

УДК 620.178.4

## ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЇ ЛАГРАНЖА ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ МАСИ ШТИФТОВОГО З'ЄДНАННЯ

М.І. ІГНАТИШИН, Й.З. БЕНКЕ  
Мукачівський технологічний інститут

*Побудовано математичну модель, функцію Лагранжа, штифтового з'єднання труби та стержня з метою дослідження на мінімум ваги навантаженої частини конструкції. В системі MATHCAD отримано програму мінімізації ваги навантаженої частини стержня, труби та штифта і розраховано оптимальні розміри елементів конструкції при умовах забезпечення міцності.*

Питання мінімізації актуальні в багатьох галузях діяльності людини і об'єктивно обумовлені обмеженістю ресурсів як глобальному, так і локальному масштабах. Обмежені зокрема матеріальні [1,2] та фінансові ресурси [3,4,5]. Обмеженням підлягають і інші показники, що характеризують діяльність, наприклад, обмеження ризику.

Математичні методи дають можливість дослідити математичну модель, що описує досліджуваний об'єкт і мінімізувати задані параметри при заданих обмеженнях.

Одним з таких методів є дослідження на екстремум функції Лагранжа.

Із всього різноманіття проблем мінімізації виділимо проблему мінімізації ваги конструкції. Ця проблема актуальна в широкому діапазоні, починаючи від космічних апаратів та літаків до гірськоколивних та дитячих велосипедів. Проблема актуальна як в машинобудуванні, будівництві, так і в інших галузях промисловості. Можна зробити довгий перелік конструкцій, котрі підлягають мінімізації в вазі як через особливості їх експлуатації так і через необхідність економії матеріальних ресурсів.

Головний продукт компанії MSC.Software - MSC.Nastran – це краща на ринку скінчено-елементна програмна система також включає в себе унікальну функцію оптимізації конструкції з необмеженими змінами її геометричної форми при мінімізації ваги і дотриманню граничних умов міцності.

Навіть конструкція з невеликою кількістю елементів може бути зменшена в вазі запропонованим методом. Ще більшого зменшення ваги можна отримати, математично оптимізуючи конструкцію з багатьма конструктивними елементами.

Метою даної роботи є математично змодельовати штифтове з'єднання та мінімізувати масу навантаженої частини цього з'єднання.

Розглянемо конструкцію, що складається з трьох елементів і часто застосовується в різних машинах і механізмах.

*Об'єктом дослідження* є з'єднання стержня і труби за допомогою штифта.

*Предметом дослідження* є математична модель згаданої конструкції, а саме функція Лагранжа, що включає функцію об'єму та функції обмеження міцності на зріз, змин, розтяг і т.п. з відповідними множниками Лагранжа.

При побудові математичної моделі було зроблено окреме припущення, а саме, що всі деталі зроблені з матеріалу однакової густини. Це дає можливість мінімізувати конструкцію по об'єму.

В якості відправної задачі була розглянута задача, описана в [7] і розв'язана "класичним методом" опору матеріалів, алгоритм якого наступний:

- визначення діаметра штифта,  $d_{um}$ , з умови міцності на зріз, -

$$\tau = \frac{4F}{nk\pi d_{um}^2} \leq [\tau_{zp}] \quad (1)$$

- визначення діаметра стержня,  $d$ , з умови міцності на розтяг по ослабленому штифтом перерізу, -

$$\sigma = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} - d_{um}d} \leq [\sigma] \quad (2)$$

- визначення зовнішнього діаметра труби,  $D$ , з умови міцності на розтяг по ослабленому двома отворами для штифта перерізу, -

$$\sigma = \frac{F}{\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} - d_{um}(D-d)} \leq [\sigma] \quad (3)$$

- перевірка достатності розміру  $D$  за умовою міцності на зминання, -

$$\sigma = \frac{F}{nd_{um}(D-d)} \leq [\sigma_{zm}] \quad (4)$$

- визначення розміру,  $c$ , - відстані від штифта до краю труби за умовою міцності на зріз, -

$$\tau = \frac{F}{2c(D-d)} \leq [\tau_{zp}] \quad (5)$$

- визначення розміру,  $e$ , - відстані від штифта до краю стержня за умовою міцності на зріз, -

$$\tau = \frac{F}{2ed} \leq [\tau_{zp}] \quad (6)$$

В формулах (1)-(6) прийнято такі позначення:

- $\tau$  - дотичне напруження,
- $F$  - розтягуючи сила,
- $[\tau_{зр}]$  - допустиме напруження на зріз,
- $n$  - кількість штифтів,
- $k$  - кількість площин зрізу,
- $\pi$  - число Пі,
- $d_{шт}$  - діаметр штифта,
- $\sigma$  - нормальне напруження,
- $d$  - діаметр стержня,
- $[\sigma]$  - допустиме напруження на розтяг,
- $D$  - діаметр труби,
- $[\sigma_{зм}]$  - допустиме напруження на зминання,
- $c$  - відстані від штифта до краю труби за умовою міцності на зріз,
- $e$  - відстані від штифта до краю стержня за умовою міцності на зріз,

Розміри з'єднання стержня і труби вказані на рис.1.

