left(t^2 - 1 + \tfrac{1}{1+t^2}\right)\, dt =$$

$$= \tfrac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \tfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \tfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \ \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити невизначені інтеграли:

$$85. \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\, dx\ , \quad 86. \int \sin 2x\ \sin 5x\, dx\ , \quad 87. \int \sin^4 x\, dx\ ,$$

$$88. \int \operatorname{ctg}^4 x\, dx\ , \quad 89. \int \frac{dx}{\sin^6 x}\ , \quad 90. \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}\ , \quad 91. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\, dx\ ,$$

$$92. \int \frac{dx}{5 - 3\cos x},\ 93. \int \frac{dx}{1+\sin^2 x},\ 94. \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x},\ 95. \int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\, dx\ ,$$

$$96. \int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\, dx\ , \quad 97. \int \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}\, dx, \quad 98. \int \sqrt[3]{\cos^2 x}\, \sin^3 x\, dx,$$

$$99. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x}\, dx,\ 100. \int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x},\ 101. \int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x},$$

$$102. \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\, dx,\ 103. \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x},\ 104. \int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)\, dx,$$

$$105. \int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{(2\cos^2 x + \sin^2 x)\sin x}\, dx, \quad 106. \int \frac{1}{5 + 3\cos x + \sin x}\, dx.$$

1.2.7 Інтеграли, що "не беруться"

Як видно із диференціального числення, похідна від довільної елементарної функції є також функцією елементарною. Інакше кажучи, операція диференціювання не виводить нас із класу елементарних функцій. Цього не можна сказати про інтегрування — операцію, обернену до диференціювання. Інтегрування елементарної функції не завжди знову приводить до елементарної функції. Доведено, що існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли кажуть, що вони **не обчислюються в скінченому вигляді** або *"не беруться"*.

До інтегралів, які "не беруться" можна віднести наступні:

$\int e^{-x^2}\,dx$ — інтеграл Пуассона,

$\int \sin(x^2)\,dx,\ \int \cos(x^2)\,dx$ — інтеграли Френеля,

$\int \dfrac{1}{\ln x}\,dx$ — інтегральний логарифм,

$\int \dfrac{sinx}{x}\,dx$ — інтегральний синус,

$\int \dfrac{cosx}{x}\,dx$ — інтегральний косинус,

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx,\ |k|<1$ — еліптичний інтеграл,

$\int x^{\alpha}\sin x\,dx,\ \int x^{\alpha}\cos x\,dx, \int x^{\alpha}e^{x}\,dx,\ \alpha \neq 0, 1, 2, ...$ та ряд інших інтегралів.

Ці інтеграли існують, оскільки існує інтеграл від будь-якої неперервної функції, але не виражаються через елементарні функції. Такі інтеграли можуть бути обчислені наближеними методами.

Таким чином операція інтегрування є складнішою, ніж операція диференціювання. Тому треба чітко володіти методами інтегрування і вміти визначати функції, інтеграли від яких цими методами знаходяться. А також важливо розрізняти інтеграли, які "не беруться".

Розділ 2

Визначений інтеграл та його застосування

2.1 Поняття визначеного інтегралу, його геометричний та економічний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо довільним чином цей відрізок на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Візьмемо на кожному відрізку точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $(i = 1, 2, \dots)$, обчислимо значення функції $f(\xi_i)$ і помножимо на $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (Рис. 2.1).

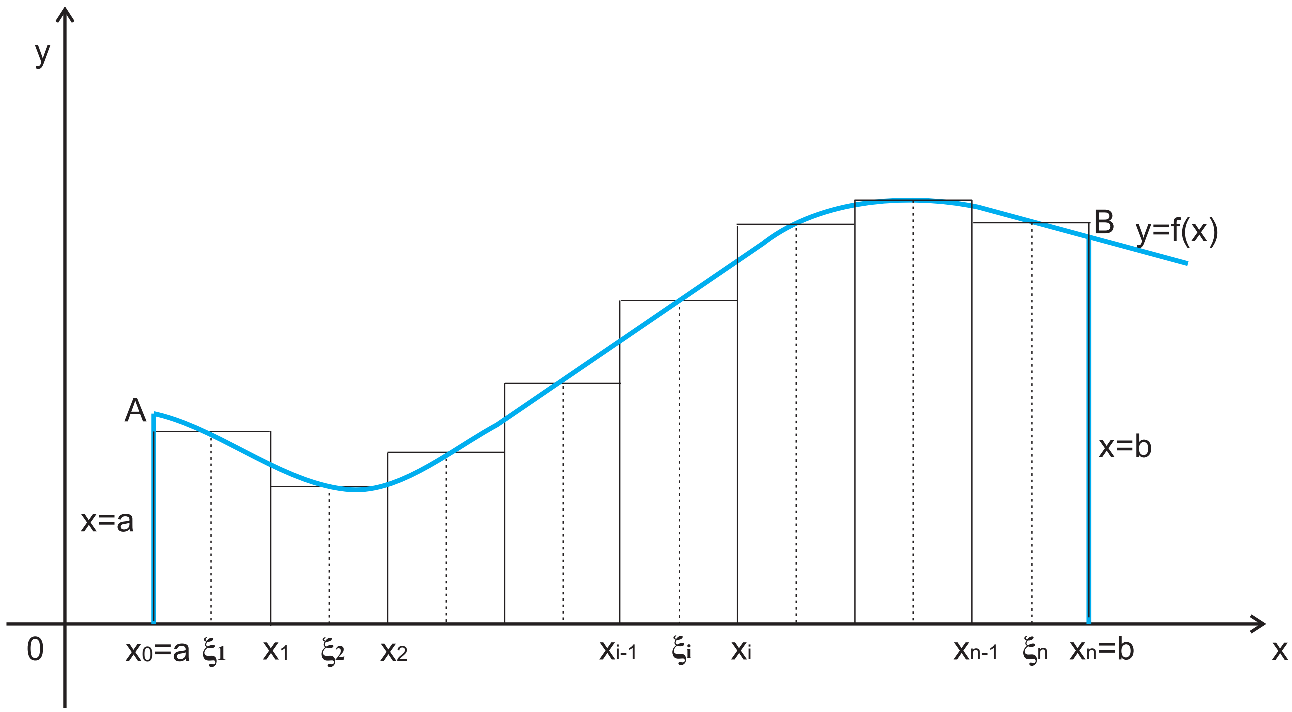

Рис. 2.1

Інтегральною сумою для функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається сума

