

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/242954836>

Evaluation of the remainder term for the Thiele interpolation continued fraction

Article in *Ukrainian Mathematical Journal* · November 2008

DOI: 10.1007/s11253-009-0171-7

CITATIONS

3

READS

69

1 author:



[Mykhaylo Pahiry](#)

Mukachevo State University

25 PUBLICATIONS 24 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Approximation of functions continued fractions [View project](#)



Generalization of classical continued fractions and function approximation. [View project](#)

ОЦІНКА ЗАЛИШКОВОГО ЧЛЕНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ ТІЛЕ

An estimate of a remainder term of the Thiele interpolational continued fraction is obtained.

Получена оценка остаточного члена для интерполяционной цепной дроби Тиле.

Вступ. Задача інтерполяції функцій однієї дійсної змінної на проміжку $[\alpha, \beta]$ добре досліджена у випадку лінійної інтерполяції, тобто коли інтерполяційна функція вибирається у вигляді узагальненого многочлена [1, 2] $g(x; f; c_0, c_1, \dots, c_n) = c_0\varphi_0(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$, де $\{\varphi_i(x)\}$ — система функцій Чебишова. У випадку нелінійної інтерполяції функцію $g(x; f; c_0, c_1, \dots, c_n)$ часто вибирають у вигляді апроксимації Паде [3] або ланцюгових дробів [4]. Вперше інтерполяційний ланцюговий дріб був розглянутий в 1909 році Т. Н. Тіле [5]. Формула залишкового члена для такого дробу була встановлена Ш. Є. Мікеладзе [6]. Узагальнення результату Мікеладзе для інтерполяційного ланцюгового дробу, коли частинні чисельники і знаменники многочлени, було отримано в роботі [7]. В даній роботі обґрунтовуються нові оцінки залишкового члена для інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле (теорема 2 та теорема 3).

Інтерполяція функцій ланцюговим дробом. Формула залишкового члена. Нехай функція $f(x) \in C^{(n+1)}([\alpha, \beta])$ і задана своїми значеннями в точках множини $\Lambda = \{x_i: x_i \in [\alpha, \beta], i = 0, 1, \dots, n, x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}$. Нехай $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Наближення функції шукаємо у вигляді функціонального ланцюгового дробу

$$b_0(x) + \frac{a_1(x)}{b_1(x) + \frac{a_2(x)}{b_2(x) + \dots + \frac{a_n(x)}{b_n(x)}}} = b_0(x) + \prod_{k=1}^n \frac{a_k(x)}{b_k(x)},$$

де $a_n(x), b_n(x) \in C[\alpha, \beta]$, $a_k(x) \neq 0$. Скінченному функціональному ланцюговому дробу поставимо у відповідність відношення двох узагальнених многочленів

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0(x) + \prod_{k=1}^n \frac{a_k(x)}{b_k(x)}. \quad (1)$$

Із класу функціональних ланцюгових дробів (1) виділимо підклас інтерполяційних ланцюгових дробів (ІЛД), тобто таких, що задовольняють співвідношення

$$\frac{P_n(x_i)}{Q_n(x_i)} = b_0(x_i) + \prod_{k=1}^n \frac{a_k(x_i)}{b_k(x_i)} = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

Якщо функція $f(x) \in C^{(n+1)}([\alpha, \beta])$, канонічні чисельник $P_n(x)$ та знаменник $Q_n(x)$ ланцюгового дробу (1) є многочленами, $\deg P_n(x) \leq n$, то залишковий член інтерполяційного ланцюгового дробу задається формулою [7]

$$r_n(x) = f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\prod_{k=0}^n (x - x_k)}{(n+1)! Q_n(x)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x) Q_n(x)] \Big|_{x=\xi}, \quad (3)$$

де $\xi \in (\alpha, \beta)$. Проведемо подальші дослідження цієї формули.

Канонічний знаменник $Q_n(x)$ ланцюгового дробу (1) визначається через еле-

менти цього дробу $a_i(x), b_i(x)$ за допомогою формули Ойлера – Міндінга [8, 9]

$$Q_n(x) = B_1^{[n]}(x) \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x) + \sum_{i=1}^{n-3} X_i(x) \sum_{j=i+2}^{n-1} X_j(x) + \sum_{i=1}^{n-5} X_i(x) \sum_{i_2=i+2}^{n-3} X_{i_2}(x) \times \right. \\ \left. \times \sum_{i_3=i_2+2}^{n-1} X_{i_3}(x) + \dots + \sum_{i_1=1}^{n+1-2l} X_{i_1}(x) \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2l} X_{i_2}(x) \dots \sum_{i_l=i_{l-1}+2}^{n-1} X_{i_l}(x) \right), \quad (4)$$

де $l = [n/2]$, $[\cdot]$ — ціла частина числа, $X_i(x) = \frac{a_{i+1}(x)}{b_i(x)b_{i+1}(x)}$, $B_1^{[n]}(x) = \prod_{i=1}^n b_i(x)$.