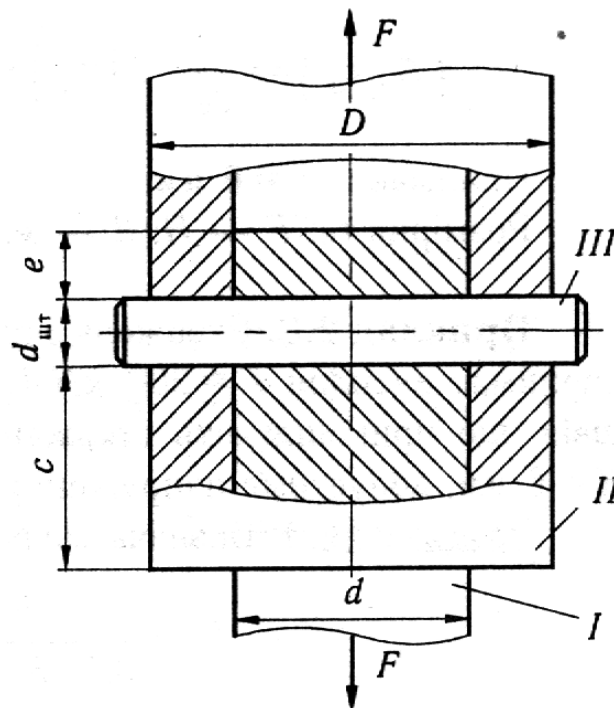


Рис.1. З'єднання стержня і труби за допомогою штифта (I - стержень, II – труба, III – штифт).

При вихідних даних:  $F = 30 \text{ кН}$ ,  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ ,  $[\tau_{зр}] = 80 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma_{зм}] = 240 \text{ МПа}$ ,

$n = 1$ ,  $k = 2$ , - отримано “класичним методом” опору матеріалів наступні результати:

- $d_{ум} = 16 \text{ мм}$  - діаметр штифта,
- $d = 31 \text{ мм}$  - діаметр стержня,
- $D = 39 \text{ мм}$  - діаметр труби,
- $c = 24 \text{ мм}$  - відстані від штифта до краю труби,
- $e = 6 \text{ мм}$  - відстані від штифта до краю стержня.

При таких розмірах конструкції об’єм її навантаженої частини складає  $V = 54950 \text{ мм}^3$ .

Застосуємо метод функції Лагранжа [8].

Об’єм навантаженої частини:

$$V(d, D, d_{ум}, c, e) = \left[ \frac{\pi d^2}{4} (c + d_{ум} + e) - \frac{\pi d_{ум}^2}{4} d \right] + \left[ \frac{\pi}{D} (D^2 - d^2) (c + d_{ум} + e) - \frac{\pi d_{ум}^2}{4} (D - d) \right] + \frac{\pi d_{ум}^2}{4} D \quad (7)$$

Запишемо умови міцності у виді, зручному для побудови функції Лагранжа.

Умова міцності штифта на зріз:

$$\Phi_1 = [\tau_{зр}] n k \pi d_{ум}^2 - 4F \geq 0. \quad (8)$$

Умова міцності стержня на розтяг по ослабленому штифтом перерізу:

$$\Phi_2 = [\sigma] \left( \frac{\pi d^2}{4} - d_{ум} d \right) - F \geq 0. \quad (9)$$

Умова міцності труби на розтяг по ослабленому двома отворами для штифта перерізу:

$$\Phi_3 = [\sigma] \left( \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} - d_{ум} (D - d) \right) - F \geq 0. \quad (10)$$

Умова міцності труби на зминання:

$$\Phi_4 = [\sigma_{зм}] n d_{ум} (D - d) - F \geq 0. \quad (11)$$

Умова міцності труби на зріз:

$$\Phi_5 = [\tau_{zp}] 2c(D-d) - F \geq 0. \quad (12)$$

Умовою міцності стержня на зріз:

$$\Phi_6 = [\tau_{zp}] 2ed - F \geq 0. \quad (13)$$

Функція Лагранжа, що є математичною моделлю з'єднання труби і стержня за допомогою штифта, і є предметом нашого дослідження на екстремум, а саме, на мінімум:

$$L(d, D, d_{um}, c, e) = V + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \cdot \Phi_i, \quad (14)$$

де  $\lambda_i$  - множники Лагранжа.

