Міністерство освіти і науки України
Мукачівський державний університет
Кафедра інженерії, технологій та професійної освіти

Серія **«Основи вищої математики»**

Математичний аналіз
Інтегральне числення

Навчально-методичний посібник

2–е видання, виправлене і доповнене

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Мукачево – 2025

ББК 22.11я73
УДК 51(075.8)

Математичний аналіз: Інтегральне числення. Навчально-методичний посібник/ Укладач: Питьовка О.Ю. – Мукачево, МДУ, 2025. – 78 с. — (Серія "Основи вищої математики")

Обговорено і схвалено на засіданні
кафедри інженерії, технологій та професійної освіти
протокол №6 від 28 січня 2025 р.

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою
Мукачівського державного університету
протокол №7 від 24 березня 2025 р.

Укладач:
О.Ю.Питьовка, кандидат фізико–математичних наук, доцент, Мукачівський державний університет

Рецензент: І.В.Лінтур, кандидат економічних наук, доцент,
Мукачівський державний університет

Навчально-методичний посібнику присвячений розділам математичного аналізу: невизначений інтеграл, визначений інтеграл та його застосування, невласний інтеграл.
У кожному розділі містяться теоретичні відомості, приклади розв'язання завдань, а також запропоновані завдання для самостійного виконання, розв'язання яких дозволить здобувачам краще засвоїти вивчений матеріал.
Навчальний посібнику написаний відповідно до окремих змістових модулів навчальної програми дисципліни «Вища математика» і є рекомендований для здобувачів першого рівня вищої освіти.

Вступ

Навчально-методичний посібник присвячений вибраним розділам навчальної дисципліни "Вища математика", яка вивчається здобувачами першого рівня вищої освіти. Зокрема в посібнику розглянуті розділи: "Невизначений інтеграл", "Визначений інтеграл та його застосування", "Невласні інтеграли".

Кожен розділ складається з окремих підрозділів, які містять повний виклад теоретичного матеріалу, який має бути засвоєний здобувачами, зразки розв'язування задач, завдання для самостійного виконання. Опрацювання матеріалу, викладеного у посібнику, надасть змогу здобувачам підготуватися до написання модульних контрольних робіт та до підсумкового контролю.

В кінці посібника наведено покажчик всіх термінів, який, на думку автора, краще зорієнтує студентів у викладеному матеріалі.

Як вже відмічалося, в посібнику наведенні розв'язки задач. Для того, щоб помітити початок та закінчення розв'язання прикладу будемо використовувати відповідно значки $\Diamond$, $\blacklozenge$.

Розділ 1

Невизначений інтеграл

1.1 Поняття первісної функції та невизначеного інтегралу

У цьому розділі розглянемо задачу, що за своєю природою є оберненою до задачі диференціювання функції. Якщо в диференціальному численні ставилася задача про знаходження похідної функції, то в інтегральному численні будемо розглядати задачу про відшукання функції, похідна якої відома, задана.

Приклад 1.1. Нехай відомо, що

$$f'(x) = 4 \tag{1.1}$$

Потрібно знайти функцію $f(x)$, для якої буде виконуватися умова (1.1).

Такою функцією буде

$$f(x) = 4x, \tag{1.2}$$

оскільки $(4x)' = 4$. Але також є очевидним, що і функції $f(x) = 4x+4$, $f(x) = 4x - 3$ також задовольняють умову (1.1), оскільки функції відрізняються на сталу, похідна з якої рівна нулю. Більше того, будь-яка функція вигляду

$$f(x) = 4x + C,\ C = const \tag{1.3}$$

задовольняє умову (1.1).

Означення 1.1. Функція $F(x)$ називається *первісною функції* $f(x)$ на деякому проміжку X, якщо $F(x)$ неперервна на цьому проміжку, диференційована в кожній внутрішній точці проміжку і

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема 1.1. *Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку X, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на X має вигляд $F(x) + C$.*

Таким чином у прикладі 1.1 первісна функція має вигляд (1.3), тобто

$$F(x) = 4x + C, \tag{1.4}$$

де C — довільна стала.

Означення 1.2. Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом функції $f(x)$* і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ C = const \tag{1.5}$$

Символ $\int$ називають *знаком інтегралу*, $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*, x — *змінною інтегрування*.

Якщо функція $f(x)$ має первісну, то справедливими є наступні **властивості невизначеного інтегралу**:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
3. $\int F'(x)dx = F(x) + C$;
4. $\int dF(x) = F(x) + C$;
5. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx, A = const$;
6. $\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right) dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;
7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(a \cdot x + b)dx = \dfrac{1}{a} F(a \cdot x + b) + C$, де $a, b = const$, $a \neq 0$.

Наведемо **таблицю невизначених інтегралів** для елементарних функцій:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$, у тому числі
   - $\int dx = x + C$;
   - $\int \sqrt{x}\, dx = \dfrac{2}{3} x \sqrt{x} + C$;

- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$;

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$;
3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, у тому числі $\int e^x dx = e^x + C$;
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$;
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$;
8. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$, у тому числі $\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;
9. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$, у тому числі $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;
10. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;
11. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$;
12. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right| + C$;
13. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right| + C$;

14. $\int \frac{x}{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 \pm a^2\right| + C;$

15. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$

16. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$

17. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C;$

18. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$

1.2 Методи обчислення невизначених інтегралів

1.2.1 Безпосереднє інтегрування невизначеного інтегралу

Метод безпосереднього інтегрування ґрунтується на загальних властивостях невизначеного інтегралу та таблиці невизначених інтегралів. Частинним випадком є метод розкладання підінтегральної функції на суму.

Приклад 1.2. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}\,.$$

$\Diamond$ Використаємо табличний інтеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-16}\right| + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.3. Знайти інтеграл

$$\int (2-x^3)^2 dx\,.$$

$$\Diamond \int (2-x^3)^2 dx = \int (4-4x^3+x^6)dx = \int 4dx - \int 4x^3 dx + \int x^6 dx =$$

$$= 4\int dx - 4\int x^3 dx + \int x^6 dx = 4x - 4\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C = 4x - x^4 + \frac{x^7}{7} + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.4. Знайти інтеграл

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}-4\sqrt{x}-3x^2+5x-7\right)dx.$$

$$\Diamond\ \int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}-4\sqrt{x}-3x^2+5x-7\right)\,dx=\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx-4\int\sqrt{x}\,dx-$$

$$-3\int x^2\,dx+5\int x\,dx-7\int dx=\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}-4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-7x+C=$$

$$=-3x^{-\frac{1}{3}}-\frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3}-x^3+\frac{5x^2}{2}-7x+C=\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{8x\sqrt{x}}{3}-x^3+\frac{5x^2}{2}-7x+C.\ \blacklozenge$$

Приклад 1.5. Знайти інтеграл

$$\int\frac{2\sqrt{x}-5x^2}{3x\sqrt{x}}dx.$$

$$\Diamond\ \int\frac{2\sqrt{x}-5x^2}{3x\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{2x^{\frac{1}{2}}-5x^2}{3x^{\frac{3}{2}}}\,dx=\frac{2}{3}\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx-\frac{5}{3}\int\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{1}{x}\,dx-\frac{5}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}\ln|x|-\frac{5x^{\frac{3}{2}}}{3\,\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\ln|x|-\frac{10}{9}x\,\sqrt{x}+C\,.\ \blacklozenge$$

Приклад 1.6. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\operatorname{tg}^2 x dx$$

та зробити перевірку.

$$\Diamond\ \int\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\tfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\tfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\left(\tfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\operatorname{tg}x-x+C\,.$$

Зробимо перевірку:

$$(\operatorname{tg}x-x+C)'=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2 x\,.\ \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти невизначені інтеграли:

$$1. \int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx, \quad 2. \int \sin(5x-2)\, dx, 3. \int (8x^3 - 6\cos x + e^x)\, dx,$$

$$4. \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{x^2}\right) dx, \quad 5. \int \frac{\sqrt{x}+x^3-x^2}{x^3}\, dx, 6. \int \frac{(x^2-1)(x^2+2)}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx,$$

$$7. \int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\, dx, \quad 8. \int \frac{1}{x^2+7}\, dx, \quad 9. \int \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{4-x^2}}\, dx,$$

$$10. \int \operatorname{ctg}^2 x\, dx, \quad 11. \int (\sin^2 \frac{x}{2} + 2\cos x) dx, \quad 12. \int \frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x}\, dx,$$

$$13. \int \frac{\sin^2 x + 2\sin x - 3}{\sin^2 x}\, dx, \quad 14. \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\, dx, \quad 15. \int \sin\left(\frac{3x}{2}+2\right)\, dx.$$

1.2.2 Заміна змінної у невизначеному інтегралі

Метод **заміни змінної** або **підстановки** ґрунтується на введенні під знак інтеграла нової змінної, після підстановки якої одержуємо інтеграл, який обчислюється методом безпосереднього інтегрування.

Розглянемо підстановки двох видів:

1) Нехай інтеграл $\int f(x)dx$ не обчислюється шляхом безпосереднього інтегрування. Введемо до розгляду функцію $x = \varphi(t)$, тоді $dx = \varphi'(t)dt$, де $\varphi(t), \varphi'(t)$ — неперервні на деякому проміжку функції. Тоді справедливою буде формула:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,. \tag{1.6}$$

2) Введемо нову змінну $t = \phi(x)$, тоді формула заміни змінної буде мати вигляд:

$$\int f[\phi(x)] \cdot \phi'(x)dx = \int f(t)dt \tag{1.7}$$

Приклад 1.7. Знайти інтеграл

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

$\Diamond$ Для знаходження даного інтегралу використаємо заміну згідно формули (1.6)

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \left[\begin{array}{c} x = t^3, \\ dx = 3t^2dt \end{array}\right] = \int \frac{\sin t \cdot 3t^2dt}{t^2} =$$

$$= 3\int \sin t dt = -3\cos t + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.8. Знайти інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}\,dx.$$

$\Diamond$ Для знаходження даного інтегралу використаємо заміну змінної згідно формули (1.7)

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t, \\ \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = dt \end{array}\right] = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3}t\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x\sqrt{\operatorname{arctg} x} + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.9. Знайти інтеграл

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\,dx.$$

$\Diamond$ Використаємо формулу (1.7):

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\,dx = \left[\begin{array}{c} x^8 = t, \\ 8x^7dx = dt, \\ x^7dx = \frac{1}{8}dt \end{array}\right] = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{8}\arcsin t + C = \frac{1}{8}\,\arcsin x^8 + C. \blacklozenge$$

Частинним випадком методу заміни змінної є *метод підведення під знак диференціала*, який ґрунтується на інваріантності формули інтегрування. Інтегрування проводиться за формулою:

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]\cdot d(\varphi(x)) = F[\varphi(x)] + C\,. \qquad (1.8)$$

Згідно даного методу у підінтегральному виразі виділяють множник і підводять його під знак диференціала, керуючись тим, щоб у функції, яка залишилася під знаком інтеграла і у диференціала був однаковий новий аргумент.

Приклад 1.10. Знайти інтеграл

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

$\diamondsuit$ Використаємо метод підведення функції під знак диференціала, а саме функцію $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ запишемо під знак диференціала:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})\right] = 2\int e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}} + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.11. Знайти інтеграл

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$$

$$\diamondsuit \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left[\frac{dx}{x} = d(\ln x)\right] = \int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C. \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти невизначені інтеграли:

$$16. \int x\sqrt{5x^2+2}\,dx, \quad 17. \int \frac{x^3dx}{\sqrt{3+x^4}}, \quad 18. \int e^x \sin(e^x)\,dx,$$

$$19. \int \cos\ln x \frac{dx}{x}, \quad 20. \int \frac{x}{x^4+4}\,dx, \quad 21. \int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx,$$

$$22. \int \frac{e^{\arcsin x}+x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad 23. \int \frac{2x-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad 24. \int \frac{\sin x}{(\cos x-1)^3}\,dx,$$

$$25. \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx, \quad 26. \int \frac{\sin x}{25+\cos^2 x}\,dx, \quad 27. \int \frac{dx}{\arccos 2x \cdot \sqrt{1-4x^2}},$$

$$28. \int \frac{x}{3x^2+8}\,dx, \quad 29. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} 6x}}{1+36x^2}\,dx, \quad 30. \int \frac{dx}{(2x+5)\ln^2(2x+5)}.$$

1.2.3 Метод інтегрування частинами

Нехай на деякому проміжку X задані неперервні та диференційовані у всіх внутрішніх точках цього проміжку функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$.

Добре відомо, що

$$d(uv) = udv + vdu\,.$$

Проведемо інтегрування рівності

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu\,.$$

Оскільки $\int d(uv) = uv$, то

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

звідки

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{1.9}$$

Формула (1.9) називається **формулою інтегрування частинами**.

За допомогою даної формули обчислення інтегралу $\int u \cdot dv$ зводиться до обчислення $\int v \cdot du$. Для цього за відомою функцією u знаходимо du, а із dv визначаємо v.

Більша частина інтегралів, які можуть бути обчислені методом інтегрування частинами, можна розбити на такі три групи:

1)

$$\int P_n(x)\left\{\begin{array}{c} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{array}\right\}dx = \left[\begin{array}{c} \mathbf{u} = P_n(x),\ \mathbf{du} = (P_n(x))'dx = P_{n-1}(x)dx, \\ \mathbf{dv} = \left\{\begin{array}{c} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{array}\right\}dx,\ \mathbf{v} = \dfrac{1}{k}\left\{\begin{array}{c} e^{kx} \\ -\cos kx \\ \sin kx \end{array}\right\} \end{array}\right]$$

де $P_n(x)$ — многочлен степеня n, k — дійсне число ($k \neq 0$).

2)

$$\int \left\{\begin{array}{c} \ln x \\ \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{array}\right\} P_n(x)dx = \left[\begin{array}{c} \mathbf{u} = \left\{\begin{array}{c} \ln x \\ \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{array}\right\},\ \mathbf{du} = \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right\}dx, \\ \mathbf{dv} = P_n(x)dx,\ \mathbf{v} = \int P_n(x)dx = P_{n+1}(x) \end{array}\right]$$

3) Інтеграли виду:

$$\int e^{\alpha x} \left\{ \begin{array}{c} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{array} \right\} dx, \quad \int \cos(\ln x) dx, \quad \int \sin(\ln x) dx.$$

Позначаючи невідомий інтеграл через I і проводячи двократне інтегрування частинами, складаємо для I рівняння першого степеня і знаходимо значення інтегралу I.

Надзвичайно важливим є правильний вибір u та dv. Якщо цей вибір провести невдало, то, застосовуючи формулу (1.9), можна отримати ще більш складний інтеграл.

Інтеграли

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx, \quad \int \frac{x}{\sin^2 x} dx, \quad \int \sqrt{1-x^2}\, dx, \quad \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

не належать до жодної із вказаних груп, але обчислюються за допомогою формули (1.9). Тому, можна говорити, що наведена вище класифікація є умовною.