Можна показати, що кількість доданків в одинарній сумі формули (4) дорівнює $n-1$, в подвійній сумі — $(n-3)(n-2)/2!$, в потрійній сумі — $(n-5)(n-4)(n-3)/3!$, ..., в k -й сумі — $\prod_{i=1}^k \frac{n-2k+i}{k!}$.

Канонічний знаменник $Q_n(x)$ може бути поданий у вигляді [9]

$$Q_n(x) = B_1^{[n]}(x) \sum_{k=0}^l R_{k,1}^{[n]}(x), \quad (5)$$

де

$$R_{k,s}^{[n]}(x) = \sum_{i_1=s}^{n+1-2k} X_{i_1}(x) \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} X_{i_2}(x) \dots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} X_{i_k}(x), \quad k = 0, 1, \dots, l, \quad (6)$$

$$R_{0,l}^{[n]}(x) = 1.$$

В свою чергу, $R_{k,s}^{[n]}(x)$ задовольняє рекурентне співвідношення

$$R_{k,s}^{[n]}(x) = \sum_{i=s}^{n+1-2k} X_i(x) R_{k-1,i+2}^{[n]}(x). \quad (7)$$

Згідно із формулою Лейбніца похідної m -го порядку добутку двох функцій, з (5) маємо, що

$$(Q_n(x))^{(m)} = \sum_{j=0}^m C_m^j (B_1^{[n]}(x))^{(m-j)} \sum_{k=0}^l (R_{k,1}^{[n]}(x))^{(j)},$$

а тоді

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x)Q_n(x)] = f^{(n+1)}(x)Q_n(x) + \sum_{m=1}^{n+1} C_{n+1}^m f^{(n+1-m)}(x) \times \\ \times \sum_{j=0}^m C_m^j (B_1^{[n]}(x))^{(m-j)} \sum_{k=0}^l (R_{k,1}^{[n]}(x))^{(j)}. \quad (8)$$

Крім того, із (7) випливає наступна рекурентна формула:

$$(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{j=1}^{n+1-2k} \sum_{i=0}^m C_m^i X_j^{(i)}(x) (R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m-i)}. \quad (9)$$

Оцінка залишкового члена для ІЛД Тіле. Розглянемо ІЛД Тіле [5, 7, 10]

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0 + \prod_{k=1}^n \frac{x - x_{k-1}}{b_k}. \quad (10)$$

Коефіцієнти $b_k, k = 0, 1, \dots, n$, ІЛД (10) визначаються з умови (2) наступним чином: або обчислюється послідовність обернених поділених різниць $\Phi_k[x_0, x_1, \dots, x_k], k = 0, 1, \dots, n$, за формулою [4, 11]

$$\Phi_k[x_0, \dots, x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]}, \quad \Phi_k[x] = f(x),$$

а тоді $b_k = \Phi_k[x_0, \dots, x_k], k = 0, 1, \dots, n$; або за допомогою рекурентного співвідношення [9, 12]

$$b_0 = y_0, \quad b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1} + \dots + \frac{x_k - x_1}{-b_1 + \frac{x_k - x_0}{y_k - b_0}}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 1 ([4]). ІЛД Тіле (10) є дробово-раціональною функцією. Степені многочленів канонічного чисельника $P_n(x)$ та канонічного знаменника $Q_n(x)$ задовольняють нерівності $\deg P_n(x) \leq [(n+1)/2], \deg Q_n(x) \leq [n/2]$.