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{2.1}$$

Означення 2.1. Якщо існує скінчена границя інтегральної суми (2.1) при $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка на частини, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається **визначеним інтегралом** функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначається

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.2}$$

При цьому функція $f(x)$ є **інтегровною** на відрізку $[a; b]$. Числа a і b називаються відповідно **нижньою** і **верхньою межею інтегрування**, функція $f(x)$ називається **підінтегральною функцією**, а вираз $f(x)dx$ — **підінтегральним виразом**, $[a; b]$ — **проміжком інтегрування**.

Теорема 2.1. *(необхідна умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a; b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Теорема 2.2. *(достатня умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона є інтегровна на цьому відрізку.*

Геометричний зміст визначеного інтегралу. Площа S криволінійної трапеції (Рис 2.1.) (фігура обмежена графіком функції $y = f(x)$, $f(x) > 0$, віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$) обчислюється за формулою:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.3}$$

Економічний зміст визначеного інтегралу. Якщо функція $y = f(x)$ — продуктивність праці в момент часу t, то обсяг V виробленої за проміжок часу [0;T] продукції обчислюється за формулою:

$$V = \int\limits_0^T f(x)\, dx. \tag{2.4}$$

2.2 Властивості визначеного інтегралу

Розглянемо основні властивості визначеного інтегралу:

1. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтегралу:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,\ A = const;$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) функцій дорівнює алгебраїчній сумі (різниці) визначених інтегралів від кожної із них:

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx;$$

3. Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то знак визначеного інтегралу зміниться на протилежний:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$$

4. Визначений інтеграл з рівними межами інтегрування рівний нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

5. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Геометрична інтерпретація властивості: якщо функція $f(x) \geqslant 0$ на відрізку $[a;b]$ і $a < c < b$, то площа S криволінійної трапеції з основою $[a;b]$ дорівнює сумі площ S_1 та S_2 з основами $[a;c]$ і $[c;b]$ (Рис. 2.2)

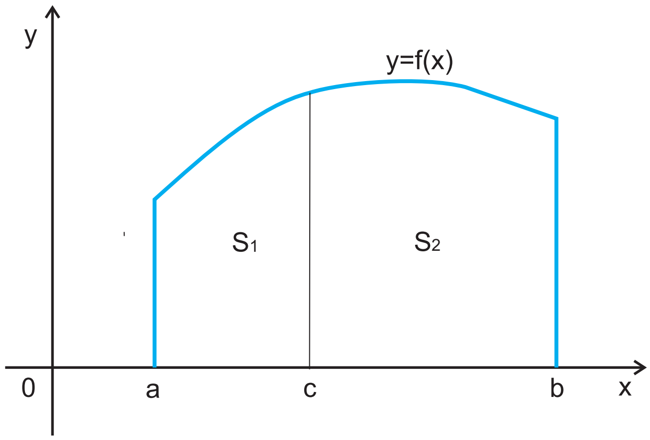

Рис. 2.2

6. Якщо на відрізку $[a; b]$ виконується нерівність $\varphi(x) \leqslant f(x)$, то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx,\ \ a < b.$$

Геометрична інтерпретація властивості: площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою $f(x)$ не менше площі, обмеженої знизу кривою $\varphi(x)$ (Рис. 2.3)

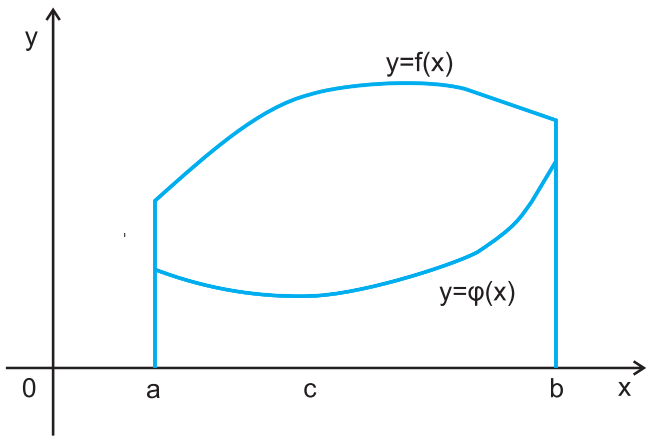

Рис. 2.3

7. Якщо m та M — найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і $a < b$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

Геометрична інтерпретація властивості: площа S криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою $f(x)$ не менше площі S_1 прямокутника висотою m і не більше площі S_2 прямокутника висотою M (Рис. 2.4)

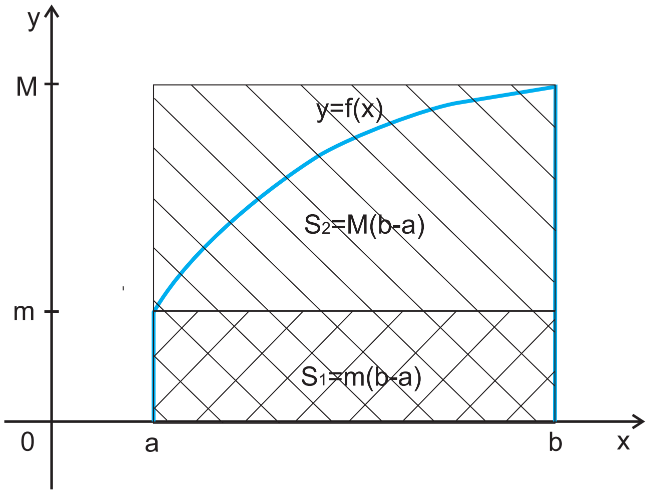

Рис. 2.4

8. Значення визначеного інтегралу не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

9. Якщо функція $f(x)$ є неперервна на відрізку $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, \text{якщо } f(x) \text{ — парна;} \\ 0, \quad \text{якщо } f(x) \text{ — непарна.} \end{cases}$$

10. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $a < b$, то існує хоча б одна точка $c \in [a;b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Дана властивість також називається "властивість про середнє значення визначеного інтеграла".