Приклад 1.12. Обчислити інтеграл методом інтегрування частинами

$$\int x^2 \cdot e^x dx.$$

◊

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x\, dx; \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - 2 \int x \cdot e^x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx; \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) =$$

$$= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - e^x \right) + C = e^x \left(x^2 - 2x + 2 \right) + C \,. \blacklozenge$$

Приклад 1.13. Обчислити інтеграл

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx \,.$$

◊ Для обчислення заданого інтегралу використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx; \\ dv = x\, dx, & v = \dfrac{1}{2}\, x^2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}\, x^2 \operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\,x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\,x^2\operatorname{arctg}x-$$

$$-\frac{1}{2}\int 1-\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\,x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}x+C\,.\ \blacklozenge$$

Приклад 1.14. Обчислити інтеграл

$$\int e^{2x}\cos 3xdx$$

$\Diamond$ Для обчислення заданого інтегралу використаємо формулу (1.9)

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\left[\begin{array}{ll} u=e^{2x}, & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\cos 3xdx, & v=\frac{1}{3}\,\sin 3x \end{array}\right]=\frac{1}{3}\,e^{2x}\sin 3x-$$

$$-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\left[\begin{array}{ll} u=e^{2x}, & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\sin 3xdx, & v=-\frac{1}{3}\,\cos 3x \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\,e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\,e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\,e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}\,e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx\,.$$

Застосувавши формулу інтегрування частинами два рази, одержали рівність

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\,e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}\,e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx,$$

з якої визначаємо шуканий інтеграл

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{9}\,e^{2x}\,(3\sin 3x+2\cos 3x)\,,$$

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{13}\,e^{2x}\,(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.\ \blacklozenge$$

Приклад 1.15. Обчислити інтеграл

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx\,.$$

$\Diamond$ Для обчислення заданого інтегралу два рази використаємо формулу (1.9)

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=\sqrt{x^2+4}, & du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx; \\ dv=dx, & v=x \end{array}\right] = x\sqrt{x^2+4} -$$

$$-\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = x\sqrt{x^2+4} - \int \frac{(x^2+4)-4}{\sqrt{x^2+4}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+4} - \int \left(\sqrt{x^2+4} - \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\right) dx = x\sqrt{x^2+4} -$$

$$-\int \sqrt{x^2+4}\,dx + 4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| .$$

В результаті проведеного інтегрування одержано рівність

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4} - \int \sqrt{x^2+4}\,dx + 4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|$$

із якої визначаємо $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$

$$2\int \sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4} + 4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|,$$

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+4} + 4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|\right) + C. \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання.

Знайти невизначені інтеграли:

$$31. \int (3x+2)\cos x\,dx,\ \ 32. \int x\sin 7x\,dx,\ \ 33. \int \ln x\,dx,\ \ 34. \int x^2\cos 4x\,dx,$$

$$35. \int e^x \sin 3x\,dx, \quad 36. \int e^{-x}(2+3x)dx, \quad 37. \int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\,dx,$$

$$38. \int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx, \quad 39. \int \ln(x^2+1)dx, \quad 40. \int \sin\ln x\,dx, \quad 41. \int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx,$$

$$42. \int x\cdot e^{4x+3}\,dx, \quad 43. \int x\,\ln(3x+1)\,dx, \quad 44. \int (x^2+1)\,e^{4x}\,dx.$$

1.2.4 Інтегрування раціональних функцій

Раціональним дробом або **раціональною функцією** називається відношення двох алгебраїчних многочленів

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де

$$P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m, \quad b_0 \neq 0,$$
$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Раціональний дріб $R(x)$ називається **правильним**, якщо степінь чисельника m менше степені знаменника n: $m < n$, якщо $m \geqslant n$, то дріб називається **неправильним**.

Питання інтегрування раціональних функцій вирішується шляхом розкладання підінтегральної функції на суму більш простих дробів.

Поділити многочлен $P_m(x)$ на $Q_n(x)$ при $m \geqslant n$, означає знайти многочлен (частку)

$$S_{m-n}(x) = c_0x^{m-n} + c_1x^{m-n-1} + ... + c_{m-n}, \quad c_0 \neq 0$$

і многочлен (залишок) $r_k(x)$ степеня k, $k < n$, для яких виконується рівність:

$$P_m(x) = Q_n(x) \cdot S_{m-n}(x) + r_k(x).$$

Многочлени $S_{m-n}(x)$ та $r_k(x)$ визначаються однозначно, наприклад, за допомогою методу ділення кутом (алгоритму ділення Евкліда).

Приклад 1.16. Поділити многочлен $P_3 = 8x^3 + 16x^2 - 2x + 4$ на многочлен $Q_2(x) = 4x^2 - 2x + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
8x^3 + 16x^2 - 2x + 4 & 4x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{8x^3 - 4x^2 + 2x} \phantom{{}+4} & 2x + 5 \\
- \; 20x^2 - 4x + 4 & \\
\underline{20x^2 - 10x + 5} & \\
6x - 1 &
\end{array}$$

$S_1 = 2x + 5$, $r_1(x) = 6x - 1$.

Отже, отримано розклад многочлена:

$$8x^3 + 16x^2 - 2x + 4 = (4x^2 - 2x + 1)(2x + 5) + (6x - 1).$$

Таким чином, будь-який неправильний раціональний дріб за допомогою ділення методу "кутом" може бути представлений у вигляді суми алгебраїчного многочлена $S_{m-n}(x)$ і правильного раціонального дробу:

$$R(x) = S_{m-n}(x) + \frac{r_k(x)}{Q_n(x)}, \quad 0 \leqslant k < n \leqslant m. \tag{1.10}$$

Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму елементарних раціональних дробів (простих дробів). Виділяють чотири типи простих дробів:

$$\mathbf{I}\ )\ \ \frac{A}{x-a}; \ \ \mathbf{II}\ )\ \ \frac{A}{(x-a)^k}; \ k\text{–ціле число}, k > 1$$

$$\mathbf{III}\ )\ \ \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \ \ \mathbf{IV}\ )\ \ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}, \ s\text{–ціле число}, s > 1, p^2-4q < 0.$$

Такий розклад є єдиним, але методи за допомогою яких можна його провести є різноманітними. Найбільш широко використовується *метод невизначених коефіцієнтів.*

Розглянемо алгоритм методу невизначених коефіцієнтів:

1) якщо задано неправильний раціональний дріб, то потрібно виділити з нього цілу частину, тобто записати дріб у вигляді (1.10);

2) знаменник дробу $Q_n(x)$ розкласти на множники многочленів першого та другого степенів

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_l)^{k_l} \dots (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \dots (x^2+p_tx+q_t)^{s_t}$$

де квадратні тричлени $x^2+p_jx+q_j, j = 1, 2, \dots, t$ такі, що $p_j^2 - 4q_j < 0$, тобто тричлен має комплексно спряжені корені;

3) правильний раціональний дріб розкласти на прості дроби

$$\begin{gathered}\frac{r_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{x-a_1} + \dots + \\ + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1-1}} + \dots + \frac{B_{s_1}^{(1)}x + C_{s_1}^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots,\end{gathered} \tag{1.11}$$

4) знайти невизначені коефіцієнти

$$A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_{k_1}^{(1)}, B_1^{(1)}, C_1^{(1)}, B_2^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, B_{s_1}^{(1)}, C_{s_1}^{(1)}, \dots .$$

Для цього:
– праву частину рівності (1.11) приводимо до спільного знаменника;
– прирівнюємо чисельники лівої та правої частини одержаної рівності;
– прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x в лівій та правій частинах одержаної тотожності;
– отриману систему лінійних рівнянь розв'язуємо відносно невідомих коефіцієнтів.

Крім методу невизначених коефіцієнтів широко використовується *метод викреслювання* (*метод частинних значень*). Він є ефективним у застосуванні до раціональних дробів, знаменник яких $Q_n(x)$ має лише однократні дійсні корені. Нехай

$$Q_n(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) ... \cdot (x - a_n) \,.$$

Тоді

$$\frac{r_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + ... + \frac{A_n}{x - a_n}.$$

Звідси

$$r_k(x) = A_1(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n) + A_2(x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_n) +$$

$$+ \dots + A_n(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1}).$$

Після підстановки в останню рівність значення $x = a_j$ всі доданки правої частини, крім j-го, перетворюються на нуль:

$$\begin{array}{c|l}
x = a_1 & r_k(a_1) = A_1(a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_n) \;\Rightarrow\; A_1 = \dfrac{r_k(a_1)}{(a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_n)}, \\
\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x = a_n & r_k(a_n) = A_n(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}) \Rightarrow A_n = \dfrac{r_k(a_n)}{(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}.
\end{array}$$

Приклад 1.17. Розкласти раціональний дріб на прості дроби

$$\frac{x^3 + 3x + 2}{(x + 2)x^3}.$$

$\Diamond$ Оскільки знаменник раціонального дробу має дійсні корені, а один із коренів має кратність 3, то дріб можна розкладати на прості дроби I та II типів:

$$\frac{x^3 + 3x + 2}{(x + 2)x^3} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x} =$$

$$= \frac{Ax^3 + B(x+2) + Cx(x+2) + Dx^2(x+2)}{(x+2)x^3};$$

$$Ax^3 + Bx + 2B + Cx^2 + 2Cx + Dx^3 + 2Dx^2 = x^3 + 3x + 2;$$

$$(A+D)x^3 + (C+2D)x^2 + (B+2C)x + 2B = x^3 + 3x + 2\,.$$

Складаємо систему і визначаємо коефіцієнти:

$$\begin{array}{c|} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \quad \begin{cases} A + D = 1; \\ C + 2D = 0; \\ B + 2C = 3; \\ 2B = 2; \end{cases} \begin{cases} A = 3/2; \\ D = -1/2; \\ C = 1; \\ B = 1. \end{cases}$$

Таким чином

$$\frac{x^3 + 3x + 2}{(x+2)x^3} = \frac{3/2}{x+2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1/2}{x}\,. \blacklozenge$$

Приклад 1.18. Розкласти раціональний дріб на прості дроби

$$\frac{3x+5}{x^3 + x^2 + 4x + 4}.$$

$\lozenge$ Спочатку розкладаємо знаменник на множники:

$$x^3 + x^2 + 4x + 4 = x^2(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^2+4)\,.$$

Як бачимо, знаменник має дійсний корінь та комплексні корені, тому заданий раціональний дріб розкладаємо на прості дроби I та III типів:

$$\frac{3x+5}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{3x+5}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+4}$$

$$\begin{array}{c|} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \quad \begin{cases} A + B = 0; \\ B + C = 3; \\ 4A + C = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} A + B = 0; \\ -A + C = 3; \\ 4A + C = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} A + B = 0; \\ -A + C = 3; \\ 5A = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} B = -2/5; \\ C = 17/5; \\ A = 2/5. \end{cases}$$

Тоді

$$\frac{3x+5}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{2/5}{x+1} + \frac{-\,2/5x + 17/5}{x^2+4}\,. \blacklozenge$$

Приклад 1.19. Розкласти раціональний дріб на прості дроби

$$\frac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 - 4x}\,.$$

$\Diamond$ Попередні розглядувані дроби були правильними. У цьому прикладі маємо неправильний раціональний дріб. Тому спочатку поділимо чисельник на знаменник і цим саме виділимо цілу частину

$$\begin{array}{r|l} x^4+\ x^3-\ 1 & x^3-4x \\ \cline{2-2} x^4-4x^2 \qquad & x+1 \\ \cline{1-1} x^3+4x^2-\ 1 & \\ -\ x^3-\ 4x \qquad & \\ \hline 4x^2+4x-1 & \end{array}$$

Таким чином
$$\frac{x^4+x^3-1}{x^3-4x}=x+1+\frac{4x^2+4x-1}{x^3-4x}.$$

Розглянемо одержаний правильний дріб $\dfrac{4x^2+4x-1}{x^3-4x}$ і його знаменник запишемо у вигляді $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$.

Так як корені знаменника дійсні і різні, то правильний раціональний дріб розкладаємо на прості дроби I типу.

$$\frac{4x^2+4x-1}{x^3-4x}=\frac{4x^2+4x-1}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}$$

Знаходимо коефіцієнти:

$$\begin{array}{c|} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} A+B+C=4; \\ -2B+2C=4; \\ -4A=-1; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} B=7/8; \\ C=23/8; \\ A=1/4. \end{array}\right.$$

Тоді
$$\frac{x^4+x^3-1}{x^3-4x}=x+1+\frac{1/4}{x}+\frac{7/8}{x+2}+\frac{23/8}{x-2}. \blacklozenge$$

Розглянемо інтегрування простих дробів.

I) Інтеграл від простого дробу I–го типу є табличним

$$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C;$$

II) Інтеграл від простого дробу II–го типу також є табличним

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C;$$

III) Потрібно знайти значення інтеграла від простого дробу III–го типу

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx.$$

Спочатку у чисельнику дробу $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ виділяємо похідну знаменника, тобто чисельник записуємо у вигляді: $Ax+B=(2x+p)\cdot\dfrac{A}{2}-\dfrac{Ap}{2}+B$. У знаменнику виділяємо повний квадрат і робимо заміну:

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4},\quad t=x+\frac{p}{2},\quad a=q-\frac{p^2}{4}.$$

Тоді

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}\int\frac{2t}{t^2+a^2}\,dt+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{t^2+a^2}\,dt=$$

$$=\frac{A}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2B-Ap}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$$

IV) У випадку інтегрування простого дробу IV–го типу маємо

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^s}.$$

Виконавши перетворення, аналогічні попередньому випадку, одержуємо інтеграл:

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^s}=\frac{A}{2}\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^s}\,dt+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{(t^2+a^2)^s}\,dt=$$

$$=\frac{A}{2(s-1)}(t^2+a^2)^{1-s}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)K_s(t)$$

де $K_s(t)$ обчислюється за рекурентною формулою:

$$K_s(t)=\frac{t}{2a^2(s-1)(t^2+a^2)^{s-1}}+\frac{2s-3}{2a^2(s-1)}\cdot K_{s-1},\ s\geqslant 2,$$

$$K_1(t)=\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}.$$

Приклад 1.20. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3}{x-2}\,dx.$$

$\Diamond$ Підінтегральна функція є простим дробом I типу. Тоді проводимо інтегрування згідно зазначеної вище формули

$$\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\ln|x-2| + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.21. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{5}{(x+3)^7}\,dx.$$

$\Diamond$ Підінтегральна функція є простим дробом II типу.

$$\int \frac{5}{(x+3)^7}\,dx = -\frac{5}{6(x+3)^6} + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.22. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}\,dx.$$

$\Diamond$ Оскільки знаменник підінтегральної функції має тільки комплексні корені, то розглядувана функція є простим дробом III типу.