Співвідношення (7)-(14) є математична модель з'єднання стержня і труби за допомогою штифта, в якій застосовано функцію Лагранжа. Методи дослідження функції Лагранжа на екстремум описані в літературі [8]. Зауважимо, що знаходження екстремуму в даній задачі приводить до системи нелінійних рівнянь.

Для подальшого дослідження застосуємо систему MATHCAD [9] для вирішення даної мінімізаційної задачі.

Нижче наведена програма MATHCAD, що вирішує питання мінімізації ваги досліджуваної конструкції.

**1) Вихідні дані для розрахунку:**  $F = 30 \cdot 10^3 \text{ Н}$ ,  $\sigma_{tr} = 120 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ,  $\sigma_{zm} = 80 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ,

$\sigma_{zm} = 240 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ,  $k = 2$

$V_0 = 5.495 \cdot 10^5$  -об'єм навантаженої конструкції при розрахунку "класичним методом" опору матеріалів.

**2) Цільова функція:**

$$V(d, D, d_{shp}, c, e) = \frac{d^2}{4} c d_{shp} e + \frac{d_{shp}^2}{4} d + \frac{D^2 d^2}{4} c d_{shp} e + \frac{d_{shp}^2}{4} (D-d) + \frac{d_{shp}^2}{4} D$$

**3) Початкові значення отримані "класичним методом" опору матеріалів:**

$d = 31 \cdot 10^3 \text{ м}$ ,  $D = 39 \cdot 10^3 \text{ м}$ ,  $d_{shp} = 16 \cdot 10^3 \text{ м}$ ,  $c = 24 \cdot 10^3 \text{ м}$ ,  $e = 6 \cdot 10^3 \text{ м}$

Given

$d \geq 0$ ,  $D \geq 0$ ,  $d_{shp} \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $e \geq 0$

**4) Обмеження:**

$$\sigma_{tr} k d_{shp}^2 + 4 F \leq 0, \quad \frac{d^2}{4} d_{shp} d + F \leq 0, \quad \frac{D^2}{4} + \frac{d^2}{4} d_{shp} (D-d) + F \leq 0,$$

$\sigma_{zm} (D-d) d_{shp} + F \leq 0$ ,  $\sigma_{tr} (D-d) + 2 c + F \leq 0$ ,  $\sigma_{tr} + 2 e + d + F \leq 0$ ,  $D \geq d$

R Minimize  $V(d, D, d_{shp}, c, e)$

d  
 D  
 $d_{shp} = R, V_1 = V R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 \cdot$   
 c  
 e

**5) Результат розрахунків:**  $d = 0.03$  м,  $D = 0.04$  м,  $d_{shp} = 0.015$  м,  $c = 0.02$  м,  
 $e = 6.207 \cdot 10^{-3}$  м,  $V_1 = 5.126 \cdot 10^{-5}$  куб.м.,  $\frac{V_0 - V_1}{V_0} = 100 - 6.706$

**6) Перевірка на міцність:**  $\frac{(4 F)}{k R_3^2} = 8 \cdot 10^7 = z_r \cdot 8 \cdot 10^7,$

$$\frac{F}{\frac{R_1^2}{4} R_3 R_1} = 1.2 \cdot 10^8 = 1.2 \cdot 10^8,$$

$$\frac{F}{\frac{R_2^2}{4} \frac{R_1^2}{4} R_3 R_2 R_1} = 8.028 \cdot 10^7 < 1.2 \cdot 10^8,$$

$$\frac{F}{R_2 R_1 R_3} = 2.049 \cdot 10^8 < z_m = 2.4 \cdot 10^8, \quad \frac{F}{R_2 R_1^2 R_4} = 8 \cdot 10^7 = z_r \cdot 8 \cdot 10^7,$$

$$\frac{F}{2 R_5 R_1} = 8 \cdot 10^7 = z_r \cdot 8 \cdot 10^7.$$

Зведемо результати розрахунків отриманих “класичним методом” опору матеріалів та запропонованим методом з застосуванням функції Лагранжа в таблицю для порівняння.

**Таблиця 1**  
 Результати розрахунків отриманих “класичним методом” опору матеріалів та запропонованим методом з застосуванням функції Лагранжа

Розмір	Результати отримані “класичним методом” опору матеріалів	Результати отримані методом функції Лагранжа	Примітка
<i>d</i>	31мм	30мм	Зменшився
<i>D</i>	39мм	40мм	Зріс
<i>d<sub>шт</sub></i>	16мм	15мм	Зменшився
<i>c</i>	24мм	20мм	Зменшився
<i>e</i>	6мм	6,21мм	Зріс
<i>V</i>	54950 м <sup>3</sup>	51260 м <sup>3</sup>	Зменшився на 6,7%