Теорема 2. Нехай функція $f(x) \in C^{(n+1)}([\alpha, \beta])$. За значеннями функції $f(x)$ в точках множини Λ побудований ІЛД Тіле (10). Тоді для залишкового члена ІЛД Тіле має місце нерівність

$$\left| f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{\prod_{k=0}^n |x - x_k|}{(n+1)! |Q_n(x)|} f^*(b^*)^n \left(\frac{(1 + \sqrt{1+4\rho})^{n+1} - (1 - \sqrt{1+4\rho})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{1+4\rho}} + \sum_{m=1}^l C_{n+1}^m \frac{1}{b_*^{2m}} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \right), \quad (11)$$

де

$$d = \beta - \alpha, \quad b_* = \min_{1 \leq i \leq n} |b_i|, \quad \rho = \frac{d}{b_*^2},$$

$$b^* = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|, \quad f^* = \max_{0 \leq i \leq l} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f^{(n+1-i)}(x)|.$$

Доведення. У випадку ІЛД Тіле $X_j(x) = (x - x_j)/(b_j b_{j+1})$. Оскільки $Y_j = X'_j(x) = 1/(b_j b_{j+1})$ для $j = 1, 2, \dots, n-1$, і $X_j^{(k)}(x) \equiv 0$, коли $k = 2, 3, \dots, n-1$, то формула (9) набуває вигляду

$$(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{j=1}^{n+1-2k} \left(X_j(x) (R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m)} + m Y_j (R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m-1)} \right). \quad (12)$$

З (6) у випадку ІЛД Тіле маємо, що

$$(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)} = 0 \quad \text{при } k < m. \quad (13)$$

Крім того, згідно із теоремою 1 у цьому випадку $\deg Q_n(x) \leq l$ і $B_1^{[n]}$ не залежить від x , тому формула (8) перепишеться так:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x) Q_n(x)] = f^{(n+1)}(x) Q_n(x) + B_1^{[n]} \sum_{m=1}^l C_{n+1}^m f^{(n+1-m)}(x) \sum_{k=0}^l (R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)}. \quad (14)$$

Знайдемо похідні $(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)}$ при $k = m, m+1, \dots, l$. Коли $k = m$, з (12) з урахуванням (13) отримуємо, що

$$(R_{m,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{i=1}^{n+1-2m} mY_i(R_{m-1,i+2}^{[n]}(x))^{(m-1)} = \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} mY_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} (m-1)Y_{i_2} \times \\ \times (R_{m-2,i_2+2}^{[n]}(x))^{(m-2)} = \dots = m! \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} Y_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} Y_{i_2} \dots \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1} Y_{i_m}.$$

Позначимо через

$${}^{[0]}M_{m,t}^{[n]} = \sum_{j_1=1}^{n+1-2m} Y_{j_1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+3-2m} Y_{j_2} \dots \sum_{j_m=j_{m-1}+2}^{n-1} Y_{j_m}, \quad m = 1, 2, \dots, l, \quad (15)$$

$${}^{[0]}M_{0,t}^{[n]} = R_{0,t}^{[n]} = 1.$$

Легко бачити, що має місце співвідношення ${}^{[0]}M_{m,t}^{[n]} = \sum_{j=t}^{n+1-2m} Y_j {}^{[0]}M_{m-1,j+2}^{[n]}$, а тоді $(R_{m,1}^{[n]}(x))^{(m)} = m! {}^{[0]}M_{m,1}^{[n]}$. При $k = m + 1$ з (12) маємо

$$(R_{m+1,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{i=1}^{n-1-2m} (X_i(x)(R_{m,i+2}^{[n]}(x))^{(m)} + mY_i(R_{m,i+2}^{[n]}(x))^{(m-1)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n-1-2m} (X_i(x)m! {}^{[0]}M_{m,i+2}^{[n]} + mY_i(R_{m,i+2}^{[n]}(x))^{(m-1)}) = \dots \\ \dots = \sum_{i_1=1}^{n-1-2m} \left(X_{i_1}(x)m! {}^{[0]}M_{m,i_1+2}^{[n]} + mY_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+1-2m} \left(X_{i_2}(x)(m-1)! {}^{[0]}M_{m-1,i_2+2}^{[n]} + \right. \right. \\ \left. \left. + (m-1)Y_{i_2} \sum_{i_3=i_2+2}^{n+3-2m} \left(X_{i_3}(x)(m-2)! {}^{[0]}M_{m-2,i_3+2}^{[n]} + (m-2)!Y_{i_3} \sum_{i_4=i_3+2}^{n+5-2m} \left(\dots + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2Y_{i_{m-1}} \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-3} (X_{i_m}(x) {}^{[0]}M_{1,i_m+2}^{[n]} + Y_{i_m} R_{1,i_m+2}^{[n]}(x)) \dots \right) \right) \right). \quad (16)$$