Геометрична інтерпретація властивості: якщо $f(x) \geqslant 0$ на відрізку $[a; b]$, то знайдеться хоча б одна така точка $c \in [a; b]$, що площа, обмежена кривою $f(x)$, дорівнюватиме площі прямокутника з висотою $f(c)$ (Рис. 2.5).

Число

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

називається **середнім значенням** функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

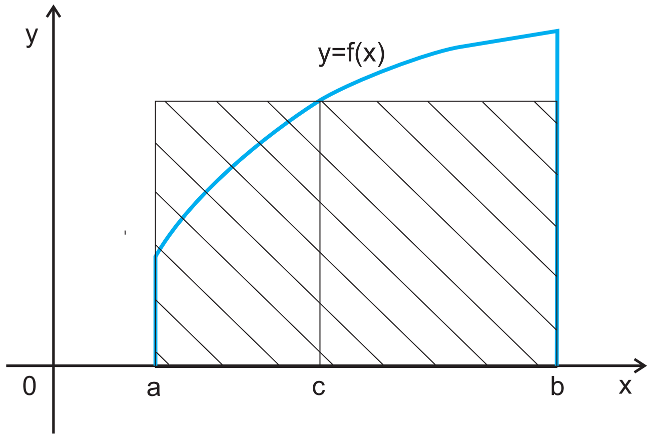

Рис. 2.5

2.3 Методи обчислення визначеного інтегралу

2.3.1 Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема 2.3. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ — будь-яка її первісна на $[a; b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{2.5}$$

Формула (2.5) називається **формулою Ньютона-Лейбніца**.

Формула Ньютона-Лейбніца надає можливість сформулювати наступне *правило*: щоб обчислити визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, потрібно знайти відповідну первісну функцію, в отриманий вираз підставити замість x спочатку верхню межу інтегрування, а потім нижню і від першого результату підстановки відняти другий.

Приклад 2.1. Обчислити інтеграл

$$\int_1^3 (x^4+2)\,dx.$$

$\lozenge$

$$\int\limits_1^3 (x^4+2)dx = \left(\frac{x^5}{5}+2x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{3^5}{5}+6\right) - \left(\frac{1}{5}+2\right) = \frac{262}{5} = 52,4\,. \ \blacklozenge$$

Приклад 2.2. Обчислити інтеграл

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx.$$

$\lozenge$

$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1. \ \blacklozenge$$

Приклад 2.3. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

$\lozenge$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}. \ \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити визначені інтеграли

107. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$, 108. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, 109. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, 110. $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{1}{3+x^2}\,dx$,

111. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} (2x-\cos x)\,dx$, 112. $\displaystyle\int\limits_0^1 e^{-3x}\,dx$, 113. $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$,

114. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{2x^3+1}{x^2}\,dx$, 115. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)\,dx$, 116. $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}}\,dx$.

2.3.2 Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, широко застосовується метод *заміни змінної (або метод підстановки).*

Теорема 2.4. *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *а функція* $x=\varphi(t)$ *має неперервну похідну на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *де* $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. *Крім того для будь-якого* $t\in[\alpha;\beta]$: $a<\varphi(t)<b$. *Тоді*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c} x=\varphi(t);\ dx=\varphi'(t)dt, \\ a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)\end{array}\right] = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{2.6}$$

Формула (2.6) називається **формулою заміни змінної** у визначеному інтегралі (або формулою підстановки).

Зауваження. Якщо при обчисленні невизначеного інтегралу заміною $x=\varphi(t)$ у первісній функції необхідно було повертатися до змінннної x, то у визначеному інтегралі потрібно тільки змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a=\varphi(t)$, а верхня межа β — як розв'язок рівняння $b=\varphi(t)$.

Зауваження. Часто зручніше замість підстановки $x=\varphi(t)$ використати підстановку $t=\psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються наступним чином: $\alpha=\psi(a)$ і $\beta=\psi(b)$.

Приклад 2.4. Обчислити інтеграл

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x}\,dx.$$

$\lozenge$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{заміна: } t=\ln x, dt=\frac{1}{x}dx, \\ \text{при: } x=e,\ t=1; \\ \text{при: } x=e^2,\ t=2\end{array}\right] = \int_1^2 t^3\,dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}. \ \blacklozenge$$

Приклад 2.5. Обчислити інтеграл

$$\int_2^{\sqrt{23}} x\sqrt[3]{x^2+4}\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int\limits_2^{\sqrt{23}} x\sqrt[3]{x^2+4}\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{заміна: } x^2+4=t^3, 2x\,dx=3t^2\,dt, \\ \text{при: } x=2,\ t=2; \\ \text{при: } x=\sqrt{23},\ t=3 \end{array}\right] = \frac{3}{2}\int\limits_2^3 t^3\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{t^4}{4}\bigg|_2^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{3^4}{4}-\frac{2^4}{4}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{65}{4} = \frac{195}{8}. \blacklozenge$$

2.3.3 Формула інтегрування частинами для визначеного інтегралу

Теорема 2.5. *Якщо функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$, то*

$$\int\limits_a^b u\,dv = u\cdot v|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{2.7}$$

Формула (2.7) називається **формулою інтегрування частинами** для визначеного інтегралу. Всі зауваження, які зазначалися для формули інтегрування частинами для невизначеного інтегралу є справедливими і для визначеного інтегралу, тобто для формули (2.7).