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}\,dx = \left[\begin{array}{c} (x^2+2x+10)' = 2x+2; \\ x^2+2x+10 = (x^2+2x+1)+9 = (x+1)^2+9 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)-2+\frac{4}{3}}{x^2+2x+10}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)-\frac{2}{3}}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+10}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C\,. \blacklozenge$$

Приклад 1.23. Знайти інтеграл від раціональної функції

$$\int \frac{3x-5}{(x-3)(x+2)}\,dx.$$

$\Diamond$ Підінтегральна функція — правильний раціональний дріб. Корені знаменника дійсні і різні: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Тому підінтегральний дріб розкладаємо на суму простих дробів I типу.

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A та B, дріб у правій частині рівності зводимо до спільного знаменника:

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3}^{\backslash x+2} + \frac{B}{x+2}^{\backslash x-3} =$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-3B}{(x-3)(x+2)}.$$

Знаменники у лівій і правій частині рівності рівні, тому повинні бути рівними чисельники:

$$3x-5 = (A+B)x + 2A - 3B\,.$$

Складаємо систему для визначення коефіцієнтів A та B:

$$\begin{array}{c|} x^1 \\ x^0 \end{array} \quad \begin{cases} A+B=3; \\ 2A-3B=-5; \end{cases} \qquad \begin{cases} A=4/5; \\ B=11/5. \end{cases}$$

Таким чином

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x+2)} = \frac{4/5}{x-3} + \frac{11/5}{x+2}.$$

Повертаємося до інтеграла і проводимо його обчислення:

$$\int \frac{3x-5}{(x-3)(x+2)}dx = \int \left(\frac{4/5}{x-3} + \frac{11/5}{x+2} \right) dx = \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{11}{5}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{4}{5}\ln|x-3| + \frac{11}{5}\ln|x+2| + C. \blacklozenge$$

Приклад 1.24. Знайти інтеграл від раціональної функції

$$\int \frac{x^2+4}{(x^2-16)(x-4)}\,dx.$$

$\lozenge$ Підінтегральна функція — правильний раціональний дріб. Проведемо перетворення знаменника:

$$\frac{x^2+4}{(x^2-16)(x-4)} = \frac{x^2+4}{(x-4)(x+4)(x-4)} = \frac{x^2+4}{(x-4)^2(x+4)}.$$

Як бачимо корені знаменника дійсні, а один із них є кратним: $x_{1,2} = 4$, $x_3 = -4$. Розкладаємо дріб на прості дроби I та II типів:

$$\frac{x^2+4}{(x-4)^2(x+4)} = \frac{A}{(x-4)^2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+4}.$$

Знаходимо A, B та C методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x^2+4}{(x-4)^2(x+4)} = \frac{A}{(x-4)^2}^{\backslash x+4} + \frac{B}{x-4}^{\backslash (x+4)(x-4)} + \frac{C}{x+4}^{\backslash (x-4)^2} =$$

$$= \frac{Ax+4A+Bx^2-16B+Cx^2-8Cx+16C}{(x-4)^2(x+4)};$$

$$x^2+4 = (B+C)x^2 + (A-8C)x + 4A - 16B + 16C;$$

$$\begin{array}{c|} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \quad \begin{cases} B+C=1; \\ A-8C=0; \\ 4A-16B+16C=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} A=5/2; \\ B=11/16; \\ C=5/16. \end{cases}$$

Проводимо інтегрування:

$$\int \frac{x^2+4}{(x^2-16)(x-4)}\,dx = \int \frac{x^2+4}{(x+4)(x-4)^2}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{5/2}{(x-4)^2} + \frac{11/16}{x-4} + \frac{5/16}{x+4} \right) dx = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-4)^2} + \frac{11}{16}\int \frac{dx}{x-4} +$$

$$+ \frac{5}{16}\int \frac{dx}{x+4} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(x-4)} + \frac{11}{16}\ln|x-4| + \frac{5}{16}\ln|x+4| + C\,. \blacklozenge$$

Приклад 1.25. Знайти інтеграл від раціональної функції

$$\int \frac{x^5-3}{x^3+2x^2+5x}\,dx.$$

◊ Підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину

$$
\begin{array}{rl}
\begin{array}{l}
x^5 \quad -3 \\
\underline{x^5 + 2x^4 + 5x^3} \\
\quad -2x^4 - 5x^3 \quad -3 \\
- \\
\quad \underline{-2x^4 - 4x^3 - 10x^2} \\
\qquad\quad -x^3 + 10x^2 - 3 \\
\quad - \\
\qquad\quad \underline{-x^3 - 2x^2 - 5x} \\
\qquad\qquad 12x^2 + 5x - 3
\end{array}
&
\begin{array}{|l}
x^3 + 2x^2 + 5x \\
\hline
x^2 - 2x - 1
\end{array}
\end{array}
$$

Таким чином

$$\frac{x^5 - 3}{x^3 + 2x^2 + 5x} = x^2 - 2x - 1 + \frac{12x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 + 5x}.$$

Дріб у правій частині рівності є правильним. Розкладаємо його на прості дроби, попередньо перетворивши знаменник

$$\frac{12x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \frac{12x^2 + 5x - 3}{x(x^2 + 2x + 5)}.$$

Квадратний тричлен $x^2 + 2x + 5$ має комплексні корені ($D < 0$), тому одержимо простий дріб III типу. Розкладаємо правильний дріб на прості дроби:

$$\frac{12x^2 + 5x - 3}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5}.$$

Невизначені коефіцієнти знаходимо вище описаним методом:

$$\frac{12x^2 + 5x - 3}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x}^{\backslash x^2+2x+5} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5}^{\backslash x} = \frac{Ax^2 + 2Ax + 5A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 2x + 5)};$$

$$12x^2 + 5x - 3 = Ax^2 + 2Ax + 5A + Bx^2 + Cx;$$

$$\begin{array}{c|c}
x^2 & \\
x^1 & \\
x^0 &
\end{array}
\begin{cases} A + B = 12; \\ 2A + C = 5; \\ 5A = -3; \end{cases}
\quad
\begin{cases} B = 63/5; \\ C = 31/5; \\ A = -3/5. \end{cases}$$

Отже,

$$\frac{12x^2 + 5x - 3}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{-3/5}{x} + \frac{1}{5} \cdot \frac{63x + 31}{x^2 + 2x + 5}.$$

Проводимо інтегрування дробово-раціональної функції:

$$\int \frac{x^5-3}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \int \left(x^2-2x-1-\frac{3}{5x}+\frac{1}{5}\cdot\frac{63x+31}{x^2+2x+5} \right) dx =$$

$$= \int x^2dx - 2\int x\,dx - \int dx - \frac{3}{5}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{63x+31}{x^2+2x+5}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 - x - \frac{3}{5}\ln|x| + \frac{1}{5}\int \frac{63x+31}{x^2+2x+5}\,dx\,.$$

Обчислення останнього інтегралу проведемо окремо. Під знаком інтеграла простий дріб III типу, а тому

$$\int \frac{63x+31}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{63x+31}{(x+1)^2+4}\,dx = \begin{bmatrix} t = x+1, \\ x = t-1, \\ dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{63(t-1)+31}{t^2+4}\,dt = \int \frac{63t-32}{t^2+4}\,dt = \frac{63}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+4} - 32\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{63}{2}\ln|t| - 16\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C = \frac{63}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| - 16\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2} + C.$$

Таким чином, одержуємо відповідь:

$$\int \frac{x^5-3}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - x - \frac{3}{5}\ln|x| + \frac{63}{10}\ln\left|x^2+2x+5\right| -$$

$$-\frac{16}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2} + C. \ \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання.

Розкласти раціональні функції на прості дроби:

45. $\dfrac{1}{(x^2+5x+6)(x+4)}$, 46. $\dfrac{x+5}{(x+4)^3(x-3)}$, 47. $\dfrac{2x^2-3}{(x^2+4)(x^2-10x+25)}$,

48. $\dfrac{x^5+2x^3+3}{x^4-2x^2+1}$, 49. $\dfrac{1-7x}{(x^2+5x+14)(x^3-x^2)}$, 50. $\dfrac{x}{(x+6)(x^2-4x+4)}$,

$$51.\frac{5}{(x^2+8)x},\ 52.\frac{1}{x^4+5x^2+4},\ 53.\frac{x^2-2}{x^5+4x^4+4x^3},\ 54.\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Обчислити інтеграли від простих дробів:

$$55.\int\frac{3}{x-5}\,dx,\quad 56.\int\frac{6}{x-\sqrt{3}}\,dx,\quad 57.\int\frac{4}{(x-3)^7}\,dx,\quad 58.\int\frac{7}{(x-9)^5}\,dx,$$

$$59.\int\frac{3x^2-1}{x^2+3x+\frac{13}{4}}\,dx,\quad 60.\int\frac{x-5}{x^2-4x+6}dx\ ,\quad 61.\int\frac{1-x}{x^2+1}dx\ ,$$

$$62.\int\frac{3}{(x-5)^3}\,dx,\quad 63.\int\frac{2x-5}{3x^2+6x-2}\,dx,\quad 64.\int\frac{x+2}{x^2+9}\,dx.$$

Обчислити інтеграли:

$$65.\int\frac{x}{x^2-4x-5}\,dx,\quad 66.\int\frac{3x-1}{x^3-3x^2}\,dx,\quad 67.\int\frac{2x-1}{x^3+5x^2+2x+10}\,dx,$$

$$68.\int\frac{x-5}{x^3-4x^2+4x}dx\ ,\quad 69.\int\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx,\quad 70.\int\frac{3x+2}{x^2-8x-9}\,dx,$$

$$71.\int\frac{1-x}{x^3-1}dx\ ,\quad 72.\int\frac{x^3+1}{x^2-x}\,dx,\quad 73.\int\frac{x^4+2x-4}{x^3+4x}\,dx.$$

1.2.5 Інтегрування ірраціональних функцій

Якщо в раціональному дробі деякі доданки в чисельнику і знаменнику замінити коренями від раціональних функцій (в тому числі і від многочленів), то одержана функція називається **ірраціональною.**

У деяких випадках інтеграли від ірраціональних функцій можна раціоналізувати, тобто за допомогою придатної підстановки привести до інтегралів від раціональних функцій.

Розглянемо найбільш типові випадки:

1. Маємо інтеграл вигляду:

$$\int R(x,\sqrt[n]{x^k},\ \sqrt[m]{x^p},...,\sqrt[q]{x^l})\,dx,$$

де $R(\cdot,\cdot,\cdots,\cdot)$ — раціональна функція від аргументів $x,\sqrt[n]{x^k},\ \sqrt[m]{x^p},\ldots,\sqrt[q]{x^l}$. Підінтегральна функція раціоналізується за допомогою підстановки $x=t^s$, де s — це найменше спільне кратне показників коренів, тобто чисел n,m,q.

Нагадаємо: найменше спільне кратне (НСК) декількох чисел — це найменше натуральне число, яке ділиться націло на кожне із заданих чисел.

Приклад 1.26. Знайти інтеграл від ірраціональної функції:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx.$$

$\Diamond$ Оскільки підінтегральна функція містить $\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x^2}, \sqrt{x}$, то вона раціоналізується за допомогою підстановки $x = t^6$, оскільки НСК(2,3)=6.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx = \left[x = t^6, dx = 6t^5dt\right] = \int \frac{t^2}{t^4-t^3}\cdot 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^7}{t^4-t^3}\,dt =$$

$$= 6\int \frac{t^4}{t-1}\,dt = \left[\begin{array}{l|l} t^4 & t-1 \\ \cline{2-2} \underline{t^4 - t^3} & t^3+t^2+t+1 \\ \quad -\; t^3 & \\ \quad\;\; \underline{t^3 - t^2} & \\ \qquad -\; t^2 & \\ \qquad\;\; \underline{t^2 - t} & \\ \qquad\quad -\; t & \\ \qquad\quad\;\; \underline{t - 1} & \\ \qquad\qquad\;\; 1 & \end{array}\right] =$$

$$= 6\int \left(t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 6\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right)+C. \blacklozenge$$

2. Інтеграл вигляду:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^k}, \sqrt[m]{(ax+b)^p}, ..., \sqrt[q]{(ax+b)^l}\right)dx,$$

раціоналізується за допомогою підстановки: $ax + b = t^s$, де s — це найменше спільне кратне показників коренів, тобто чисел n, m, q.

Приклад 1.27. Знайти інтеграл від ірраціональної функції

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx.$$

$\Diamond$ Оскільки підінтегральна функція містить $x, \sqrt{1+x}, \sqrt[3]{1+x}$, то вона раціоналізується за допомогою підстановки $1+x=t^6$.

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx = \left[1+x=t^6;\ dx=6t^5\,dt\right] = \int \frac{(t^6-1)+t^3}{t^2}\cdot 6t^5\,dt =$$

$$6\int (t^6-1+t^3)\cdot t^3\,dt = 6\int (t^9+t^6-t^3)\,dt =$$

$$= 6\left[\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right]+C = \left[\begin{array}{c}\text{повертаємося до змінної } x:\\ 1+x=t^6,\ t=\sqrt[6]{1+x}\end{array}\right] =$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt[6]{(1+x)^{10}}}{10}+\frac{\sqrt[6]{(1+x)^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{(1+x)^4}}{4}\right]+C =$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt[3]{(1+x)^5}}{10}+\frac{\sqrt[6]{(1+x)^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}}{4}\right]+C. \blacklozenge$$

3. Обчислення інтегралів вигляду:

$$\text{а)} \int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx; \quad \text{б)} \int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx; \quad \text{в)} \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx$$

проводиться за допомогою наступних підстановок:

$$\text{а) } x=a\sin t \text{ (або } x=a\cos t),\ \text{тоді } dx=a\cos t\,dt,$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t;$$

$$\text{б) } x=a\,\mathrm{tg}\,t \text{ (або } x=a\,\mathrm{ctg}\,t),\ \text{тоді } dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t},$$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,t}=a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t};$$

$$\text{в) } x=\frac{a}{\cos t} \text{ (або } x=\frac{a}{\sin t}),\ \text{тоді } dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=a\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=a\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=a\,\mathrm{tg}\,t.$$

Приклад 1.28. Обчислити інтеграли

$$\text{а) } \int \sqrt{9-x^2}\,dx\,, \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}}, \quad \text{в) } \int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-4}}.$$

а) $\Diamond$ Раціоналізацію підінтегрального виразу проведемо за допомогою підстановки: $x = a\sin t$

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} x = 3\sin t,\ dx = 3\cos t\ dt; \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\cos t \end{array}\right] =$$

$$\int 3\cos t \cdot 3\cos t\ dt = 9\int \cos^2 t\ dt = 9\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{9}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{9}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \Bigg[\text{повертаємося до змінної } x\text{: } \sin t = \frac{x}{3},\ t = \arcsin\frac{x}{3};$$

$$\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cdot\cos t = \sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t} = \sin(\arcsin\frac{x}{3})\times$$

$$\times\sqrt{1-(\sin(\arcsin\tfrac{x}{3}))^2} = \frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\tfrac{x^2}{9}}\ \Bigg] = \frac{9}{2}\left(\arcsin\tfrac{x}{3} + \frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\tfrac{x^2}{9}}\right).\ \blacklozenge$$

б) $\Diamond$ У даному випадку використаємо підстановку: $x = a\operatorname{tg} t$.

$$\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}} = \left[\begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t,\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}, \\ \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \dfrac{1}{\cos t} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{\operatorname{tg}^2 t\cdot\dfrac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t\cdot dt}{\operatorname{tg}^2 t\cdot\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\operatorname{tg}^2 t\cdot\cos t} = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\cos t}\,dt =$$

$$= \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C = \left[\begin{array}{c} \text{повертаємося до змінної } x: \\ x = \operatorname{tg} t,\ t = \operatorname{arctg} x \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\sin(\operatorname{arctg} x)} + C.\ \blacklozenge$$

в) $\Diamond$ Використаємо підстановку: $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-4}} = \left[\begin{array}{c} x = \dfrac{2}{\cos t},\ dx = \frac{2\sin t\ dt}{\cos^2 t}, \\ \sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1} = 2\operatorname{tg} t \end{array}\right] =$$

$$\int \frac{\dfrac{2\sin t\, dt}{\cos^2 t}}{\dfrac{2}{\cos t}\cdot 2\operatorname{tg} t} = \int \frac{\operatorname{tg} t\, dt}{2\operatorname{tg} t} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}\, t + C =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{повертаємося до змінної } x: \\ \cos t = \dfrac{2}{x},\ t = \arccos\dfrac{2}{x} \end{array} \right] = \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x} + C.\ \blacklozenge$$

4. Окремим випадком розглянемо інтегрування біномінальних диференціалів.