Позначимо через

$${}^{[1]}M_{m+1,t}^{[n]} = \sum_{j_1=t}^{n-1-2m} \left(X_{j_1}(x) {}^{[0]}M_{m,j_1+2}^{[n]} + Y_{j_1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+1-2m} \left(X_{j_2}(x) {}^{[0]}M_{m-1,j_2+2}^{[n]} + \right. \right. \\ \left. \left. + Y_{j_2} \sum_{j_3=j_2+2}^{n+3-2m} \left(\dots + Y_{j_{m-1}} \sum_{j_m=j_{m-1}+2}^{n-3} (X_{j_m}(x) {}^{[0]}M_{1,j_m+2}^{[n]} + Y_{j_m} R_{1,j_m+2}^{[n]}(x)) \dots \right) \right) \right).$$

Легко бачити, що

$${}^{[1]}M_{m+1,t}^{[n]}(x) = \sum_{j=t}^{n-1-2m} (X_j {}^{[0]}M_{m,j+2}^{[n]} + Y_j {}^{[0]}M_{m,j+2}^{[n]}(x)), \quad {}^{[1]}M_{1,t}^{[n]}(x) = R_{1,t}^{[n]}(x), \quad (17)$$

а тоді $(R_{m+1,1}^{[n]}(x))^{(m)} = m! {}^{[1]}M_{m+1,1}^{[n]}(x)$.

Скориставшись методом повної математичної індукції, з формули (12) можна показати, що

$$(R_{m+s,1}^{[n]}(x))^{(m)} = m! {}^{[s]}M_{m+s,1}^{[n]}(x), \quad s = 1, 2, \dots, l-m,$$

де

$${}^{[s]}M_{m+s,t}^{[n]}(x) = \sum_{j=t}^{n+1-2(m+s)} (X_j {}^{[s-1]}M_{m+s-1,j+2}^{[n]}(x) + Y_j {}^{[s]}M_{m+s-1,j+2}^{[n]}(x)), \quad (18)$$

$${}^{[s]}M_{s,t}^{[n]}(x) = R_{s,t}^{[n]}(x).$$

Формула (14) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x)Q_n(x)] &= f^{(n+1)}(x)Q_n(x) + \\ &+ B_1^{[n]} \sum_{m=1}^l C_{n+1}^m f^{(n+1-m)}(x)m! \sum_{k=m}^l {}^{[k-m]}M_{k,1}^{[n]}(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Тоді

$$\left| \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x)Q_n(x)] \right| \leq f^* \left(|Q_n(x)| + (b^*)^n \sum_{m=1}^l C_{n+1}^m m! \sum_{k=m}^l {}^{[k-m]}M_{k,1}^{[n]}(x) \right). \quad (20)$$

Згідно з теоремою 1 [10]

$$|Q_n(x)| \leq (b^*)^n \frac{(1 + \sqrt{1 + 4\rho})^{n+1} - (1 - \sqrt{1 + 4\rho})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{1 + 4\rho}}. \quad (21)$$

Знайдемо оцінки $|{}^{[k-m]}M_{k,1}^{[n]}(x)|$ при $k = m, m + 1, \dots, l$. При $k = m$ з (15) маємо

$$|{}^{[0]}M_{m,i+2}^{[n]}(x)| \leq \frac{1}{m!b_*^{2m}} \prod_{j=1}^m (n - 1 - i - 2m + j).$$

При $k = m + 1$ із формули (17) отримуємо

$$|{}^{[1]}M_{m+1,i+2}^{[n]}(x)| \leq \sum_{j=i+2}^{n-1-2m} \left(|X_j(x)| |{}^{[0]}M_{m,j+2}^{[n]}(x)| + |Y_j| |{}^{[1]}M_{m,j+2}^{[n]}(x)| \right). \quad (22)$$

Коли $m = 0$, то з (22) маємо

$$|{}^{[1]}M_{1,i+2}^{[n]}(x)| = |R_{1,i+2}^{[n]}(x)| \leq \frac{d}{b_*^2} (n - i - 2).$$

При $m = 1$ з (22) випливає, що

$$\begin{aligned} |{}^{[1]}M_{2,i+2}^{[n]}(x)| &\leq \sum_{j=i+2}^{n-3} \left(|X_j| |{}^{[0]}M_{1,j+2}^{[n]}(x)| + |Y_j| |{}^{[1]}M_{1,j+2}^{[n]}(x)| \right) \leq \\ &\leq \frac{2d}{b_*^4} \sum_{j=i+2}^{n-3} (n - j - 2) = \frac{d}{b_*^4} (n - i - 4)(n - i - 3). \end{aligned}$$