Приклад 2.6. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_1^e x\ln x\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int\limits_1^e x\ln x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=\ln x, du=\dfrac{1}{x}\,dx, \\ dv=x\,dx,\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x\bigg|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\,\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\bigg|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}. \blacklozenge$$

Приклад 2.7. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 xe^x\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int\limits_0^1 xe^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x,\ du = dx, \\ dv = e^x\,dx,\ v = e^x \end{array}\right] = x \cdot e^x\big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\,dx = e - e^x\big|_0^1 = 1.\ \blacklozenge$$

2.4 Застосування визначеного інтегралу

2.4.1 Обчислення площі плоскої фігури

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана неперервна функція $f(x) \geqslant 0$. Площа криволінійної трапеції — фігури, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox, прямими $x = a$ та $x = b$ (Рис. 2.6), знаходиться за формулою:

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{2.8}$$

Якщо на відрізку $[a; b]$ функція $f(x) \leqslant 0$ (Рис. 2.7), то площа фігури, обмеженої віссю Ox, кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a$ та $x = b$, обчислюється за формулою:

$$S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{2.9}$$

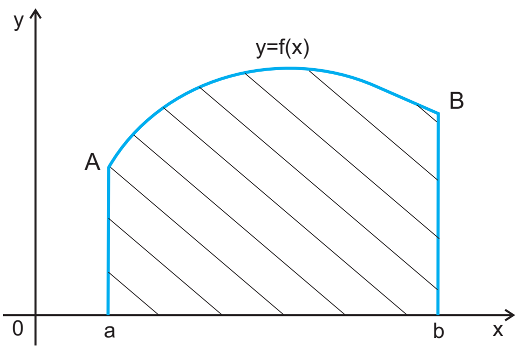

Рис. 2.6

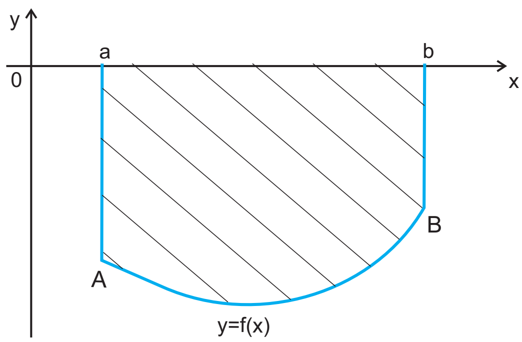

Рис. 2.7

Якщо на $[a; b]$ функція $f(x)$ змінює знак скінчене число разів (Рис. 2.8), то площа фігури, яка обмежена кривою $y = f(x)$, віссю Ox, прямими $x = a$

та $x = b$, знаходиться за формулою:

$$S = \int\limits_a^b |f(x)| \; dx. \tag{2.10}$$

Для прикладу можемо обчислити площу фігури, яка зображена на Рис. 2.8

$$S = \int\limits_a^b |f(x)| \; dx = \int\limits_a^{c_1} f(x) \; dx - \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x) \; dx + \int\limits_{c_2}^b f(x) \; dx.$$

Якщо фігура обмежена двома неперервними кривими $y = f(x)$, $y = g(x)$ та прямими $x = a$ та $x = b$ (Рис. 2.9) причому $f(x) \leqslant g(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, то площа визначається за формулою:

$$S = \int\limits_a^b (g(x) - f(x)) \; dx. \tag{2.11}$$

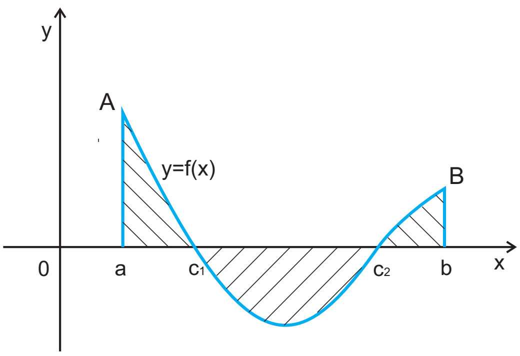

Рис. 2.8

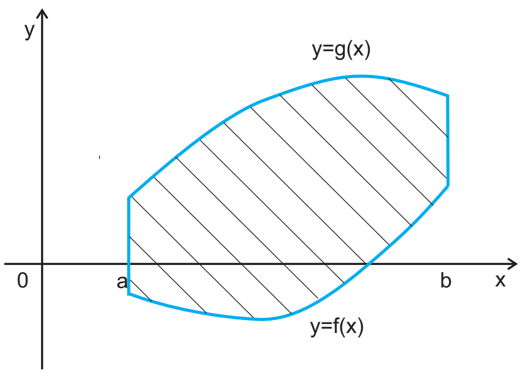

Рис. 2.9

Приклад 2.8. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x^2 + 4x$ та $y - x = 4$.

$\Diamond$ Побудуємо фігуру, площу якої потрібно обчислити. Функція $y = x^2 + 4x$ задає параболу, вітки якої напрямлені вгору і вона перетинає вісь Ox у точках $x = -4$ та $x = 0$. Функція $y - x = 4$ визначає пряму, яка перетинає вісь Ox та Oy відповідно у точках $x = -4$ та $y = 4$ (Рис. 2.10).

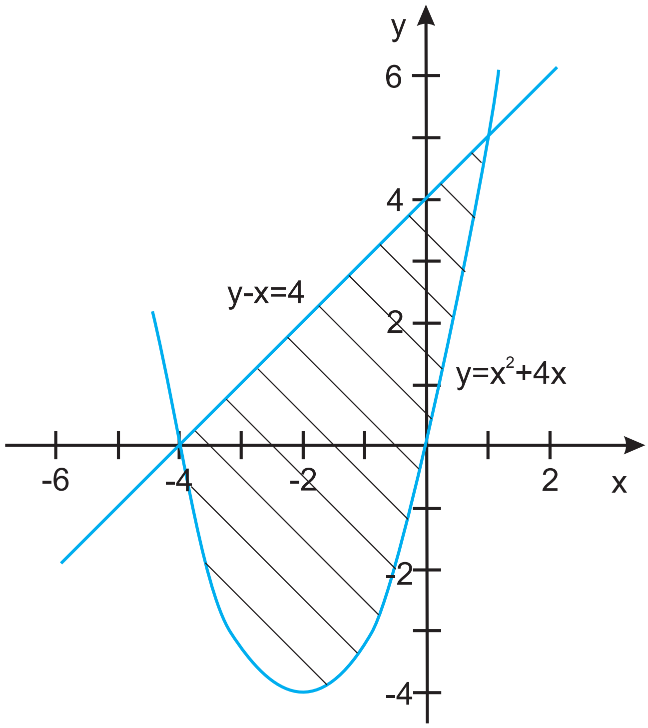

Рис. 2.10

Площу фігури будемо обчислювати за формулою (2.11), де $f(x) = x + 4$, $g(x) = x^2 + 4x$. Для знаходження меж інтегрування потрібно розв'язати систему:

$$\begin{cases} y = x + 4; & x_1 = -4; \;\; y_1 = 0, \\ y = x^2 + 4x; & x_2 = 1; \;\; y_2 = 5. \end{cases}$$

Тоді

$$S = \int\limits_{-4}^{1} \left(x + 4 - x^2 - 4x\right)\, dx = \int\limits_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 4\right)\, dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-4}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}. \;\blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити площу фігури, яка обмежена кривими:

117. $y = x^2 - 2x - 1,\; 2y = 3x - 2,$ 118. $x = y^2 - 2y,\; x = -y^2 + 2y + 6,$

119. $y = x^2 - 6x + 6,\; y = -x^2 + 2x,$ 120. $4y = x^2,\; 2y = 6 - x^2,$

$$121.\,y = x^2 + 5x,\ y = 7 - x, \quad 122.\,y = 3x - 4,\ y = -x^2,$$

$$123.\,y^2 = 4 - x,\ x = y^2 - 2y, \quad 124.\,y = 2x^2 - 12x + 16,\ y = x^2 5x + 4,$$

$$125.\,y = x\sqrt{9 - x^2},\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \quad 126.\,x = 2y^2 - 8y + 6,\ x = -y^2 - 3y.$$

2.4.2 Обчислення довжини дуги кривої

Нехай на відрізку $[a; b]$ плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$— неперервна разом із похідною функція. Тоді довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{2.12}$$

Приклад 2.9. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln x$ від точки з абцисою 1 до точки з абцисою $\sqrt{3}$.

$\Diamond$ Довжину дуги кривої будемо обчислювати за формулою (2.12), де $f(x) = \ln x$:

$$l = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} \text{заміна: } x = \operatorname{tg} z,\ dx = \frac{1}{\cos^2 z}\, dz; \\ x = 1,\ z = \frac{\pi}{4},\ x = \sqrt{3},\ z = \frac{\pi}{3} \end{array} \right] = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin z \cdot \cos^2 z} dz =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos z} + \ln \left| \operatorname{tg} \tfrac{z}{2} \right| \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln 3 - \ln \operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{8} \right| = 0,92\,. \ \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити довжину лінії, яка задана рівнянням:

$$127.\,y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,\ x \in [0; 1], \quad 128.\,y = e^x - 1,\ x \in \left[\ln\sqrt{8}; \ln\sqrt{15}\right],$$

$$129.\,y = \ln \sin x,\ x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right], \quad 130.\,y = \ln x,\ x \in [\sqrt{3}; \sqrt{15}],$$

$$131.\,y = 1 + \ln \cos x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \quad 132.\,y = \arcsin e^{-x},\ x \in [0; 1]\,,$$

$$133.\,y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x},\ x \in [3; 4]\,, \quad 134.\,y = \ln(x^2 - 1),\ x \in [3; 4]\,,$$

$$135.\,y = \frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{x^2},\ x \in [1; 2]\,, \quad 136.\,y = 3 - e^x,\ x \in \left[\ln\sqrt{15}; \ln\sqrt{24}\right],$$

2.4.3 Застосування визначеного інтегралу в економіці

1. Нехай V, D, P — функції відповідно витрат, доходу та прибутку, які залежать від кількості x виробленої продукції або часу t її виробництва, а V', D', P' — функції маргінальних витрат, доходу та прибутку відповідно.

Тоді зміни вказаних величин при зростанні виробництва продукції від a одиниць до b обчислюються за формулами відповідно:

$$\int_a^b V'(x)\,dx = V(b) - V(a),\ \int_a^b D'(x)\,dx = D(b) - D(a),$$

$$\int_a^b P'(x)\,dx = P(b) - P(a).$$

Приклад 2.10. Функція маргінальних витрат виробництва x одиниць продукції за певний час має вигляд $V'(x) = 10 - 0,01x$. Обчислити на скільки зростуть витрати виробництва (у гривнях) при збільшенні випуску продукції від 100 до 200 одиниць.

♢ Для обчислення використаємо формулу:

$$\int_a^b V'(x)\,dx = V(b) - V(a)\,.$$

Тоді

$$\int_{100}^{200} V'(x)\,dx = \int_{100}^{200} (10 - 0,01x)\,dx = \big(10x - 0,005x^2\big)\Big|_{100}^{200} = 850\,.$$

Отже, затрати зростуть на 850 грн. ♦

2. Якщо $V(t)$, $D(t)$, $P(t)$ вказані вище функції, які залежать від часу t, тоді $P(t) = D(t) - V(t)$ і загальний прибуток за час T обчислюється за формулою:

$$P(t) = \int_0^T P'(t)\,dt = \int_0^T (D'(t) - V'(t))\,dt\,.$$

Приклад 2.11. Швидкості зміни витрат і доходу агрофірми із початку її діяльності визначаються формулами $V'(t) = 5 + 4\sqrt[3]{t^2}$ і $D'(t) = 25 - \sqrt[3]{t^2}$, де $V(t)$, $D(t)$ вимірюються млн.грн., а t роками. Визначити як довго агрофірма була прибутковою та знайти загальний прибуток, який було одержано за цей час.