Вираз $x^m(a+bx^n)^p\, dx$ де $a,\ b,\ m,\ n,\ p$ — дійсні числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$, називається **біноміальним диференціалом**.

Теорема 1.2. *Інтеграл від біноміального диференціала*

$$\int x^m(a+bx^n)^p\, dx \tag{1.12}$$

може бути проінтегрований в елементарних функціях шляхом раціоналізуючої заміни тільки для раціональних $m,\ n,\ p$ в одному з трьох випадків:
1. Нехай p — ціле. Тоді $x = t^k$, де k — спільний знаменник чисел $m,\ n$.
2. Нехай $\dfrac{m+1}{n}$ — ціле. Тоді $a + bx^n = t^k$, де k — знаменник дробу p.
3. Нехай $\dfrac{m+1}{n} + p$ — ціле. Тоді $ax^{-n} + b = t^k$, де k — знаменник дробу p.

Приклад 1.29. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

$\lozenge$ Запишемо заданий інтеграл у наступному вигляді:

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\, dx$$

і тоді, порівнюючи із (1.12), отримаємо

$$m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{1}{4},\ p = \frac{1}{3}.$$

Складаємо вираз $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$ — ціле число. Таким чином у нас другий випадок теореми і тому використаємо відповідну підстановку.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \left[\begin{array}{c} 1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3,\ x^{\frac{1}{4}} = t^3 - 1,\ x = (t^3-1)^4,\ x^{-\frac{1}{2}} = \\ \dfrac{1}{(t^3-1)^2},\ dx = 4(t^3-1)^3 3t^2 dt = 12t^2(t^3-1)^3 dt \end{array} \right] =$$

$$\int \frac{1}{(t^3-1)^2}\, t\cdot 12(t^3-1)^3 t^2\, dt = 12\int t^3(t^3-1)dt = 12\int (t^6-t^3)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = 12t^4\left(\frac{t^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C = \left[\begin{array}{c}\text{повертаємося до } x:\\ t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\end{array}\right] =$$

$$= 12(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C. \blacklozenge$$

5. Інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$, де R — раціональна функція, обчислюються за допомогою **підстановок Ейлера**. Є три підстановки Ейлера, але частіше використовуються перші дві.

Розглянемо три можливі випадки їх використання:

а) Якщо $a>0$, то застосовується **перша підстановка Ейлера**::

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x \tag{1.13}$$

Знак $''+''$ або $''-''$ можна вибирати довільним чином. Для проведення подальших дій виберемо знак $''+''$, тобто візьмемо підстановку $\sqrt{ax^2+bx+c} = t+\sqrt{a}x$. Обидві частини рівності підносимо до квадрату:

$$ax^2+bx+c = t^2+2\sqrt{a}xt+ax^2,\ bx+c = t^2+2\sqrt{a}xt,$$

звідки і отримуємо вираз для змінної x у явному вигляді:

$$x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}.$$

Тоді

$$dx = \frac{2t(b-2t\sqrt{a})+2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b-2t\sqrt{a})^2}\, dt.$$

Знаходимо вираз для $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t+\sqrt{a}x = \frac{bt-t^2\sqrt{a}-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}\ .$$

Таким чином заданий інтеграл набуде вигляду:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx =$$

$$\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},\ \frac{bt-t^2\sqrt{a}-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}\right)\frac{2t(b-2t\sqrt{a})+2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b-2t\sqrt{a})^2}\, dt$$

і обчислюється методом розкладання на прості дроби.

Приклад 1.30. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$$

$\lozenge$ Підінтегральна функція є раціональною функцією відносно $\sqrt{x^2+x+1}$ та x, тому можна використати підстановку Ейлера. Оскільки $a = 1$ і $1 > 0$, то використаємо першу підстанову (1.13):

$$\sqrt{x^2+x+1} = t + x\,.$$

Підносимо обидві частини рівності до квадрату і виражаємо змінну x через змінну t:

$$x^2+x+1 = t^2+2tx+x^2;\; x = \frac{t^2-1}{1-2t}.$$

Знаходимо dx:

$$dx = \frac{-\,2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}\,dt.$$

Залишається виразити $\sqrt{x^2+x+1}$ через нову змінну t і підставити у підінтегральний вираз:

$$\sqrt{x^2+x+1} = x+t = \frac{t^2-1}{1-2t}+t = \frac{-\,t^2+t-1}{1-2t}\,,$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int \frac{\dfrac{-\,2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}\,dt}{\dfrac{t^2-1}{1-2t}+\dfrac{-\,t^2+t-1}{1-2t}} =$$

$$= \int \frac{(-2t^2+2t-2)\,dt}{(1-2t)^2\left(\dfrac{t^2-1}{1-2t}+\dfrac{-\,t^2+t-1}{1-2t}\right)} = \int \frac{(-2t^2+2t-2)\,dt}{(1-2t)\,(t^2-1-t^2+t-1)} =$$

$$= \int \frac{(-2t^2+2t-2)\,dt}{(1-2t)(t-2)}.$$

Таким чином ми отримали інтеграл від дробово-раціональної функції. Підінтегральна функція є неправильним дробом (степінь чисельника і знаменника рівні 2). Щоб отримати правильний дріб спочатку розкриємо дужки у знаменнику, а потім чисельник і знаменник помножимо на (-1):

$$\frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)(t-2)}=\frac{-2t^2+2t-2}{-2t^2+5t-2}=\frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2}\,.$$

Зазвичай у таких випадках многочлен чисельника ділиться на многочлен знаменника. Але у даному прикладі зручніше буде поступити іншим способом — у чисельнику додати і відняти $3t$:

$$\frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2}=\frac{2t^2-5t+2+3t}{2t^2-5t+2}=$$

$$\frac{2t^2-5t+2}{2t^2-5t+2}+\frac{3t}{2t^2-5t+2}=1+\frac{3t}{2t^2-5t+2},$$

де дріб $\dfrac{3t}{2t^2-5t+2}$ є правильним і розкладається на прості дроби першого типу:

$$\frac{3t}{2t^2-5t+2}=\frac{3t}{(2t-1)(t-2)}=\frac{A}{2t-1}+\frac{B}{t-2}=\frac{(A+2B)t-2A-B}{(2t-1)(t-2)};$$

$$(A+2B)t-2A-B=3t;\ \left\{\begin{array}{l}A+2B=3,\\ -2A-B=0,\end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{l}A=-1,\\ B=2.\end{array}\right.$$

Тоді

$$\int\frac{(-2t^2+2t-2)\,dt}{(1-2t)(t-2)}=\int\left(1-\frac{1}{2t-1}+\frac{2}{t-2}\right)\,dt=t-\frac{1}{2}\ln|2t-1|+$$

$+2\ln|t-2|+C=$ [враховуємо, що $t=\sqrt{x^2+x+1}-x$] $=\sqrt{x^2+x+1}-x-$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right|+2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-2\right|+C.\ \blacklozenge$$

б) Якщо $c>0$, то використовується **друга підстановка Ейлера**:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}\,. \tag{1.14}$$

Знак $''+''$ або $''-''$ можна вибирати довільним чином. Виберемо знак $''+''$, тобто візьмемо підстановку $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$. Обидві частини рівності підносимо до квадрату:

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2\sqrt{c}tx+c,\ ax^2+bx=x^2t^2+2\sqrt{c}tx$$

і виражаємо змінну x у явному вигляді:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

Тоді

$$dx = \frac{2\sqrt{c}(a - t^2) + 2t(2\sqrt{c}t - b)}{(a - t^2)^2}\, dt.$$

Знаходимо вираз для $\sqrt{ax^2 + bx + c}$:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{c\, t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}\,.$$

Підставивши знайдені вирази у заданий інтеграл, одержуємо інтеграл від дробово-раціональної функції:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\, dx =$$

$$= \int R\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2},\ \frac{c\, t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}\right) \frac{2\sqrt{c}(a - t^2) + 2t(2\sqrt{c}t - b)}{(a - t^2)^2}\, dt,$$

який обчислюється методом розкладання на прості дроби.

Приклад 1.31. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}\, dx.$$

$\Diamond$ Підінтегральна функція є раціональною функцією відносно $\sqrt{x^2 - x + 1}$ та x, тому можна використати підстановку Ейлера. Оскільки $c = 1$ і $1 > 0$, то використаємо другу підстанову (1.14):

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = xt + 1\,.$$

Підносимо обидві частини рівності до квадрату і виражаємо змінну x через нову змінну t:

$$x^2 - x + 1 = x^2t^2 + 2tx + 1;\ x = \frac{2t + 1}{-t^2 + 1}.$$

Знаходимо dx:

$$dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(-t^2 + 1)^2}\, dt.$$

Виражаємо $\sqrt{x^2 - x + 1}$ через нову змінну t і підставляємо у підінтегральний вираз:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = xt + 1 = \frac{t^2 + t + 1}{(-t^2 + 1)},$$

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}\, dx = \int \frac{\dfrac{2t^2 + 2t + 2}{(-t^2 + 1)^2}\, dt}{\dfrac{2t + 1}{-t^2 + 1} + \dfrac{t^2 + t + 1}{-t^2 + 1}} =$$

$$= -\int \frac{(2t^2 + 2t + 2)\, dt}{(t^2 - 1)(t^2 + 3t + 2)} = -\int \frac{(2t^2 + 2t + 2)\, dt}{(t + 1)^2(t - 1)(t + 2)}.$$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, який розкладаємо на суму простих дробів першого та другого типів:

$$\frac{(2t^2 + 2t + 2)}{(t + 1)^2(t - 1)(t + 2)} = \frac{A}{(t + 1)^2} + \frac{B}{(t + 1)} + \frac{C}{(t - 1)} + \frac{D}{(t + 2)} =$$

$$\frac{A(t - 1)(t + 2) + B(t^2 - 1)(t + 2) + C(t + 1)^2(t + 2) + D(t^2 - 1)(t + 1)}{(t + 1)^2(t - 1)(t + 2)};$$

$$(B + C + D)t^3 + (A + 2B + 4C + D)t^2 + (A - B + 5C - D)t-$$

$$-2A - 2B + 2C - D = 2t^2 + 2t + 2;$$

$$\begin{cases} B + C + D = 0, \\ A + 2B + 4C + D = 2, \\ A - B + 5C - D = 2, \\ -2A - 2B + 2C - D = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1, \\ B = 3/2, \\ C = 1/2, \\ D = -2. \end{cases}$$

Тоді

$$-\int \frac{(2t^2 + 2t + 2)\, dt}{(t + 1)^2(t - 1)(t + 2)} = -\int \frac{-1}{(t + 1)^2} + \frac{3/2}{(t + 1)} + \frac{1/2}{(t - 1)} + \frac{-2}{(t + 2)} =$$

$$\frac{-1}{t + 1} - \frac{3}{2}\ln|t + 1| - \frac{1}{2}\ln|t - 1| + 2\ln|t + 2| + C =$$

$$= \left[\text{враховуємо, що } t = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x}\right] =$$

$$= \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}+1} - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}+1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}-1\right| +$$

$$+2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}+2\right| + C = -\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+x-1} -$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x-1}{x}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x-1}{x}\right| +$$

$$+2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+2x-1}{x}\right| + C = \left[\begin{array}{c}\text{враховуючи, що } \ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b, \\ \text{результат можна спростити}\end{array}\right] =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+x-1} - \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+x-1\right| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-x-1\right| + 2\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+2x-1\right| + C. \ \blacklozenge$$

Слід зауважити, що у багатьох випадках застосування першої підстановки Ейлера не виключає можливості застосування другої. У прикладах (1.30) та (1.31) можна використовувати і першу, і другу підстановки Ейлера.

в) Якщо многочлен $ax^2 + bx + c$ має дійсні різні корені x_1, x_2, тобто $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, то використовується **третя підстановка Ейлера**:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1) \text{ або } \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_2). \tag{1.15}$$

Розглянемо перший із запропонованих варіантів підстановки (1.15). Підносимо обидві частини рівності до квадрату і виражаємо змінну x у явному вигляді:

$$ax^2 + bx + c = t^2(x - x_1)^2, \ a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2;$$

$$x = \frac{t^2 x_1 - a x_2}{t^2 - a}.$$

Тоді

$$dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2}\, dt.$$

Через нову змінну t виражаємо вираз $\sqrt{ax^2 + bx + c}$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{at(x_1 - x_2)}{(t^2 - a)}\ .$$

Приклад 1.32. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{2x+8}{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx.$$

$\Diamond$ Оскільки $\sqrt{3-2x-x^2}$ має дійсні різні корені $x=-3$, $x=1$, то можна використати третю підстановку Ейлера (1.15):

$$\sqrt{3-2x-x^2}=t(x+3).$$

Виражаємо змінну x через t і знаходимо dx:

$$x=\frac{1-3t^2}{t^2+1},\ \ dx=\frac{-8t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Підставляємо одержані вирази у заданий інтеграл:

$$\int \frac{2x+8}{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx=\int \frac{2\cdot\dfrac{1-3t^2}{t^2+1}+8}{\left(\dfrac{1-3t^2}{t^2+1}+1\right)\dfrac{4t}{t^2+1}}\cdot\frac{-8t}{(t^2+1)^2}\,dt=$$

$$=\int \frac{2t^2+10}{(t^2-1)(t^2+1)}\,dt=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\dfrac{2t^2+10}{(t^2-1)(t^2+1)}=\dfrac{2t^2+10}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{t+1}+\dfrac{Ct+D}{t^2+1}=\\ =\dfrac{A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t-1)(t+1)}{(t-1)(t+1)(t^2+1)};\\ 2t^2+10=A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t-1)(t+1)=\\ =(A+B+C)t^3+(A-B+D)t^2+(A+B-C)t+A-B-D\,;\\ \left\{\begin{array}{l}A+B+C=0;\\ A-B+D=2;\\ A+B-C=0;\\ A-B-D=10,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}A=3;\\ B=-3;\\ C=0;\\ D=-4.\end{array}\right.\end{array}\right]=$$

$$=\int\left(\frac{3}{t-1}-\frac{3}{t+1}-\frac{4}{t^2+1}\right)\,dt=3\ln|t-1|-3\ln|t+1|-4\,\mathrm{arctg}\,t+C=$$

$$=\left[t=\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+3}=\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}\right]=3\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}-1\right|-3\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}+1\right|-$$

$$-4\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}+C. \ \blacklozenge$$

Зауваження. Часто підстановки Ейлера приводять до громіздких викладок. Тому деколи доцільніше використати інші заміни змінної для знаходження невизначених інтегралів, що містять квадратичні ірраціональності.