За допомогою методу повної математичної індукції доведемо, що

$$|{}^{[1]}M_{k,i+2}^{[n]}(x)| \leq \frac{1}{(k-1)!b_*^{2k}} \prod_{j=1}^m (n - i - 2k + j - 1), \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (23)$$

У випадку $k = 1, 2$ формула (23) виконується. Зробимо припущення, що вона має місце при $k = t$. Тоді при $k = t + 1$ з (22) отримуємо

$$\begin{aligned} |{}^{[1]}M_{t+1,i+2}^{[n]}(x)| &\leq \sum_{j=i+2}^{n-1-2t} \left(|X_j| |{}^{[0]}M_{t,j+2}^{[n]}(x)| + |Y_j| |{}^{[1]}M_{t,j+2}^{[n]}(x)| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=i+2}^{n-1-2t} \left(\frac{d}{b_*^2} \frac{1}{t!b_*^{2t}} \prod_{l=1}^t (n - j - 2t + l - 1) + \frac{1}{b_*^2} \frac{d}{(t-1)!b_*^{2t}} \prod_{l=1}^t (n - j - 2t + l - 1) \right) = \\ &= \frac{d}{t!b_*^{2(t+1)}} \prod_{j=1}^{t+1} (n - i - 2(t+1) + j - 1), \end{aligned}$$

тобто формула (23) має місце і в цьому випадку.

За допомогою методу повної математичної індукції доведемо, що

$$\left| {}^{[s]}M_{m+s,i+2}^{[n]}(x) \right| \leq \frac{d^s}{m!s!b_*^{2(m+s)}} \prod_{l=1}^{m+s} (n-i-2(m+s)+l-1), \quad s = 0, 1, \dots, l-m. \quad (24)$$

Коли $s = 0, 1$, то формула (24) виконується. Зробимо припущення, що дана формула виконується при $s = k$. Тоді при $s = k + 1$ з (18) отримуємо, що

$$\left| {}^{[k+1]}M_{m+k+1,i+2}^{[n]}(x) \right| \leq \sum_{j=i+2}^{n-1-2(m+k)} \left(\left| X_j \right| \left| {}^{[k]}M_{m+k,j+2}^{[n]}(x) \right| + \left| Y_j \right| \left| {}^{[k+1]}M_{m+k,j+2}^{[n]}(x) \right| \right). \quad (25)$$

Коли $m = 0$, то з (18) отримуємо

$$\left| {}^{[k+1]}M_{k+1,i+2}^{[n]}(x) \right| \leq \left| R_{k+1,i+2}^{[n]}(x) \right| \leq \frac{d^{k+1}}{(k+1)!b_*^{2(k+1)}} \prod_{j=1}^{k+1} (n-i-2(k+1)+j-1).$$

При $m = 1$ з (25) маємо, що

$$\begin{aligned} \left| {}^{[k+1]}M_{k+2,i+2}^{[n]}(x) \right| &\leq \sum_{j=i+2}^{n-3-2k} \left(\left| X_j \right| \left| {}^{[k]}M_{k+1,i+2}^{[n]}(x) \right| + \left| Y_j \right| \left| {}^{[k+1]}M_{k+1,i+2}^{[n]}(x) \right| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=i+2}^{n-3-2k} \left(\frac{d}{b_*^2} \frac{d^k}{k!b_*^{2(k+1)}} \prod_{l=1}^{k+1} (n-j-2(k+1)+l-1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_*^2} \frac{d^{k+1}}{(k+1)!b_*^{2(k+1)}} \prod_{l=1}^{k+1} (n-i-2(k+1)+l-1) \right) = \\ &= \frac{d^{k+1}}{(k+1)!b_*^{2(k+2)}} \prod_{j=1}^{k+2} (n-i-2(k+2)+j-1). \end{aligned}$$

Коли $m = 2$, то

$$\begin{aligned} \left| {}^{[k+1]}M_{k+3,i+2}^{[n]}(x) \right| &\leq \sum_{j=i+2}^{n-5-2k} \left(\left| X_j \right| \left| {}^{[k]}M_{k+2,i+2}^{[n]}(x) \right| + \left| Y_j \right| \left| {}^{[k+1]}M_{k+2,i+2}^{[n]}(x) \right| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=i+2}^{n-5-2k} \left(\frac{d}{b_*^2} \frac{d^k}{k!2!b_*^{2(k+2)}} \prod_{l=1}^{k+2} (n-j-2(k+2)+l-1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_*^2} \frac{d^{k+1}}{(k+1)!b_*^{2(k+1)}} \prod_{l=1}^{k+2} (n-i-2(k+2)+l-1) \right) = \\ &= \frac{d^{k+1}}{(k+1)!2!b_*^{2(k+3)}} \prod_{j=1}^{k+3} (n-i-2(k+3)+j-1). \end{aligned}$$