$\Diamond$ Із умови $D'(t) = V'(t)$ одержуємо оптимальний час t^* для прибутку агрофірми. Знайдемо t^*:

$$5 + 4\sqrt[3]{t^2} = 25 - \sqrt[3]{t^2}; \;\; t^* = 8.$$

Отже, агрофірма була прибутковою 8 років. Обчислюємо прибуток фірми за цей час:

$$\int\limits_0^8 (D'(t) - V'(t))\, dt = \int\limits_0^8 (25 - \sqrt[3]{t^2} - 5 - 4\sqrt[3]{t^2})\, dt =$$
$$= \int\limits_0^8 (20 - 5\sqrt[3]{t^2})\, dt = \left(20t - 3\sqrt[3]{t^5}\right)\Big|_0^8 = 160 - 96 = 64.$$

Отже, за 8 років агрофірма отримала прибуток в розмірі 64 млн.грн. $\blacklozenge$

3. Використовуючи теорему 2.3, можна обчислити середнє значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Приклад 2.12. Знайти середнє значення витрат $f(x) = x^2 + 2x + 4$, якщо обсяг продукції x змінюється від 10 до 20 одиниць.

$\Diamond$ Середнє значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ обчислюємо за формулою:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Тоді

$$\frac{1}{10}\int\limits_{10}^{20} \left(x^2 + 2x + 4\right)\, dx = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x\right)\Bigg|_{10}^{20} = 267,3\,.$$

Отже, середнє значення витрат дорівнює $267,3$.

4. **Коефіцієнт нерівномірності розподілу доходу.** Нехай функція $y = f(x)$ описує залежність частки сукупного доходу y, одержаної частиною x усього населення. Графік функції називають **кривою Лоренца** (Рис. 2.11). Якщо при $x = 0,1$ одержуємо $y = 0,4$, то це означає, що 10% населення володіють 40% загального доходу країни. При рівномірному (досконалому) розподілі доходів крива Лоренца вироджується в пряму — бісектрису OA.

Відношення L площі S_2 між бісектрисою OA та кривою Лоренца до площі S_1 трикутника OAC характеризує ступінь нерівномірності розподілу доходів

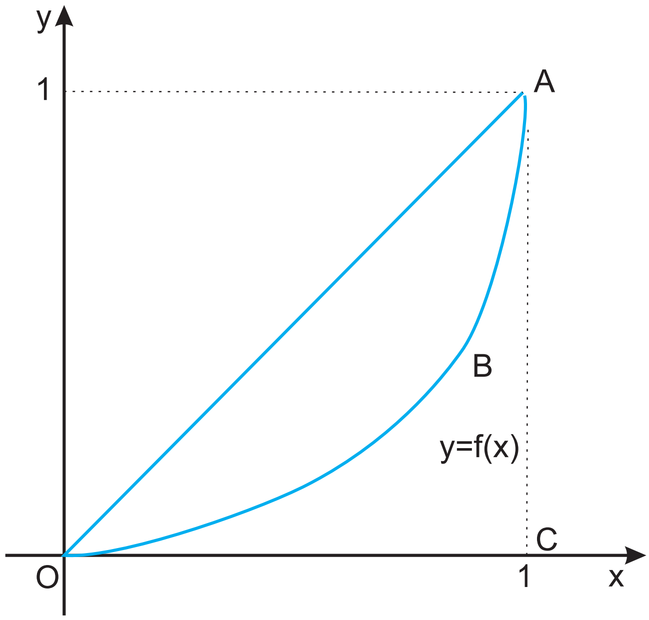

Рис. 2.11

населення. При цьому L називають **коефіцієнтом нерівномірності розподілу доходів, коефіцієнтом Лоренца** або коефіцієнтом Джіні і обчислюють за формулою:

$$L = \frac{S_2}{S_1} = 2\int_0^1 (x - f(x))\,dx. \tag{2.13}$$

Приклад 2.13. За даними дослідження розподілу доходів певної держави крива Лоренца описується рівнянням $y = 0,8x^2 + 0,2x$. Обчислити коефіцієнт Лоренца.

◊ Для знаходження коефіцієнта Лоренца використаємо формулу (2.13):

$$L = 2\int_0^1 (x - 0,8x^2 - 0,2x)\,dx = 2\int_0^1 (0,8x - 0,8x^2)\,dx =$$
$$= 1,6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 0,27.$$

Отже, коефіцієнт Лоренца рівний 0,27. ♦

Часто коефіцієнт Лоренца використовується для характеристики нерівномірного розподілу прибуткового податку. Для цього слід вважати, що функція y є частиною загального прибуткового податку і пропорційна частині x усього населення держави, тобто $y = kx$.

5. Якщо функція $f(t)$ задає прибуток фірми за час t, а $r\%$ — номінальна облікова щорічна ставка, то реальне значення загального прибутку P за час від $t=0$ до $t=T$ знаходимо за формулою:

$$P = \int\limits_0^T f(t) e^{-rt/100}\, dt. \tag{2.14}$$

Приклад 2.14. Компанія "SKP" за рахунок вкладень в нове обладнання в розмірі 10 млн.грн планує щорічно на протязі 5 років отримувати прибуток в 1 млн.грн. Номінальна облікова щорічна ставка становить 5%. Знайти реальний прибуток компанії.

◊ Для знаходження прибутку компанії використаємо формулу (2.14):

$$P = \int\limits_0^5 1 \cdot e^{-0{,}05t}\, dt - 10 = -20\, e^{-0{,}05t}\Big|_0^5 - 10 = 9,22 \text{ млн.грн.}$$

Отже, реальний прибуток становитиме 9,22 млн.грн. ♦

6. **Зміна капіталу.** Якщо $I(t)$ — швидкість зміни інвестицій, $A(t)$ — капітал підприємства, то $I(t) = A'(t)$. Знаючи швидкість зміни інвестицій, можна знайти зміни капіталу за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$ за формулою:

$$\Delta A = \int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)\, dt. \tag{2.15}$$

Приклад 2.15. Швидкість зміни інвестицій задається функцією

$$I(t) = \frac{4}{(t+1)^2}.$$

Знайти зміни капіталу.