Завдання для самостійного виконання

Знайти невизначені інтеграли:

$$74.\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx,\quad 75.\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx,\quad 76.\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx,$$

$$77.\int\frac{\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}\,dx,\quad 78.\int\frac{x^4}{\sqrt{x-1}}\,dx,\quad 79.\int\frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4}\,dx,$$

$$80.\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx,\quad 81.\int\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx,\quad 82.\int\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx,$$

$$83.\int\frac{1}{x^3\sqrt{x^2+1}}\,dx,\quad 84.\int\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx,\quad 85.\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$86.\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,\quad 87.\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx,\quad 88.\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx,$$

$$89.\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx,\quad 90.\int\frac{1}{x\sqrt{2+x-x^2}}\,dx,\quad 91.\int\frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}\,dx,$$

$$92.\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx,\quad 93.\int\frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$$

1.2.6 Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо деякі випадки інтегрування тригонометричних функцій
1. Інтеграли вигляду

$$\int\sin nx\cdot\cos mx\,dx,\ \int\sin nx\cdot\sin mx\,dx,\ \int\cos nx\cdot\cos mx\,dx$$

легко обчислюються за допомогою тригонометричних формул, які дозволяють *добуток тригонометричних функцій* представити у вигляді суми або різниці, а саме:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]\,;$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\,;$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\,.$$

Приклад 1.33. Обчислити інтеграл $\int\cos 4x\cdot\cos 3x\;dx$.

◊ Оскільки

$$\cos 4x\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}[\cos(4x-3x)+\cos(4x+3x)]==\frac{1}{2}[\cos x+\cos 7x]\,,$$

то

$$\int\cos 4x\cdot\cos 3x\;dx=\frac{1}{2}\int\,[\cos x+\cos 7x]\;dx=\frac{1}{2}\left(\sin x+\frac{1}{7}\sin 7x\right)+C\,.\ ♦$$

2. Інтеграли вигляду

$$\int\sin^n x\cdot\cos^m x\;dx,$$

де $m,n\in\mathbb{N}$, легко обчислюються, якщо m,n — парні, за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\;;\;\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\;;\;\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Якщо хоч один із показників степеня непарний (наприклад $m=2k+1$), то, враховуючи, що $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, одержуємо інтеграл

$$\int\sin^n x\cdot\cos^m x\;dx=\int\sin^n x\cdot\cos^{2k+1}x\;dx=\int\sin^n x\cdot\cos^{2k}x\cdot\cos x\;dx=$$
$$=\int\sin^n x\cdot(1-\sin^2 x)^k\cdot\cos x\;dx,$$

який обчислюється за допомогою підстановки $t=\sin x$.

Приклад 1.34. Обчислити інтеграли:

$$\text{а)}\int\cos^4 x\,dx,\;\text{ б)}\int\sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx,\;\text{ в)}\int\sin^4 x\cdot\cos^3 x\,dx,\;\text{ г)}\int\cos^5 x\,dx.$$

$\Diamond$ а) Оскільки

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\,(1+\cos 2x)\right)^2 = \tfrac{1}{4}\,(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4x)\right),$$

то

$$\int \cos^4 x\, dx = \tfrac{1}{4}\int (\tfrac{3}{2} + 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x)\, dx = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}\,x + \sin 2x + \tfrac{1}{8}\sin 4x\right) + C\,.$$

б) Підінтегральну функцію перетворимо за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin^4 x\cdot\cos^2 x = \sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x = (\sin x\cdot\cos x)^2\sin^2 x = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \sin^2 x =$$

$$= \tfrac{1}{4}\sin^2 2x\sin^2 x = \tfrac{1}{4}\ \cdot\frac{1}{2}\,(1-\cos 4x)\ \cdot\tfrac{1}{2}\,(1-\cos 2x) = \tfrac{1}{16}(1 - \cos 4x - \cos 2x +$$
$$+ \cos 4x\cdot\cos 2x) = \frac{1}{16}\left(1 - \cos 4x - \cos 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x)\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(1 - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 6x\right)\,.$$

Тоді

$$\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\; dx = \frac{1}{16}\int\left(1 - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 6x\right)\, dx =$$
$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x\right) + C.$$

в) У тригонометричній функції, яка знаходиться під знаком інтеграла у непарному степені виділимо перший степінь і застосуємо відповідні тригонометричні формули:

$$\sin^4 x\cdot\cos^3 x = \sin^4 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x = \sin^4 x\cdot(1-\sin^2 x)\cdot\cos x =$$
$$= (\sin^4 x - \sin^6 x)\cdot\cos x$$

і застосуємо підстановку $t = \sin x$

$$\int (\sin^4 x - \sin^6 x)\cdot\cos x\; dx = [t = \sin x;\; dt = \cos x\; dx] = \int (t^4 - t^6)\; dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C\,.$$

г) Запишемо, що $\cos^5 x = \cos^4 x \cdot \cos x = (1-\sin^2 x)^2 \cos x$ і тоді застосуємо підстановку $t = \sin x$:

$$\int \cos^5 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = [t = \sin x;\ dt = \cos x\, dx] =$$

$$= \int (1-t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4)\, dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\ \sin^3 x + \frac{1}{5}\ \sin^5 x + C. \blacklozenge$$

3. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, де R — раціональна функція відносно $\sin x$, $\cos x$ раціоналізуються за допомогою підстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, -\pi < x < \pi, \tag{1.16}$$

яка називається **універсальною тригонометричною підстановкою**.

Так як тригонометричні функції $\sin x$, $\cos x$ виражаються через функцію $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ наступним чином

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

то за допомогою універсальної підстановки $\sin x$, $\cos x$, dx можна виразити через нову змінну t:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}\,.$$

Приклад 1.35. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{1}{8 - 4\sin x + 7\cos x}\, dx.$$

♢ Для обчислення інтегралу використаємо універсальну підстановку (1.16)

$$\int \frac{1}{8-4\sin x + 7\cos x}\, dx = \left[\begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \\ 8 - 4\sin x + 7\cos x = \\ = 8 - \frac{8t}{1+t^2} + \frac{7(1-t^2)}{1+t^2} = \\ = \frac{t^2-8t+15}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{t^2-8t+15}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2-8t+15} = \int \frac{2dt}{(t-3)(t-5)} = \left[\begin{array}{c} \frac{2}{(t-3)(t-5)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-5} = \\ \frac{A(t-5)+B(t-3)}{(t-3)(t-5)}; \\ (A+B)t - 5A - 3B = 2; \\ \begin{cases} A+B=0, \\ -5A-3B=2, \end{cases} \begin{cases} A=-1, \\ B=1, \end{cases} \end{array} \right] =$$

$$= \int \left(\frac{-1}{t-3} + \frac{1}{t-3} \right) dt = -\ln|t-3| + \ln|t-5| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3}\right| + C. \blacklozenge$$

Підстановка (1.13) хоча і є універсальною, але бувають випадки, коли вона приводить до складних обчислень. Розглянемо декілька випадки, у яких підінтегральна функція раціоналізується за допомогою інших підстановок.

а) якщо $R(\sin x, \cos x)$ — непарна функція відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то використаємо підстановку $t = \cos x$.

Приклад 1.36. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx.$$

$\lozenge$ Підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$, тому використаємо підстановку $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx = \left[t = \cos x,\ dt = -\sin x\, dx,\ \sin^2 = 1 - t^2\right] = \int \frac{(1-t^2)\cdot(-dt)}{t^4} =$$

$$= \int \frac{(t^2-1)dt}{t^4} = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4}\right) dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C\,. \blacklozenge$$

б) якщо $R(\sin x, \cos x)$ — непарна функція відносно $\cos x$, іншими словами $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то використаємо підстановку $t = \sin x$.

Приклад 1.37. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{\cos^5 x}{\sin^8 x}\, dx$.

$\lozenge$ Підінтегральна функція є непарною відносно $\cos x$, тому використаємо підстановку $t = \sin x$:

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^8 x}\, dx = \left[t = \sin x,\ dt = \cos x\, dx,\ \cos^4 x = (1-t^2)^2\right] = \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^8} =$$

$$= \int \frac{(1-2t^2+t^4)dt}{t^8} = \int \left(\frac{1}{t^8} - \frac{2}{t^6} + \frac{1}{t^4}\right) dt = -\frac{1}{7t^7} + \frac{2}{5t^5} - \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= -\frac{1}{\sin^7 x} + \frac{2}{5\sin^5 x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C. \ \blacklozenge$$

в) якщо $R(\sin x, \cos x)$ — парна функція відносно $\sin x, \cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то використаємо пістановку $t = \operatorname{tg} x$. У цьому випадку $\sin x$, $\cos x$ та dx легко виразити через нову змінну t:

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\ .$$

Приклад 1.38. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{1}{2\sin^2 x + 4\cos^2} dx$.

$\lozenge$ Підінтегральна функція є парною відносно $\sin x$ та $\cos x$, тому використаємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx = \left[\begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x\ ,\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}\ ,\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}\ , \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\ ,\ 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = \dfrac{2t^2+4}{1+t^2} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{2t^2+4} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C. \ \blacklozenge$$

4. Інтеграли вигляду $\int \operatorname{tg}^n x\, dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx$, де n — ціле та $n > 2$ обчислюються за допомогою підстановки: $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

Приклад 1.39. Обчислити інтеграл

$$\int \operatorname{tg}^4 x\, dx.$$

$\lozenge$ Використаємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \left[t = \operatorname{tg} x\ , dx = \tfrac{dt}{1+t^2}\right] = \int \tfrac{t^4}{1+t^2}\, dt = \int \left(t^2 - 1 + \tfrac{1}{1+t^2}\right)\, dt =$$

$$= \tfrac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \tfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \tfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \ \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити невизначені інтеграли:

$$94. \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx\ , \quad 95. \int \sin 2x\ \sin 5x\,dx\ , \quad 96. \int \sin^4 x\,dx\ ,$$

$$97. \int \operatorname{ctg}^4 x\,dx\ , \quad 98. \int \frac{dx}{\sin^6 x}\ , \quad 99. \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}\ , \quad 100. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx\ ,$$

$$101. \int \frac{dx}{5-3\cos x},\ 102. \int \frac{dx}{1+\sin^2 x},\ 103. \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x},\ 104. \int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx\ ,$$

$$105. \int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\,dx\ , \quad 106. \int \sin^2 \frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{4}\,dx, \quad 107. \int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x\,dx,$$

$$108. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}\,dx,\ 109. \int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x},\ 110. \int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x},$$

$$111. \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx,\ 112. \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x+\cos^4 x},\ 113. \int (\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)\,dx,$$

$$114. \int \frac{2\operatorname{tg} x+3}{(2\cos^2 x+\sin^2 x)\sin x}\,dx, \quad 115. \int \frac{1}{5+3\cos x+\sin x}\,dx.$$

1.2.7 Інтеграли, що "не беруться"

Як видно із диференціального числення, похідна від довільної елементарної функції є також функцією елементарною. Інакше кажучи, операція диференціювання не виводить нас із класу елементарних функцій. Цього не можна сказати про інтегрування — операцію, обернену до диференціювання. Інтегрування елементарної функції не завжди знову приводить до елементарної функції. Доведено, що існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли кажуть, що вони **не обчислюються в скінченому вигляді** або *"не беруться"*.

До інтегралів, які "не беруться" можна віднести наступні:

$\int e^{-x^2}\,dx$ — інтеграл Пуассона,

$\int \sin(x^2)\,dx$, $\int \cos(x^2)\,dx$ — інтеграли Френеля,

$\int \frac{1}{\ln x}\,dx$ — інтегральний логарифм,

$\int \frac{sinx}{x}\,dx$ — інтегральний синус,

$\int \frac{cosx}{x}\,dx$ — інтегральний косинус,

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx,\ |k|<1$ — еліптичний інтеграл,

$\int x^\alpha \sin x\,dx,\ \int x^\alpha \cos x\,dx, \int x^\alpha e^x\,dx,\ \alpha \neq 0,1,2,...$ та ряд інших інтегралів.

Ці інтеграли існують, оскільки існує інтеграл від будь-якої неперервної функції, але не виражаються через елементарні функції. Такі інтеграли можуть бути обчислені наближеними методами.

Таким чином операція інтегрування є складнішою, ніж операція диференціювання. Тому треба чітко володіти методами інтегрування і вміти визначати функції, інтеграли від яких цими методами знаходяться. А також важливо розрізняти інтеграли, які "не беруться".

Розділ 2

Визначений інтеграл та його застосування

2.1 Поняття визначеного інтегралу, його геометричний та економічний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо довільним чином цей відрізок на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Візьмемо на кожному відрізку точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $(i = 1, 2, \ldots)$, обчислимо значення функції $f(\xi_i)$ і помножимо на $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (Рис. 2.1).