Зробимо припущення, що (24) виконується при $m = t$. Тоді при $m = t + 1$ з (25) маємо

$$\begin{aligned} \left| {}^{[k+1]}M_{k+t+2,i+2}^{[n]}(x) \right| &\leq \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)} \left(\left| X_j \right| \left| {}^{[k]}M_{k+t+1,j+2}^{[n]}(x) \right| + \left| Y_j \right| \left| {}^{[k+1]}M_{k+t+1,j+2}^{[n]}(x) \right| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)} \left(\frac{d}{b_*^2} \frac{d^k}{k!(t+1)!b_*^{2(k+t+1)}} \prod_{l=1}^{k+t+1} (n-j-2(k+t+1)+l-1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_*^2} \frac{d^{k+1}}{(k+1)!t!b_*^{2(k+t+1)}} \prod_{l=1}^{k+t+1} (n-i-2(k+t+1)+l-1) \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{d^{k+1}}{(k+1)!(t+1)!b_*^{2(k+t+2)}} \prod_{j=1}^{k+t+2} (n-i-2(k+t+2)+j-1).$$

Формула (24) вірна і в цьому випадку, отже вона вірна при довільних s та m . Із (24) випливає, що

$$\left| [s]M_{m+s,1}^{[n]}(x) \right| \leq \frac{d^s}{m!s!b_*^{2(m+s)}} \prod_{l=1}^{m+s} (n-2(m+s)+l). \quad (26)$$

З (3), (20), (21) та (26) отримуємо (11).

Теорема 3. Якщо функція $f(x) \in C^{(n+1)}([\alpha, \beta])$, за значеннями функції в точках множини Λ побудований ІЛД Тіле (10), частинні чисельники та знаменники якого задовольняють умову Слешинського – Прінгсгейма, тобто $0 < |x - x_{i-1}| \leq d$, $|b_i| \geq d + 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, $d \neq 1$, то має місце оцінка

$$\left| f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{d^{n+1}(d^{n+1} - 1)}{(n+1)!(d-1)} f^*(b^*)^n \left(\frac{(1 + \sqrt{1+4\rho})^{n+1} - (1 - \sqrt{1+4\rho})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{1+4\rho}} + \sum_{m=1}^l C_{n+1}^m \frac{1}{b_*^{2m}} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n-2(m+i)+j) \right), \quad (27)$$

де d , ρ , b_* , b^* , f^* визначені в умові теореми 2.

Доведення. Згідно з теоремою 2 із [10], при виконанні вказаних умов виконується нерівність

$$|Q_n(x)| \geq \frac{d^{n+1} - 1}{d - 1}.$$

Тоді, із умов даної теореми та теореми 2 отримуємо нерівність (27).

1. Гаєрилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень: У 2 ч. – Київ: Вища шк., 1995. – Ч. 1. – 367 с.
2. Привалов А.А. Теория интерполирования функций: В 2-х кн. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – 423 с.
3. Бейкер, мл. Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
4. Скоробагатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
5. Thiele T. N. Interpolationsrechnung. – Leipzig: Commission von V. G. Teubner, 1909. – XII + 175 S.
6. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 527 с.
7. Пагіря М. М. Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 4. – С. 57 – 64.
8. Perron O. Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. – Stuttgart: Teubner, 1954. – 194 S.
9. Пагіря М. М. Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. – Вип. I. – С. 72 – 79.
10. Пагіря М. М. Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10 – 11. – С. 77 – 87.
11. Hildebrand F. V. Introduction to numerical analysis. 2nd ed. – New York: Dover Publications, Inc, 1987. – 669 p.
12. Пагіря М. М. Інтерполяція функцій ланцюговим дробом Тіле // Збірник наук. праць з обчислювальної математики. – Ужгород, 1997. – С. 21 – 26.

Одержано 18.05.07



МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26

тел./факс +380-3131-21109

Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua

E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua

Веб-сайт Інституційного репозитарію Наукової бібліотеки МДУ: <http://dspace.msu.edu.ua:8080>

Веб-сайт Наукової бібліотеки МДУ: <http://msu.edu.ua/library/>