◊ Для обчислення використаємо формулу (2.15):

$$\Delta A = \int\limits_1^4 \frac{4}{(t+1)^2}\, dt = -\frac{4}{t+1}\Bigg|_1^4 = -\frac{4}{5} + 2 = 1,2.$$

Отже, зміна капіталу $\Delta A = 1,2$. ♦

7. Нехай $f(t)$ — продуктивність праці у момент часу t, тоді обсяг виробленої за проміжок часу $[t_1; t_2]$ продукції обчислюється за формулою:

$$V = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt. \qquad (2.16)$$

Приклад 2.16. Знайти обсяг продукції, виготовленої за проміжок часу $t \in [0; 10]$, якщо продуктивність праці задається функцією $f(t) = \dfrac{2}{(t+1)} + 4$.

$\Diamond$ Згідно формули (2.15) маємо:

$$V = \int\limits_{0}^{10} \left(\frac{2}{t+1} + 4 \right) dt = \left(2\ln|t+1| + 4t\right)\Big|_0^{10} = 2\ln 11 + 40 = 44,8.$$

Отже, обсяг продукції становить $V = 44,8$. $\blacklozenge$

Завдання для самостійного виконання

Задані функції маргінальних витрат виробництва $V'(x)$ і маргінального доходу $D'(x)$ від реалізації x одиниць продукції. Знайти зростання загальних витрат виробництва та доходу при збільшенні випуску продукції від x_1 до x_2 одиниць, а також середні значення витрат і доходу:

137. $V'(x) = 50 - 0,04x,\ x_1 = 100,\ x_2 = 300;$

138. $V'(x) = 1000 - 0,02x,\ x_1 = 100,\ x_2 = 200;$

139. $D'(x) = 100 - 0,06x,\ x_1 = 100,\ x_2 = 400;$

140. $D'(x) = 1000 - 0,08x,\ x_1 = 100,\ x_2 = 600.$

Для заданого рівняння кривої Лоренца $y = f(x)$ знайти коефіцієнт L нерівномірності розподілу доходів громадян держави (коефіцієнт Лоренца):

141. $y = 0,75x^2 + 0,125x,$ 142. $y = 0,4x^2 + 0,6x,$

143. $y = 0,6x^2 + 0,5x,$ 144. $y = 0,5x^2 + 0,6x.$

Знайти загальний прибуток фірми $P(t)$ за час t, якщо відомі швидкості зміни з часом витрат $V'(t)$ і прибутку $D'(t)$:

145. $V'(t) = 5 + \sqrt[3]{t^2},\ D'(t) = 25 - \sqrt[3]{t^2},$

$$146.\ V'(t) = 7 + \sqrt[3]{t},\ D'(t) = 29 - \sqrt[3]{t},$$

$$147.\ V'(t) = 8 + 2\sqrt[3]{t},\ D'(t) = 32 - 2\sqrt[3]{t},$$

$$148.\ V'(t) = 9 + \sqrt[3]{t^2},\ D'(t) = 35 - \sqrt[3]{t^2}.$$

Знайти зміни капіталу ΔA за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$, якщо відома швидкість зміни інвестицій $I(t)$:

$$149.\ I(t) = 1 - e^{-t},\ t_1 = 0,\ t_2 = 10, \quad 150.\ I(t) = te^{-t},\ t_1 = 0,\ t_2 = 10,$$

$$151.\ I(t) = 2 - \frac{1}{t^2 + 1},\ t_1 = 0,\ t_2 = 8, \quad 152.\ I(t) = \frac{3}{t + 2},\ t_1 = 1,\ t_2 = 4.$$

Знайти обсяг продукції V, виробленої за проміжок часу T, якщо продуктивність праці задається функцією $f(t)$:

$$153.\ f(t) = 3t^2 - \frac{1}{8}\,e^t,\ T = 3 \quad 154.\ f(t) = 10 + \frac{t^2}{t^3 + 1},\ T = 4,$$

$$155.\ f(t) = 2 + \frac{1}{t^2 + 1},\ T = 10, \quad 156.\ f(t) = 4t + \frac{t}{t^2 + 1},\ T = 5.$$

Розділ 3

Невласні інтеграли

3.1 Поняття невласного інтегралу

При визначені інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ проміжок інтегрування $[a;b]$ вважається скінченим, а функція $f(x)$ — неперервною. Якщо проміжок інтегрування є нескінченим, напівскінченим або функція має на проміжку інтегрування точки розриву, то поняття визначеного інтегралу втрачає зміст. У цих випадках одержуємо **невласний інтеграл**.

Невласні інтеграли поділяють на два класи:

— невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду);

— невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).

3.2 Невласні інтеграли з нескіченими межами інтегрування

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і є інтегровною на відрізку $[a;b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує скінчена границя

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{3.1}$$

то її називають **невласним інтегралом першого роду** і позначають

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{3.2}$$

Таким чином

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx. \tag{3.3}$$

У цьому випадку невласний інтеграл (3.2) називається **збіжним**, а підінтегральна функція є інтегровною на проміжку $[a; +\infty)$.

Якщо ж границя (3.1) не існує або нескінчена, то невласний інтеграл (3.2) називається **розбіжним**, а підінтегральна функція є неінтегровною на проміжку $[a; +\infty)$.

Аналогічно інтегралу (3.3) визначається і невласний інтеграл на проміжку $(-\infty; b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx. \tag{3.4}$$

Невласний інтеграл з двома нескінченими межами інтегрування визначається рівністю:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\, dx, \tag{3.5}$$

де c — довільне дійсне число.

Інтеграл у лівій частині формули (3.5) існує і є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа.

Слід зауважити, що інтеграл, визначений формулою (3.5) не залежить від вибору c.