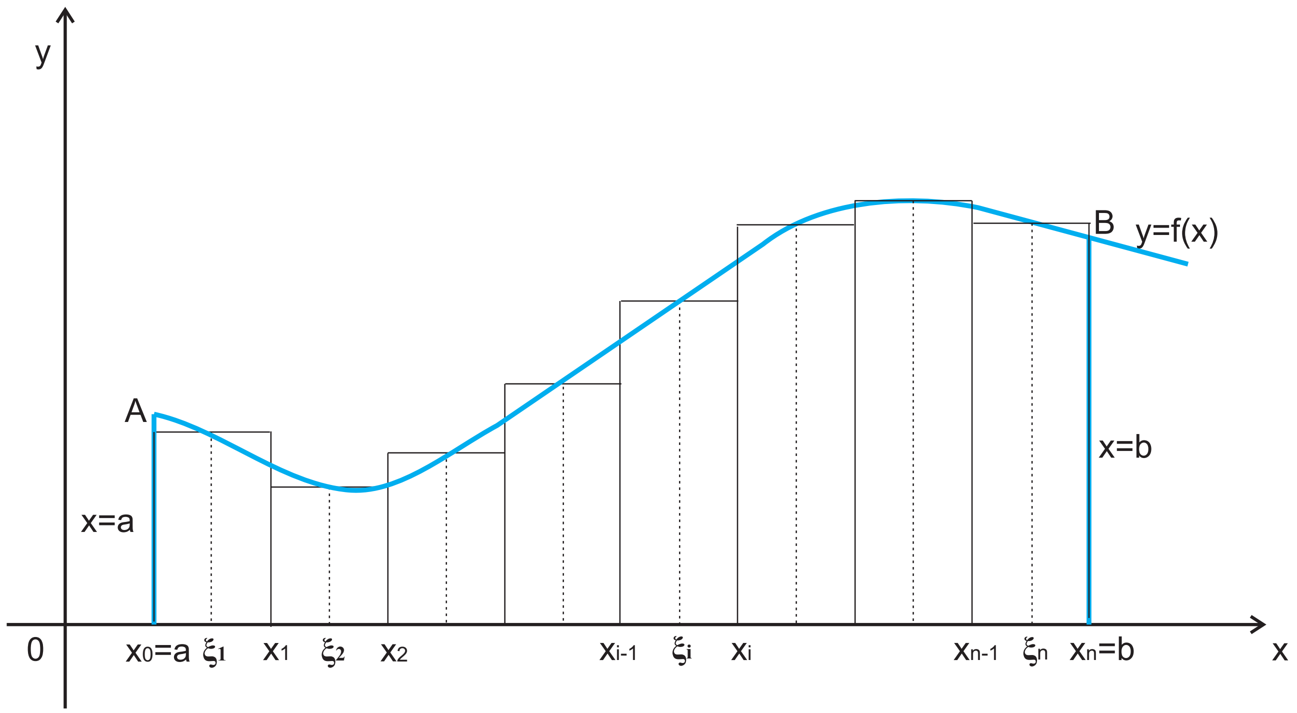

Рис. 2.1

Інтегральною сумою для функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається сума

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{2.1}$$

Означення 2.1. Якщо існує скінчена границя інтегральної суми (2.1) при $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка на частини, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається **визначеним інтегралом** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.2}$$

При цьому функція $f(x)$ є **інтегровною** на відрізку $[a;b]$. Числа a і b називаються відповідно **нижньою** і **верхньою межею інтегрування**, функція $f(x)$ називається **підінтегральною функцією**, а вираз $f(x)dx$ — **підінтегральним виразом**, $[a;b]$ — **проміжком інтегрування**.

Теорема 2.1. *(необхідна умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Теорема 2.2. *(достатня умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона є інтегровна на цьому відрізку.*

Геометричний зміст визначеного інтегралу. Площа S криволінійної трапеції (Рис 2.1.) (фігура обмежена графіком функції $y = f(x)$, $f(x) > 0$, віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$) обчислюється за формулою:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.3}$$

Економічний зміст визначеного інтегралу. Якщо функція $y = f(x)$ — продуктивність праці в момент часу t, то обсяг V виробленої за проміжок часу [0;T] продукції обчислюється за формулою:

$$V = \int\limits_0^T f(x)\, dx. \tag{2.4}$$

2.2 Властивості визначеного інтегралу

Розглянемо основні властивості визначеного інтегралу:

1. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтегралу:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,\ A = const;$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) функцій дорівнює алгебраїчній сумі (різниці) визначених інтегралів від кожної із них:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx;$$

3. Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то знак визначеного інтегралу зміниться на протилежний:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$$

4. Визначений інтеграл з рівними межами інтегрування рівний нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

5. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Геометрична інтерпретація властивості: якщо функція $f(x) \geqslant 0$ на відрізку $[a;b]$ і $a < c < b$, то площа S криволінійної трапеції з основою $[a;b]$ дорівнює сумі площ S_1 та S_2 з основами $[a;c]$ і $[c;b]$ (Рис. 2.2)

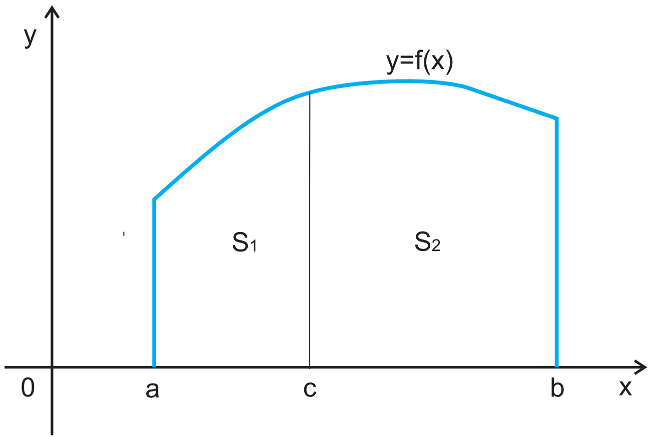

Рис. 2.2

6. Якщо на відрізку $[a;b]$ виконується нерівність $\varphi(x) \leqslant f(x)$, то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx,\ a < b.$$

Геометрична інтерпретація властивості: площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою $f(x)$ не менше площі, обмеженої знизу кривою $\varphi(x)$ (Рис. 2.3)

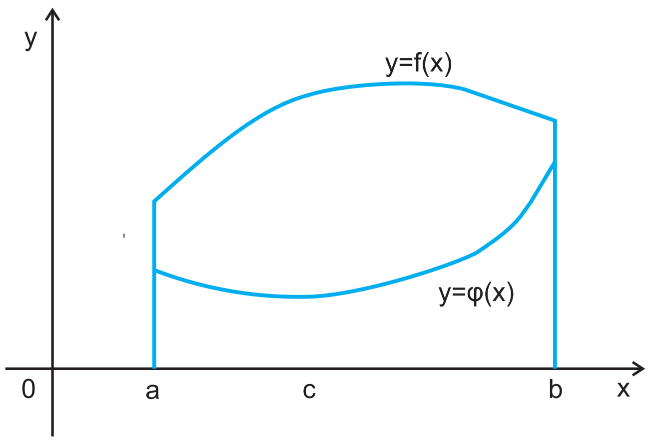

Рис. 2.3

7. Якщо m та M — найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і $a < b$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

Геометрична інтерпретація властивості: площа S криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою $f(x)$ не менше площі S_1 прямокутника висотою m і не більше площі S_2 прямокутника висотою M (Рис. 2.4)

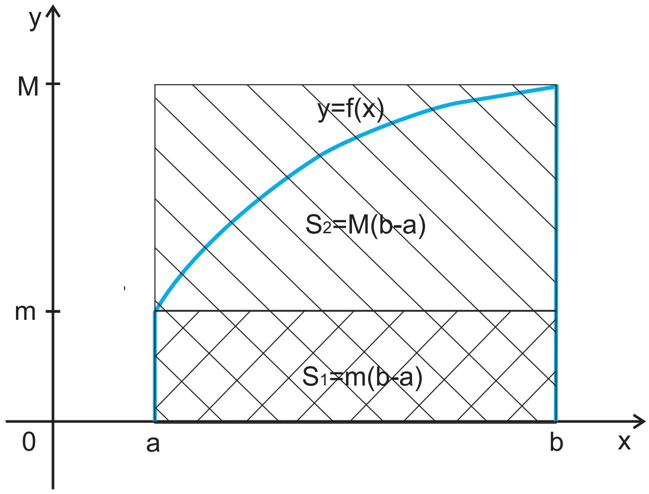

Рис. 2.4

8. Значення визначеного інтегралу не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

9. Якщо функція $f(x)$ є неперервна на відрізку $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, \text{якщо } f(x) \text{ — парна;} \\ 0, \quad \text{якщо } f(x) \text{ — непарна.} \end{cases}$$

10. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $a < b$, то існує хоча б одна точка $c \in [a;b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Дана властивість також називається "властивість про середнє значення визначеного інтеграла".

Геометрична інтерпретація властивості: якщо $f(x) \geqslant 0$ на відрізку $[a; b]$, то знайдеться хоча б одна така точка $c \in [a; b]$, що площа, обмежена кривою $f(x)$, дорівнюватиме площі прямокутника з висотою $f(c)$ (Рис. 2.5).

Число

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

називається **середнім значенням** функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

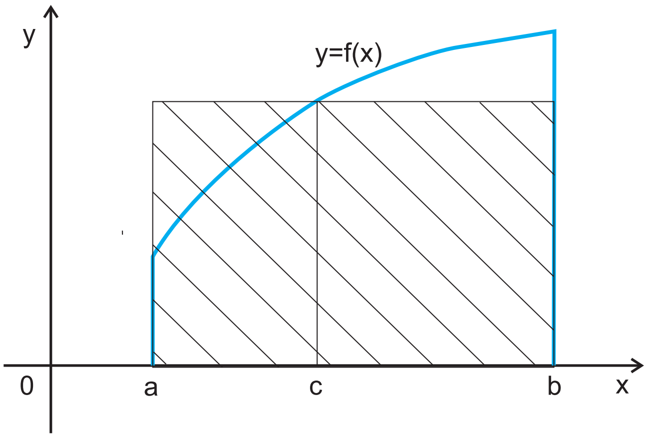

Рис. 2.5

2.3 Методи обчислення визначеного інтегралу

2.3.1 Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема 2.3. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ — будь-яка її первісна на $[a; b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{2.5}$$

Формула (2.5) називається **формулою Ньютона-Лейбніца**.

Формула Ньютона-Лейбніца надає можливість сформулювати наступне *правило*: щоб обчислити визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, потрібно знайти відповідну первісну функцію, в отриманий вираз підставити замість x спочатку верхню межу інтегрування, а потім нижню і від першого результату підстановки відняти другий.

Приклад 2.1. Обчислити інтеграл

$$\int_1^3 (x^4+2)\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int\limits_1^3 (x^4+2)dx = \left(\frac{x^5}{5}+2x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{3^5}{5}+6\right) - \left(\frac{1}{5}+2\right) = \frac{262}{5} = 52,4\,. \blacklozenge$$

Приклад 2.2. Обчислити інтеграл

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1. \blacklozenge$$

Приклад 2.3. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}. \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити визначені інтеграли

$$116. \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx, \quad 117. \int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx, \quad 118. \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad 119. \int\limits_1^3 \frac{1}{3+x^2}\,dx,$$

$$120. \int\limits_0^{\pi} (2x - \cos x)\,dx, \quad 121. \int\limits_0^1 e^{-3x}\,dx, \quad 122. \int\limits_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx,$$

$$123. \int\limits_1^2 \frac{2x^3+1}{x^2}\,dx, \quad 124. \int\limits_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right)\,dx, \quad 125. \int\limits_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}}\,dx.$$

2.3.2 Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, широко застосовується метод *заміни змінної (або метод підстановки)*.

Теорема 2.4. *Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну на відрізку $[\alpha;\beta]$, де $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Крім того для будь-якого $t \in [\alpha;\beta]$: $a < \varphi(t) < b$. Тоді*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(t);\ dx = \varphi'(t)dt, \\ a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta) \end{array}\right] = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (2.6)$$

Формула (2.6) називається **формулою заміни змінної** у визначеному інтегралі (або формулою підстановки).

Зауваження. Якщо при обчисленні невизначеного інтегралу заміною $x = \varphi(t)$ у первісній функції необхідно було повертатися до змінннної x, то у визначеному інтегралі потрібно тільки змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a = \varphi(t)$, а верхня межа β — як розв'язок рівняння $b = \varphi(t)$.

Зауваження. Часто зручніше замість підстановки $x = \varphi(t)$ використати підстановку $t = \psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються наступним чином: $\alpha = \psi(a)$ і $\beta = \psi(b)$.

Приклад 2.4. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_e^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x}\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int\limits_e^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{заміна: } t = \ln x, dt = \frac{1}{x}dx, \\ \text{при: } x = e,\ t = 1; \\ \text{при: } x = e^2,\ t = 2 \end{array}\right] = \int\limits_1^2 t^3\,dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}. \ \blacklozenge$$

Приклад 2.5. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_2^{\sqrt{23}} x\sqrt[3]{x^2+4}\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int\limits_{2}^{\sqrt{23}} x\sqrt[3]{x^2+4}\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{заміна: } x^2+4=t^3, 2x\,dx = 3t^2\,dt, \\ \text{при: } x=2,\ t=2; \\ \text{при: } x=\sqrt{23},\ t=3 \end{array}\right] = \frac{3}{2}\int\limits_{2}^{3} t^3\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{t^4}{4}\bigg|_2^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{65}{4} = \frac{195}{8}.\ \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити визначені інтеграли

$$126.\ \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx, \quad 127.\ \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}, \quad 128.\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx,$$

$$129.\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx, \quad 130.\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}, \quad 131.\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx,$$

$$132.\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx, \quad 133.\int\limits_0^{1/2} e^{\sin\pi x}\cos\pi x\,dx, \quad 134.\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\cos^4 x\,dx.$$

2.3.3 Формула інтегрування частинами для визначеного інтегралу

Теорема 2.5. *Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$, то*

$$\int\limits_a^b u\,dv = u\cdot v|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{2.7}$$

Формула (2.7) називається **формулою інтегрування частинами** для визначеного інтегралу. Всі зауваження, які зазначалися для формули інтегрування частинами для невизначеного інтегралу є справедливими і для визначеного інтегралу, тобто для формули (2.7).

Приклад 2.6. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_1^e x\ln x\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int\limits_1^e x\ln x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=\ln x, du=\dfrac{1}{x}\,dx, \\ dv = x\,dx,\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\,\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}. \blacklozenge$$

Приклад 2.7. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 xe^x\,dx.$$

$\Diamond$

$$\int\limits_0^1 xe^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x,\ du=dx, \\ dv=e^x\,dx,\ v=e^x\end{array}\right] = x\cdot e^x|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\,dx = e - e^x|_0^1 = 1. \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити визначені інтеграли

135. $\int_0^2 \ln(3x+1)\,dx$, 136. $\int\limits_0^{\pi/2}(2-x)\sin 3x\,dx$, 137. $\int\limits_0^1 x\ln(x+3)\,dx$,

138. $\int\limits_0^{1/2} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, 139. $\int\limits_1^e x^4\ln x\,dx$, 140. $\int\limits_0^1 e^{-3x}\,dx$, 141. $\int\limits_0^2 x^2e^{-2x}\,dx$,

142. $\int\limits_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$, 143. $\int\limits_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx$, 144. $\int\limits_{-2}^2 (x-1)\sin\pi x\,dx$.

145. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{x}{\cos^2 x}\,dx$, 146. $\int\limits_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$, 147. $\int\limits_0^{\sqrt{3}/3}\mathrm{arctg}\,x\,dx$, 148. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{x}{\sin^2 x}\,dx$.