Приклад 3.1. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2+4}\, dx\,.$$

$\lozenge$

$$\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{2} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_a^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

Отже, невласний інтеграл є збіжний. $\blacklozenge$

Приклад 3.2. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx.$$

$\lozenge$

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \ln(\ln x)\Big|_e^b =$$
$$= \lim_{b\to+\infty}(\ln(\ln b) - \ln(\ln e)) = +\infty.$$

Отже, невласний інтеграл є розбіжний. $\blacklozenge$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

157. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^6}\,dx$; 158. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{16x^4+1}\,dx$; 159. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}\,dx$;

160. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$; 161. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}2x}{4x^2+1}\,dx$; 162. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{7}{\sqrt{x^2-4x}}\,dx$;

163. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$; 164. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2-2x+10}\,dx$; 165. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-3x}\,dx$;

166. $\displaystyle\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x-1)}\,dx$; 167. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x\,dx$; 168. $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}\,dx$.

3.3 Невласні інтеграли від необмежених функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; b)$. Точку $x = b$ назвемо особливою точкою функції $f(x)$, якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to b - 0$. Нехай функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a; b-\epsilon]$ при довільному $\epsilon > 0$, такому, що $b - \epsilon > a$. Тоді, якщо існує скінчена границя

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx, \tag{3.6}$$

то її називають **невласним інтегралом другого роду** і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{3.7}$$

Таким чином

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx. \tag{3.8}$$

У цьому випадку невласний інтеграл (3.7) існує і називається **збіжним**.

Якщо ж границя (3.6) не існує або нескінчена, то невласний інтеграл (3.7) називається **розбіжним**.

Якщо $x = a$ — особлива точка функції $f(x)$, то невласний інтеграл визначається аналогічним чином:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Якщо функція $f(x)$ необмежена в околі внутрішньої точки $c \in (a; b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ та $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ одержуємо:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx. \tag{3.9}$$

Якщо обидві границі в правій частині формули (3.9) існують і скінчені, то невласний інтеграл є збіжним, інакше — розбіжним.

Приклад 3.3. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_1^2 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int_1^2 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = -\lim_{\epsilon\to 0}\left.\frac{1}{\ln x}\right|_{1+\epsilon}^2 = \\ -\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(1+\epsilon)}\right) = +\infty.$$

Отже, невласний інтеграл є розбіжний. $\blacklozenge$

Приклад 3.4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx = -\lim_{\epsilon\to 0} e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-1}^{0-\epsilon} = -\lim_{\epsilon\to 0}\left(e^{\frac{1}{-\epsilon}} - e^{-1}\right) = \frac{1}{e}\,.$$

Отже, невласний інтеграл є збіжний. $\blacklozenge$

Приклад 3.5. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \\ = 3\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt[3]{x-1}\Big|_0^{1-\epsilon} + 3\lim_{\delta\to 0}\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\delta}^2 = \\ = 3\lim_{\epsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{-\epsilon} - (-1)\right) + 3\lim_{\delta\to 0}\left(1 - \sqrt[3]{\delta}\right) = 6.$$

Отже, невласний інтеграл є збіжний. $\blacklozenge$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

169. $\displaystyle\int\limits_0^{1/3} \frac{e^3+\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$; 170. $\displaystyle\int\limits_{1/2}^{1} \frac{1}{(1-x)\ln^2(1-x)}\,dx$; 171. $\displaystyle\int\limits_1^{3} \frac{1}{\sqrt{(x^2-6x+9)}}\,dx$;

172. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{2-4x}}\,dx$; 173. $\displaystyle\int\limits_1^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}\,dx$; 174. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x}{1-x^4}\,dx$;

175. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}\,dx$; 176. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$; 177. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}\,dx$;

178. $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{x^4}{\sqrt[3]{1-x^5}}\,dx$; 179. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt[9]{1-2x}}\,dx$; 180. $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt[3]{1-4x}}\,dx$.

Бібліоґрафія

[1] *Ахтямов А.М.* Математика для социологов и экономистов: Учеб. пособие. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 464 с.

[2] *Бугір М.К.* Математика для економістів: Посібник. — Київ: Видавничий центр "Академія" , 2003. — 520 с.

[3] *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. — Москва: «Наука», Главная редакция физико–математической литературы, 1980. — 432 с.

[4] *Васильченко І.П.* Вища математика для економістів: Підручник. — 2-ге вид.,випр. — Київ: Знання, 2004. — 454 с.

[5] Вища математика: Зб. задач: У 2–х ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. / Х.І.Гаврильченко та ін.; — 2–ге вид., стереотип. – Київ: Техніка, 2004. — 279 с.

[6] *Дубовик В.П.,Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посібник. — Київ: А.С.К., 2001. — 648 с.

[7] *Красс М.С.* Математика для экономических специальностей: Учебник. — Москва: ИНФРА–М, 1988. – 464 с. — (Серия «Высшее образование»)

[8] *Кудрявчев Л.Д.* Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и втузов. — Москва: Высшая школа, 1981, т. І. — 687 с.

[9] Математика для вступників до вузів. Навч. посбник / Упоряд.: Бондаренко М.Ф., Дікарєв В.А., Мельников О.Ф., Семенець В.В., Шкляров Л.Й. — Харків: "Компанія СМІТ" , 2002. — 1120 с.

[10] *Михайленко В.М., Федоренко Н.Д.* Математичний аналіз для економістів: Навчальний посібник.— Київ: Українсько–фінський інститут менеджменту і бізнесу, 1999. — 224 с.

[11] *Овчиников П.П. та ін.* Вища математика: Підручник. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення. — 3-тє вид. випр. — Київ: Техніка, 2003. — 600 с.

[12] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, Т. I. — 23–е изд. — Москва: «Наука», Главная редакция физико–математической литературы, 1974. — 480 с.

[13] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. — Москва: Наука, 1969. — 608 с.

[14] *Шипачев В.С.* Высшая математика: Учеб. для немат.спец. вузов / Под ред. акад. А.Н.Тихонова. — 2–е изд., стер. — Москва: Высшая школа, 1990. — 479 с.

Предметний покажчик

Зміст

Навчально-методичне видання

Математичний аналіз:

Інтегральне числення.

Віддруковане у редакційно-видавничому відділі МДУ
89600 м. Мукачево
вул. Ужгородська, 26
тел. 2-11-09
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 4916 від 16.06.2015 р.