2.4 Застосування визначеного інтегралу

2.4.1 Обчислення площі плоскої фігури

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $f(x) \geqslant 0$. Площа криволінійної трапеції — фігури, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox, прямими $x = a$ та $x = b$ (Рис. 2.6), знаходиться за формулою:

$$S = \int\limits_a^b f(x)\, dx. \tag{2.8}$$

Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $f(x) \leqslant 0$ (Рис. 2.7), то площа фігури, обмеженої віссю Ox, кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a$ та $x = b$, обчислюється за формулою:

$$S = -\int\limits_a^b f(x)\, dx. \tag{2.9}$$

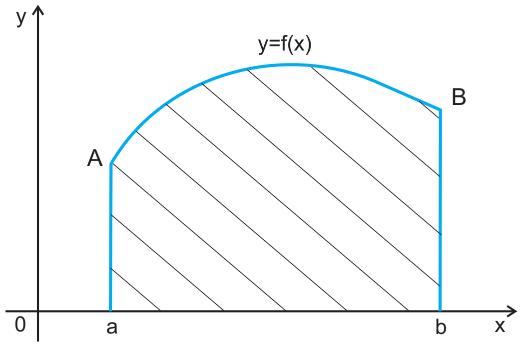

Рис. 2.6

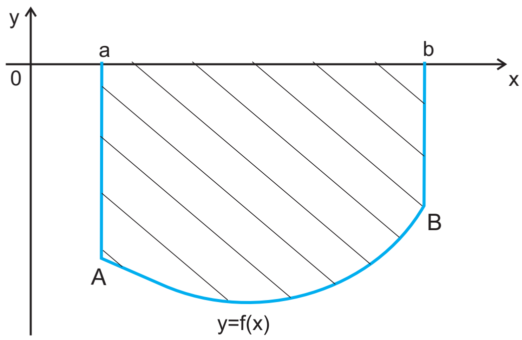

Рис. 2.7

Якщо на $[a;b]$ функція $f(x)$ змінює знак скінчене число разів (Рис. 2.8), то площа фігури, яка обмежена кривою $y = f(x)$, віссю Ox, прямими $x = a$ та $x = b$, знаходиться за формулою:

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|\ dx. \tag{2.10}$$

Для прикладу можемо обчислити площу фігури, яка зображена на Рис. 2.8

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|\ dx = \int\limits_a^{c_1} f(x)\, dx - \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\, dx + \int\limits_{c_2}^{b} f(x)\, dx.$$

Якщо фігура обмежена двома неперервними кривими $y = f(x)$, $y = g(x)$ та прямими $x = a$ та $x = b$ (Рис. 2.9) причому $f(x) \leqslant g(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, то площа визначається за формулою:

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))\ dx. \qquad (2.11)$$

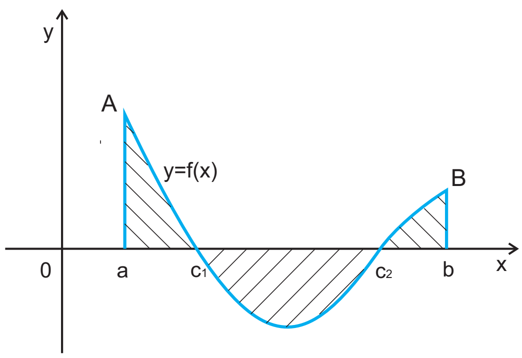

Рис. 2.8

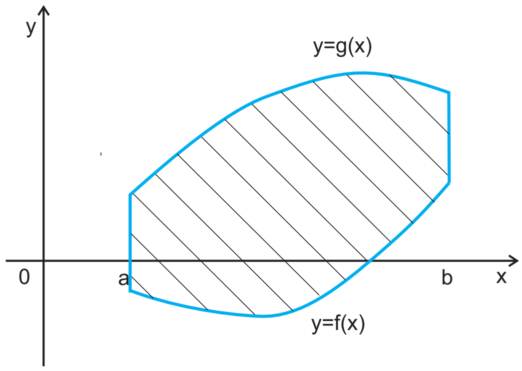

Рис. 2.9

Приклад 2.8. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x^2 + 4x$ та $y - x = 4$.

$\Diamond$ Побудуємо фігуру, площу якої потрібно обчислити. Функція $y = x^2 + 4x$ задає параболу, вітки якої напрямлені вгору і вона перетинає вісь Ox у точках $x = -4$ та $x = 0$. Функція $y - x = 4$ визначає пряму, яка перетинає вісь Ox та Oy відповідно у точках $x = -4$ та $y = 4$ (Рис. 2.10).

Площу фігури будемо обчислювати за формулою (2.11), де $f(x) = x + 4$, $g(x) = x^2 + 4x$. Для знаходження меж інтегрування потрібно розв'язати систему:

$$\begin{cases} y = x + 4; & x_1 = -4;\ \ y_1 = 0, \\ y = x^2 + 4x; & x_2 = 1;\ \ y_2 = 5. \end{cases}$$

Тоді

$$S = \int\limits_{-4}^{1} \left(x + 4 - x^2 - 4x\right)\ dx = \int\limits_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 4\right)\ dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-4}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}. \ \blacklozenge$$

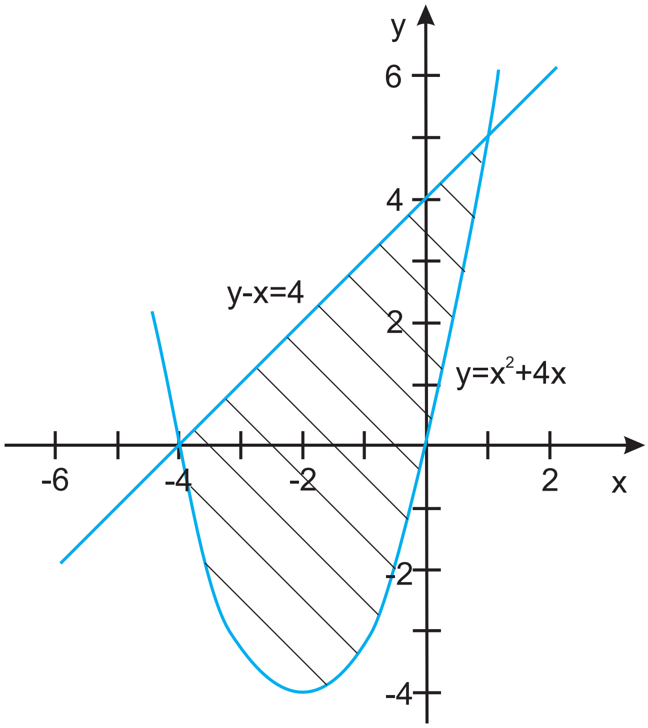

Рис. 2.10

Завдання для самостійного виконання

Обчислити площу фігури, яка обмежена кривими:

149. $y = x^2 - 2x - 1,\ 2y = 3x - 2,$ 150. $x = y^2 - 2y,\ x = -y^2 + 2y + 6,$

151. $y = x^2 - 6x + 6,\ y = -x^2 + 2x,$ 152. $4y = x^2,\ 2y = 6 - x^2,$

153. $y = x^2 + 5x,\ y = 7 - x,$ 154. $y = 3x - 4,\ y = -x^2,$

155. $y^2 = 4 - x,\ x = y^2 - 2y,$ 156. $y = 2x^2 - 12x + 16,\ y = x^2 5x + 4,$

157. $y = x\sqrt{9 - x^2},\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 3$ 158. $x = 2y^2 - 8y + 6,\ x = -y^2 - 3y.$

2.4.2 Обчислення довжини дуги кривої

Нехай на відрізку $[a; b]$ плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$— неперервна разом із похідною функція. Тоді довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (2.12)$$

Приклад 2.9. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln x$ від точки з абцисою 1 до точки з абцисою $\sqrt{3}$.

$\lozenge$ Довжину дуги кривої будемо обчислювати за формулою (2.12), де $f(x) = \ln x$:

$$l = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{заміна: } x = \operatorname{tg} z,\ dx = \frac{1}{\cos^2 z}\,dz; \\ x = 1,\ z = \frac{\pi}{4},\ x = \sqrt{3},\ z = \frac{\pi}{3} \end{array}\right] = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin z \cdot \cos^2 z} dz =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos z} + \ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{z}{2}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln 3 - \ln\operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{8}\right| = 0,92\,. \blacklozenge$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити довжину лінії, яка задана рівнянням:

$$159.\ y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x,\ x \in [0;1], \quad 160.\ y = e^x - 1,\ x \in \left[\ln\sqrt{8}; \ln\sqrt{15}\right],$$

$$161.\ y = \ln\sin x,\ x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right], \quad 162.\ y = \ln x,\ x \in [\sqrt{3}; \sqrt{15}],$$

$$163.\ y = 1 + \ln\cos x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], \quad 164.\ y = \arcsin e^{-x},\ x \in [0;1]\,,$$

$$165.\ y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x},\ x \in [3;4]\,, \quad 166.\ y = \ln(x^2-1),\ x \in [3;4]\,,$$

$$167.\ y = \frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{x^2},\ x \in [1;2]\,, \quad 168.\ y = 3 - e^x,\ x \in \left[\ln\sqrt{15}; \ln\sqrt{24}\right],$$

2.4.3 Застосування визначеного інтегралу в економіці

1. Нехай V, D, P — функції відповідно витрат, доходу та прибутку, які залежать від кількості x виробленої продукції або часу t її виробництва, а V', D', P' — функції маргінальних витрат, доходу та прибутку відповідно.

Тоді зміни вказаних величин при зростанні виробництва продукції від a одиниць до b обчислюються за формулами відповідно:

$$\int\limits_a^b V'(x)\,dx = V(b) - V(a),\ \int\limits_a^b D'(x)\,dx = D(b) - D(a),$$

$$\int\limits_a^b P'(x)\,dx = P(b) - P(a).$$

Приклад 2.10. Функція маргінальних витрат виробництва x одиниць продукції за певний час має вигляд $V'(x) = 10 - 0,01x$. Обчислити на скільки зростуть витрати виробництва (у гривнях) при збільшенні випуску продукції від 100 до 200 одиниць.

$\Diamond$ Для обчислення використаємо формулу:

$$\int\limits_a^b V'(x)\,dx = V(b) - V(a)\,.$$

Тоді

$$\int\limits_{100}^{200} V'(x)\,dx = \int\limits_{100}^{200} (10 - 0,01x)\,dx = \big(10x - 0,005x^2\big)\Big|_{100}^{200} = 850\,.$$

Отже, затрати зростуть на 850 грн. $\blacklozenge$

2. Якщо $V(t)$, $D(t)$, $P(t)$ вказані вище функції, які залежать від часу t, тоді $P(t) = D(t) - V(t)$ і загальний прибуток за час T обчислюється за формулою:

$$P(t) = \int\limits_0^T P'(t)\,dt = \int\limits_0^T (D'(t) - V'(t))\,dt\,.$$

Приклад 2.11. Швидкості зміни витрат і доходу агрофірми із початку її діяльності визначаються формулами $V'(t) = 5 + 4\sqrt[3]{t^2}$ і $D'(t) = 25 - \sqrt[3]{t^2}$, де $V(t)$, $D(t)$ вимірюються млн.грн., а t роками. Визначити як довго агрофірма була прибутковою та знайти загальний прибуток, який було одержано за цей час.

$\Diamond$ Із умови $D'(t) = V'(t)$ одержуємо оптимальний час t^* для прибутку агрофірми. Знайдемо t^*:

$$5 + 4\sqrt[3]{t^2} = 25 - \sqrt[3]{t^2};\quad t^* = 8.$$

Отже, агрофірма була прибутковою 8 років. Обчислюємо прибуток фірми за цей час:

$$\int\limits_0^8 (D'(t) - V'(t))\,dt = \int\limits_0^8 (25 - \sqrt[3]{t^2} - 5 - 4\sqrt[3]{t^2})\,dt =$$
$$= \int\limits_0^8 (20 - 5\sqrt[3]{t^2})\,dt = \left(20t - 3\sqrt[3]{t^5}\right)\Big|_0^8 = 160 - 96 = 64.$$

Отже, за 8 років агрофірма отримала прибуток в розмірі 64 млн.грн. ♦

3. Використовуючи теорему 2.3, можна обчислити середнє значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Приклад 2.12. Знайти середнє значення витрат $f(x) = x^2+2x+4$, якщо обсяг продукції x змінюється від 10 до 20 одиниць.

♢ Середнє значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ обчислюємо за формулою:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx.$$

Тоді

$$\frac{1}{10}\int_{10}^{20} \left(x^2 + 2x + 4\right)\, dx = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x\right)\Bigg|_{10}^{20} = 267,3\,.$$

Отже, середнє значення витрат дорівнює $267,3$.

4. **Коефіцієнт нерівномірності розподілу доходу.** Нехай функція $y = f(x)$ описує залежність частки сукупного доходу y, одержаної частиною x усього населення. Графік функції називають **кривою Лоренца** (Рис. 2.11). Якщо при $x = 0,1$ одержуємо $y = 0,4$, то це означає, що 10% населення володіють 40% загального доходу країни. При рівномірному (досконалому) розподілі доходів крива Лоренца вироджується в пряму — бісектрису OA.

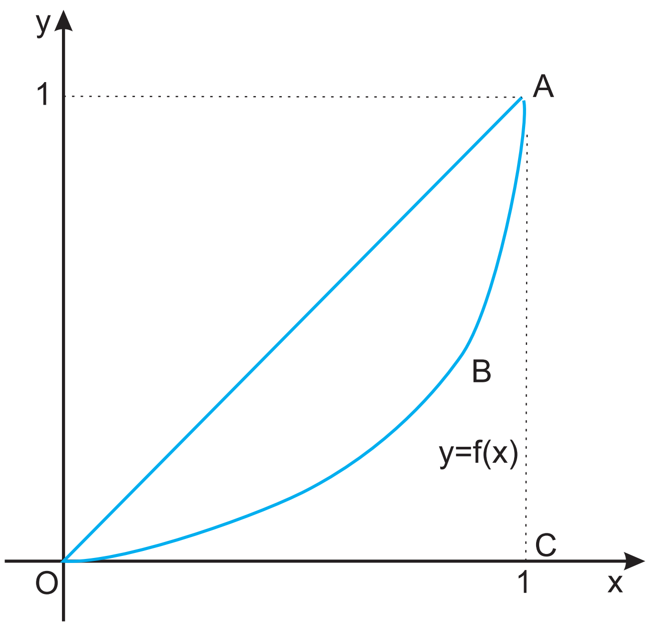

Рис. 2.11

Відношення L площі S_2 між бісектрисою OA та кривою Лоренца до площі S_1 трикутника OAC характеризує ступінь нерівномірності розподілу доходів населення. При цьому L називають **коефіцієнтом нерівномірності розподілу доходів, коефіцієнтом Лоренца** або коефіцієнтом Джіні і обчислюють за формулою:

$$L = \frac{S_2}{S_1} = 2\int_0^1 (x - f(x))\, dx. \tag{2.13}$$

Приклад 2.13. За даними дослідження розподілу доходів певної держави крива Лоренца описується рівнянням $y = 0,8x^2 + 0,2x$. Обчислити коефіцієнт Лоренца.

◊ Для знаходження коефіцієнта Лоренца використаємо формулу (2.13):

$$L = 2\int_0^1 (x - 0,8x^2 - 0,2x)\, dx = 2\int_0^1 (0,8x - 0,8x^2)\, dx =$$
$$= 1,6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 0,27.$$

Отже, коефіцієнт Лоренца рівний 0,27. ♦

Часто коефіцієнт Лоренца використовується для характеристики нерівномірного розподілу прибуткового податку. Для цього слід вважати, що функція y є частиною загального прибуткового податку і пропорційна частині x усього населення держави, тобто $y = kx$.

5. Якщо функція $f(t)$ задає прибуток фірми за час t, а $r\%$ — номінальна облікова щорічна ставка, то реальне значення загального прибутку P за час від $t = 0$ до $t = T$ знаходимо за формулою:

$$P = \int_0^T f(t)e^{-rt/100}\, dt. \tag{2.14}$$

Приклад 2.14. Компанія "SKP" за рахунок вкладень в нове обладнання в розмірі 10 млн.грн планує щорічно на протязі 5 років отримувати прибуток в 1 млн.грн. Номінальна облікова щорічна ставка становить 5%. Знайти реальний прибуток компанії.

$\Diamond$ Для знаходження прибутку компанії використаємо формулу (2.14):

$$P = \int\limits_0^5 1 \cdot e^{-0{,}05t}\, dt - 10 = -20\, e^{-0{,}05t}\Big|_0^5 - 10 = 9,22 \text{ млн.грн.}$$

Отже, реальний прибуток становитиме 9,22 млн.грн. $\blacklozenge$

6. **Зміна капіталу.** Якщо $I(t)$ — швидкість зміни інвестицій, $A(t)$ — капітал підприємства, то $I(t) = A'(t)$. Знаючи швидкість зміни інвестицій, можна знайти зміни капіталу за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$ за формулою:

$$\Delta A = \int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)\, dt. \tag{2.15}$$

Приклад 2.15. Швидкість зміни інвестицій задається функцією

$$I(t) = \frac{4}{(t+1)^2}.$$

Знайти зміни капіталу.

$\Diamond$ Для обчислення використаємо формулу (2.15):

$$\Delta A = \int\limits_1^4 \frac{4}{(t+1)^2}\, dt = -\frac{4}{t+1}\Bigg|_1^4 = -\frac{4}{5} + 2 = 1,2.$$

Отже, зміна капіталу $\Delta A = 1,2$. $\blacklozenge$

7. Нехай $f(t)$ — продуктивність праці у момент часу t, тоді обсяг виробленої за проміжок часу $[t_1; t_2]$ продукції обчислюється за формулою:

$$V = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt. \tag{2.16}$$

Приклад 2.16. Знайти обсяг продукції, виготовленої за проміжок часу $t \in [0; 10]$, якщо продуктивність праці задається функцією $f(t) = \dfrac{2}{(t+1)} + 4$.

$\Diamond$ Згідно формули (2.15) маємо:

$$V = \int\limits_0^{10} \left(\frac{2}{t+1} + 4 \right)\, dt = (2 \ln|t+1| + 4t)\big|_0^{10} = 2 \ln 11 + 40 = 44,8.$$

Отже, обсяг продукції становить $V = 44,8$. ♦

Завдання для самостійного виконання

Задані функції маргінальних витрат виробництва $V'(x)$ і маргінального доходу $D'(x)$ від реалізації x одиниць продукції. Знайти зростання загальних витрат виробництва та доходу при збільшенні випуску продукції від x_1 до x_2 одиниць, а також середні значення витрат і доходу:

$$169.\ V'(x) = 50 - 0,04x,\ x_1 = 100,\ x_2 = 300;$$

$$170.\ V'(x) = 1000 - 0,02x,\ x_1 = 100,\ x_2 = 200;$$

$$171.\ D'(x) = 100 - 0,06x,\ x_1 = 100,\ x_2 = 400;$$

$$172.\ D'(x) = 1000 - 0,08x,\ x_1 = 100,\ x_2 = 600.$$

Для заданого рівняння кривої Лоренца $y = f(x)$ знайти коефіцієнт L нерівномірності розподілу доходів громадян держави (коефіцієнт Лоренца):

$$173.\ y = 0,75x^2 + 0,125x,\ 174.\ y = 0,4x^2 + 0,6x,$$

$$175.\ y = 0,6x^2 + 0,5x,\ 176.\ y = 0,5x^2 + 0,6x.$$

Знайти загальний прибуток фірми $P(t)$ за час t, якщо відомі швидкості зміни з часом витрат $V'(t)$ і прибутку $D'(t)$:

$$177.\ V'(t) = 5 + \sqrt[3]{t^2},\ D'(t) = 25 - \sqrt[3]{t^2},$$

$$178.\ V'(t) = 7 + \sqrt[3]{t},\ D'(t) = 29 - \sqrt[3]{t},$$

$$179.\ V'(t) = 8 + 2\sqrt[3]{t},\ D'(t) = 32 - 2\sqrt[3]{t},$$

$$180.\ V'(t) = 9 + \sqrt[3]{t^2},\ D'(t) = 35 - \sqrt[3]{t^2}.$$

Знайти зміни капіталу ΔA за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$, якщо відома швидкість зміни інвестицій $I(t)$:

$$181.\ I(t) = 1 - e^{-t},\ t_1 = 0,\ t_2 = 10, \quad 182.\ I(t) = te^{-t},\ t_1 = 0,\ t_2 = 10,$$

$$183.\ I(t) = 2 - \frac{1}{t^2 + 1},\ t_1 = 0,\ t_2 = 8, \quad 184.\ I(t) = \frac{3}{t + 2},\ t_1 = 1,\ t_2 = 4.$$

Знайти обсяг продукції V, виробленої за проміжок часу T, якщо продуктивність праці задається функцією $f(t)$:

$$185.\, f(t) = 3t^2 - \frac{1}{8}\,e^t,\ T = 3 \quad 186.\, f(t) = 10 + \frac{t^2}{t^3+1},\ T = 4,$$

$$187.\, f(t) = 2 + \frac{1}{t^2+1},\ T = 10, \quad 188.\, f(t) = 4t + \frac{t}{t^2+1},\ T = 5.$$

Розділ 3

Невласні інтеграли

3.1 Поняття невласного інтегралу

При визначені інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ проміжок інтегрування $[a;b]$ вважається скінченим, а функція $f(x)$ — неперервною. Якщо проміжок інтегрування є нескінченим, напівскінченим або функція має на проміжку інтегрування точки розриву, то поняття визначеного інтегралу втрачає зміст. У цих випадках одержуємо **невласний інтеграл**.

Невласні інтеграли поділяють на два класи:

— невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду);

— невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).

3.2 Невласні інтеграли з нескіченими межами інтегрування

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і є інтегровною на відрізку $[a;b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує скінчена границя

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{3.1}$$

то її називають **невласним інтегралом першого роду** і позначають

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Таким чином

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{3.3}$$

У цьому випадку невласний інтеграл (3.2) називається **збіжним**, а підінтегральна функція є інтегровною на проміжку $[a;+\infty)$.

Якщо ж границя (3.1) не існує або нескінчена, то невласний інтеграл (3.2) називається **розбіжним**, а підінтегральна функція є неінтегровною на проміжку $[a;+\infty)$.

Аналогічно інтегралу (3.3) визначається і невласний інтеграл на проміжку $(-\infty;b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{3.4}$$

Невласний інтеграл з двома нескінченими межами інтегрування визначається рівністю:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{3.5}$$

де c — довільне дійсне число.

Інтеграл у лівій частині формули (3.5) існує і є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа.

Слід зауважити, що інтеграл, визначений формулою (3.5) не залежить від вибору c.

Приклад 3.1. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2+4}\,dx\,.$$

$\lozenge$

$$\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{2} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\bigg|_a^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

Отже, невласний інтеграл є збіжний. $\blacklozenge$

Приклад 3.2. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx.$$

$\lozenge$

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\ln(\ln x)\Big|_e^b =$$
$$= \lim_{b\to+\infty}(\ln(\ln b) - \ln(\ln e)) = +\infty.$$

Отже, невласний інтеграл є розбіжний. $\blacklozenge$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

189. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^6}\,dx$; 190. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{16x^4+1}\,dx$; 191. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}\,dx$;

192. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$; 193. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}2x}{4x^2+1}\,dx$; 194. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{7}{\sqrt{x^2-4x}}\,dx$;

195. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$; 196. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2-2x+10}\,dx$; 197. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-3x}\,dx$;

198. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x-1)}\,dx$; 199. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x\,dx$; 200. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}\,dx$.

3.3 Невласні інтеграли від необмежених функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; b)$. Точку $x = b$ назвемо особливою точкою функції $f(x)$, якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to b - 0$. Нехай функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a; b-\epsilon]$ при довільному $\epsilon > 0$, такому, що $b - \epsilon > a$. Тоді, якщо існує скінчена границя

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx, \tag{3.6}$$

то її називають **невласним інтегралом другого роду** і позначають

$$\int_a^b f(x)\, dx. \tag{3.7}$$

Таким чином

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx. \tag{3.8}$$

У цьому випадку невласний інтеграл (3.7) існує і називається **збіжним**.

Якщо ж границя (3.6) не існує або нескінчена, то невласний інтеграл (3.7) називається **розбіжним**.

Якщо $x = a$ — особлива точка функції $f(x)$, то невласний інтеграл визначається аналогічним чином:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\, dx.$$

Якщо функція $f(x)$ необмежена в околі внутрішньої точки $c \in (a; b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)\, dx$ та $\int_c^b f(x)\, dx$ одержуємо:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\, dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^{b} f(x)\, dx. \tag{3.9}$$

Якщо обидві границі в правій частині формули (3.9) існують і скінчені, то невласний інтеграл є збіжним, інакше — розбіжним.

Приклад 3.3. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx.$$

◊

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\ln x}\bigg|_{1+\epsilon}^2 =$$
$$-\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(1+\epsilon)}\right) = +\infty.$$

Отже, невласний інтеграл є розбіжний. ♦

Приклад 3.4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx.$$

◊

$$\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\epsilon} \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx = -\lim_{\epsilon\to 0} e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-1}^{0-\epsilon} = -\lim_{\epsilon\to 0}\left(e^{\frac{1}{-\epsilon}} - e^{-1}\right) = \frac{1}{e}.$$

Отже, невласний інтеграл є збіжний. ♦

Приклад 3.5. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx.$$

◊

$$\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx =$$
$$= 3\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt[3]{x-1}\Big|_0^{1-\epsilon} + 3\lim_{\delta\to 0}\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\delta}^2 =$$
$$= 3\lim_{\epsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{-\epsilon} - (-1)\right) + 3\lim_{\delta\to 0}\left(1 - \sqrt[3]{\delta}\right) = 6.$$

Отже, невласний інтеграл є збіжний. ♦

Завдання для самостійного виконання

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$201.\ \int_0^{1/3}\frac{e^3+\frac{1}{x}}{x^2}\,dx;\quad 202.\ \int_{1/2}^{1}\frac{1}{(1-x)\ln^2(1-x)}\,dx;\quad 203.\ \int_1^3\frac{1}{\sqrt{(x^2-6x+9)}}\,dx;$$

$$204.\ \int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{2-4x}}\,dx;\quad 205.\ \int_1^3\frac{1}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}\,dx;\quad 206.\ \int_0^1\frac{x}{1-x^4}\,dx;$$

$$207.\ \int_0^{\pi/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}\,dx;\quad 208.\ \int_0^{\pi/2}\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx;\quad 209.\ \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}\,dx;$$

$$210.\ \int_0^2\frac{x^4}{\sqrt[3]{1-x^5}}\,dx;\quad 211.\ \int_0^1\frac{1}{\sqrt[9]{1-2x}}\,dx;\quad 212.\ \int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt[3]{1-4x}}\,dx.$$

Бібліоґрафія

[1] *Алілуйко А.М.* Вища математика у прикладах і задачах для економістів: навч. посіб./ Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Новосад І.Я., Шинкарик М.І. — Тернопіль: ТНЕУ, 2017. — 148 с.

[2] *Барковсъкий В.В.* Вища математика для економістів: Навчальний посібник / В.В.Барковський, Н.В.Барковська – К:Центр учбової літератури — 2019 — 448 с

[3] *Бугір М.К.* Математика для економістів: Посібник. — Київ: Видавничий центр "Академія" , 2003. — 520 с.

[4] *Васильченко І.П.* Вища математика для економістів: Підручник. — 2-ге вид.,випр. — Київ: Знання, 2004. — 454 с.

[5] Вища математика: збірник задач: навч. посібник для студентів техн. спеціальностей ВУЗів / За ред. Дубовика В.П., Юрика І.І. — К: АСК, 2001. — 480 с.

[6] Вища математика: Зб. задач: У 2–х ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. / Х.І.Гаврильченко та ін.; — 2–ге вид., стереотип. — Київ: Техніка, 2004. — 279 с.

[7] Вища математика : Навч. посібн. у двох частинах. Реком. МОНУ для студ. ВНЗ / Ф. М. Лиман, В. Ф. Власенко, С. В. Петренко, О. О. Одінцова. — Суми: Університетська книга, 2006. — 614 с.

[8] *Дубовик В.П.,Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посібник. — Київ: А.С.К., 2001. — 648 с.

[9] *Дюженкова Л.І.* Вища математика. Приклади і задачі : Посібник / Л.І.Дюженкова О.Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. — Київ: Академія, 2002. — 624 с.

[10] *Зайцев Є.П.* Вища математика: Навчальний посібник — К:Алерта — 2018. — 608 с.

[11] *Лубенська Т.В., Чупаха Л.Д.* Вища математика в таблицях: Довідник. — К: МАУП, 1999. — 88 с.

[12] Математика для вступників до вузів. Навч. посбник / Упоряд.: Бондаренко М.Ф., Дікарєв В.А., Мельников О.Ф., Семенець В.В., Шкляров Л.Й. — Харків: "Компанія СМІТ" , 2002. — 1120 с.

[13] *Михайленко В.М., Федоренко Н.Д.* Математичний аналіз для економістів: Навчальний посібник.— Київ: Українсько–фінський інститут менеджменту і бізнесу, 1999. — 224 с.

[14] *Овчиников П.П. та ін.* Вища математика: Підручник. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення. — 3-тє вид. випр. — Київ: Техніка, 2003. — 600 с.

[15] *Пастушенко С. М.* Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування вправ : Навчальний посібник для студентів ВНЗ / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. —– 2–е видання. — Київ : Діал, 2003. — 160 с.

[16] *Соколенко О. І.* Вища математика : Підручник / О. І. Соколенко. — Київ: Академія, 2003. — 432 с.

Предметний покажчик

Зміст

МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26
тел./факс +380-3131-21109
Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua
E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua