Міністерство освіти і науки України

Мукачівський державний університет

Кафедра інженерії, технологій та професійної освіти

СЕРІЯ «ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ»

«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

Навчально-методичний посібник

для здобувачів першого рівня вищої освіти денної та заочної форми навчання спеціальностей 051. Економіка, 071. Облік і оподаткування, 072. Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок, 073. Менеджмент, 075. Маркетинг, 015. Професійна освіта (економіка)

Мукачево

МДУ — 2025

Теорія ймовірності: Навчально-методичний посібник для здобувачів першого рівня вищої освіти денної та заочної форми навчання спеціальностей 051. Економіка, 071. Облік і оподаткування, 072. Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок, 073. Менеджмент, 075. Маркетинг, 015. Професійна освіта (економіка)/ Укладач: Питьовка О.Ю. — Мукачево: МДУ, 2025. — 75 с — (Серія «Основи вищої математики»)

Обговорено і схвалено на засіданні кафедри інженерії, технологій та професійної освіти
протокол № 6 від 28 січня 2025 року

Укладач:
О.Ю.Питьовка, кандидат фізико-математичних наук, доцент, Мукачівський державний університет
Рецензент:
М.І.Стегней, доктор економічних наук, професор, Мукачівський державний університет

Навчально–методичний посібник присвячений розділу «Теорія ймовірностей», який вивчається в курсі «Вища математика». У посібнику розглядається теоретичний матеріал по кожній темі, пропонуються детальні алгоритми розв'язання практичних задач, а також наведені питання для самоконтролю. Підібрано достатню кількість завдань для аудиторної та самостійної роботи. Розміщено необхідний довідковий матеріал.
Матеріал відповідає програмі курсу «Вища математика» та може бути використаний для студентів усіх спеціальностей.

Вступ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ — це самостійна математична наука, яка вивчає випадкові явища і процеси. Вона є основою викладання багатьох економічних, соціологічних та спеціальних дисциплін. Тому теорія ймовірностей є складою навчальної дисципліни «Вища математика», яка викладається для здобувачів першого освітнього рівня вищої освіти денної та заочної форми навчання спеціальностей 051. Економіка, 072. Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок, 073.Менеджмент, 075.Маркетинг, 015. Професійна освіта (економіка).

Мета цього навчально-методичного посібника — ознайомити студентів економічних спеціальностей, а також зацікавлених осіб, з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей та допомогти їм набути навичок застосування теоретичного матеріалу для вирішення практичних задач.

Посібник складається із двох розділів, кожен із яких розподілений за темами. До кожної теми коротко і доступно викладений теоретичний матеріал, передбачений програмою, запропоновано зразки розв'язування задач. Для закріплення вивченого матеріалу здобувачам пропонується дати відповіді на теоретичні питання та розв'язати ряд задач. Включені у посібник завдання для самостійного виконання можуть бути використані як індивідуальні домашні завдання, розрахункові аудиторні та при підготовці здобувачів до модульної контрольної роботи та підсумкового контролю. Розв'язування задач — це обов'язкова складова при вивченні дисципліни. Задачі теорії ймовірностей часто мають нематематичну постановку,тому для їх розв'язання потрібно використовувати теоретико-ймовірнісні підходи. І тільки закріплення отриманих знань за допомогою виконання практичних завдань навчить будувати коректні математичні моделі для економічних випадкових процесів.

Для розв'язання задач з теорії ймовірностей необхідно користуватися таблицями деяких спеціальних функцій, які, для зручності, наведені в додатку.

Навчально-методичний посібник рекомендується використовувати здобувачам як базовий при вивченні відповідних змістових модулів, але бажано користуватися й іншими джерелами. Це дозволить поглибити теоретичні знання, удосконалити навички розв'язання практичних задач та розширить уявлення про ймовірнісні підходи при вирішенні прикладних задач.

Розділ 1

Основні поняття та теореми теорії ймовірності. Повторні незалежні випробування

1.1 Основні формули комбінаторики

Комбінаторика — самостійний розділ математики, що вивчає різні способи поєднання елементів.

Ознайомимося із основними поняття та формулами комбінаторики.

Означення 1.1 *Різні групи, складені з будь-яких елементів, що відрізняються елементами або порядком їх розташування, називаються **сполуками** або **комбінаціями** цих елементів.*

Комбінації бувають наступних видів:
1) перестановка;
2) розміщення;
3)сполучення.

Означення 1.2 ***Перестановками n елементів*** *називають комбінації з цих n елементів, які відрізняються між собою порядком розташування елементів.*

Кількість перестановок з n елементів знаходимо за формулою:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Позначення $n!$ читається "n факторіал ".

Зауваження 1.1 $0! = 1$.

Означення 1.3 ***Розміщеннями з n елементів по k елементів*** *називаються такі комбінації по k елементів, які відрізняються хоча б одним елементом або порядком елементів.*

Кількість розміщень з n елементів по k елементів обчислюємо за формулою:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Означення 1.4 ***Сполученнями із n елементів по k елементів*** *називають різноманітні комбінації по k елементів, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом.*

Їх число знаходимо за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Між кількістю розміщень, перестановок та сполучень існує зв'язок:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n}$$

При розв'язуванні задач доцільно використовувати такі **властивості сполучень**:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$,
2. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$,
3. $C_n^n = 1$,
4. $C_n^0 = 1$,
5. $C_n^1 = n$.

Приклад 1.1 *Скільки п'ятизначних чисел можна записати, використовуючи п'ять різних цифр, крім нуля?*

◊ Комбінації, що утворюють з п'яти різних цифр п'ятизначні числа, можуть відрізнятися лише порядком цифр, тому такі сполуки будуть перестановками з п'яти елементів. Для розрахунку їх кількості скористаємося формулою:

$$P_n = n!, \ P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Отже, із п'яти різних цифр можна скласти 120 п'ятизначних чисел. ♦

Приклад 1.2 *Скільки трьохзначних чисел можна скласти із множини цифр 1;2;3;4;5?*

◊ Оскільки трьохзначні числа, складені із 5 заданих цифр, – це є комбінації, які відрізняються між собою хоча б одним елементом або складені із тих самих елементів, розташованих у різному порядку, то нам потрібно підрахувати число розміщень із 5 елементів по 3 елементи. Для цього скористаємося формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Тоді

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Отже, із п'яти заданих цифр можна скласти 60 різних трьохзначних чисел. ♦

Приклад 1.3 *Академічна група складається із 20 студентів. Скількома способами можна вибрати комісію у складі трьох осіб?*

◊ До складу комісії повинні входити три студенти. Комісії вважаються різними, якщо відрізняються хоча б одним студентом. Тому розглядувані комбінації є сполученнями. Використаємо формулу:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

і проведемо обчислення:

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!3!} = \frac{20!}{17!3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140.$$

Отже, із 20 студентів можна створити різні комісії по 3-ох студентів 1140 способами. ♦

Питання для самоперевірки

1. Що є предметом комбінаторики?
2. Які комбінації називають перестановками? Як позначають та обчислюють кількість перестановок?
3. Які комбінації називають розміщеннями? Як позначають та обчислюють кількість розміщень?
4. Які комбінації називають сполученнями? Як позначають та обчислюють кількість сполучень?
5. Які властивості сполучень доцільно використовувати при обчисленні?

Завдання для самостійного виконання

1. Скільки різних чотиризначних автомобільних номерів можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

2. Скількома способами можна визначити комісію у складі чотирьох чоловік із 17 спеціалістів?

3. Скількома способами можна розсадити сім'ю із 6 осіб за шестимісним столом?

4. Електричка має вісім вагонів. Скільки існує способів розміщення чотирьох пасажирів, якщо в кожному вагоні повинно бути не більше одного пасажира?

5. З чотирьох першокурсників, шести другокурсників та п'яти третьокурсників треба обрати трьох студентів для участі в конференції. Скількома способами це можна зробити, якщо серед обраних повинні бути студенти з різних курсів?

6. У корзині міститься 10 білих і 8 чорних кульок. Скількома способами можна взяти 5 кульок так, щоб серед них було: а) 5 чорних; б) 2 білі і 3 чорні кульки?

7. У партії з 20 виробів міститься 12 стандартних. Навмання вибирають 6 виробів. Скількома способами можна зробити вибір так, щоб було 4 стандартні і 2 нестандартні вироби?

8. Із 48 делегатів конференції треба обрати президію з 5 осіб і делегацію із 3 осіб. Скількома способами можна здійснити вибір, якщо а) члени президії можуть входити до складу делегації; б) члени президії не повинні входити до складу делегації.

9. Студенти другого курсу згідно навчального плану вивчають 9 дисциплін. На один день можна планувати заняття із чотирьох дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на один день?

10. До профкому вибрано 7 осіб. З них потрібно обрати голову профкому та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

1.2 Випробування та події. Операції над подіями

Вивчення кожного явища в порядку спостереження або проведення досліду пов'язано з виконанням деякого комплексу умов (випробуванням). Результат або наслідок випробування називається *подією.* Події позначаються великими латинськими літерами

$$A, B, C, ..; A_1, A_2, A_3, ...; B_1, B_2, B_3, ...$$

Означення 1.5 ***Елементарною подією*** *називається найпростіший результат випробування.*

Елементарні події розглядаються як нерозкладні та взаємовиключні події. Всі елементарні події, які відбуваються в результаті випробування, утворюють простір елементарних подій.

Події поділяються на випадкові, достовірні та неможливі.

Означення 1.6 *Подія A називається* ***випадковою****, якщо вона може при випробуванні або відбутися, або не відбутися.*

Означення 1.7 *Подія A називається* ***достовірною****, якщо вона при випробуванні відбудеться обов'язково.*

Достовірна подія позначається символом Ω ("омега")

Означення 1.8 *Подія A називається* ***неможливою****, якщо вона при випробуванні відбутися не може.*

Неможлива подія позначається символом $\varnothing$ (порожня множина)

Наприклад, якщо в ящику розміщені геометричні фігури — куля, піраміда і призма, то подія $A-${з ящика дістають кулю або піраміду, або призму} є достовірною подією. Подія $B-${з ящика дістають конус} є неможливою і подія $C-${з ящика дістають кулю} є випадковою подією.

Над подіями можна виконувати основні математичні операції, що дозволяють описати складніші випадкові процеси. Визначення цих операцій можна подати мовою операцій над множинами.

Означення 1.9 ***Сумою (об'єднанням)*** *подій A і B називають подію $A+B$ $(A\cup B)$, яка відбудеться тоді, коли відбудеться принаймні одна із подій A чи B (відбудеться або подія A, або подія B, або обидві події A та B). (Рис.1.1)*

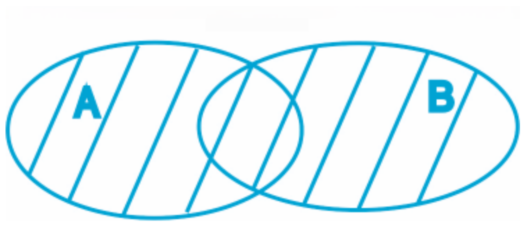

Рис. 1.1: діаграма Венна-Ейлера, на якій показана сума подій $A+B$ $(A\cup B)$

Приклад 1.4 *Якщо при пострілі в ціль подія A-{попадання при першому пострілі}, подія B-{попадання при другому пострілі}, то в чому полягає подія $C=A+B$?*

$\Diamond$ Подія $C=A+B$ полягає у тому, що ціль буде уражена і байдуже при якому пострілі — при першому, при другому чи при обох пострілах. $\blacklozenge$

Означення 1.10 ***Добутком (перетином)*** *подій A і B називають подію $A \cdot B$ ($A \cap B$), яка відбудеться тоді, коли відбудуться обидві події A та B. (Рис.1.2)*

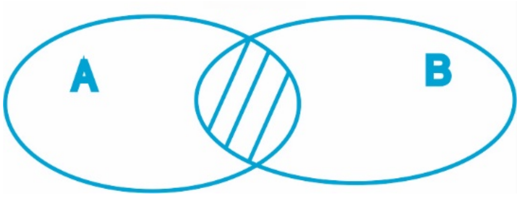

Рис. 1.2: діаграма Венна-Ейлера, на якій показано добуток подій $A \cdot B$ ($A \cap B$)

Приклад 1.5 *Якщо подія A-{перший стрілець влучив у ціль}, подія B-{другий стрілець влучив у ціль }, то в чому полягає подія $C = A \cdot B$?*

$\Diamond$ Подія $C = A \cdot B$ полягає в тому, що обидва стрільці влучили в ціль. $\blacklozenge$

Означення 1.11 ***Різницею*** *подій A і B називають подію $A \setminus B$, яка відбудеться тоді, коли відбудеться подія A і не відбудеться подія B. (Рис.1.3)*

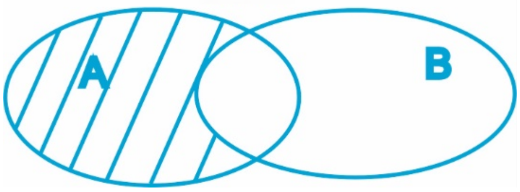

Рис. 1.3: діаграма Венна-Ейлера, на якій показана різниця подій $A \setminus B$

Приклад 1.6 *Нехай подія A-{на табло з'явилися цифри 1;2;3;4;5}, подія B-{на табло з'явилися цифри 2;3;5;6;7}, то в чому полягає подія $C = A \setminus B$? $D = B \setminus A$?*

$\Diamond$ Подія $C = A \setminus B$ полягає в тому, що на табло з'явилися цифри 1;4. Подія $D = B \setminus A$ полягає в тому, що на табло з'явилися цифри 6;7. $\blacklozenge$

Означення 1.12 ***Протилежною*** *до події A називається така подія $\overline{A}$, яка відбудеться тоді, коли не відбудеться подія A.*

Питання для самоперевірки

1. Що таке випробування, подія? Наведіть приклади випробувань та відповідних подій.
2. Які події називаються елементарними? Наведіть приклад елементарних подій.
3. Які події називаються випадковими? Наведіть приклад випадкових подій.
4. Які події називаються вірогідними? Наведіть приклад вірогідних подій.

5. Які події називають неможливими? Наведіть приклад неможливих подій.

6. Які операції можна виконувати над подіями? У чому полягає кожна із них? Наведіть приклади складених подій.

7. Яка подія називається протилежною? Наведіть приклад події та протилежної до неї.

Завдання для самостійного виконання

1. Два стрільці по одному разу стріляють по мішені. Подія А-{другий стрілець влучив у мішень}, В-{ одне влучення в мішень}. У чому полягають наступні події: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cdot B$, $A \cdot \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$, $A + B$.

2. Підкидують дві монети. Введемо наступні події:
   А-{поява герба на першій монеті},
   В-{поява цифри на першій монеті},
   С-{поява герба на другій монеті},
   D-{поява цифри на другій монеті},
   Е-{поява хоча б одного герба},
   F-{поява хоча б однієї цифри},
   Н-{поява двох цифр},
   К-{поява двох гербів}.
   Яким подіям із цього списку дорівнюють наступні події:
   1) $A + C$, 2) $A \cdot C$, 3) $B + D$, 4) $B \cdot D$.

3. У полі спостереження мікроскопу знаходяться чотири клітини, які можуть як поділитися за час спостереження, так і не поділитися. Введемо події:
   А-{поділилася рівно одна клітина},
   В-{поділилася хоча б одна клітина},
   С-{поділилися не менше двох клітин},
   D-{поділилися рівно дві клітини},
   Е-{поділилися рівно три клітини},
   F-{поділилися всі чотири клітини}.
   Вкажіть, у чому полягають події:
   1) $A + B$, 2)$B + C$, 3) $D + E + F$.

4. По мішені проводять два постріли. Введемо події:
   А-{попадання при першому пострілі},
   В-{попадання при другому пострілі}.
   Вкажіть, у чому полягають події:
   1) $A + \overline{B}$, 2)$\overline{A} + B$, 3) $\overline{A} + \overline{B}$, 4) $\overline{A + B}$.

5. Дано дві випадкові події А і В. Виразити через дані події наступні: С-{подія А не відбудеться},

D-{відбудуться обидві події A і B},
E-{відбудеться хоча б одна з двох подій або A, або B},
F-{подія A відбудеться і подія B не відбудеться},
H-{обидві події A і B не відбудуться}.

6. Кожний із двох учнів вибирає один із способів, як дістатися до школи: велосипедом, автобусом, пішки. Позначимо випадкові події:
   A_1 -{перший учень поїде до школи на велосипеді},
   B_1 -{перший учень поїде до школи на автобусі},
   C_1 -{перший учень піде у школи пішки},
   A_2 -{другий учень поїде до школи на велосипеді},
   B_2 -{другий учень поїде до школи на автобусі},
   C_2 -{другий учень піде у школи пішки}.
   Виразити через позначені події наступні випадкові події:
   1) D-{перший учень дістався до школи не автобусом},
   2) E-{другий учень дістався до школи або велосипедом, або пішки},
   3) F-{обидва учні дісталися до школи пішки},
   4) G-{перший учень дістанеться до школи не велосипедом, а другий не піде пішки},
   5) H-{або перший, або другий із учнів дістанеться до школи автобусом},

7. Нехай A, B, C — деякі випадкові події.Запишіть вираз для наступних подій:
   1) настала тільки подія A,
   2) настали події A і B, але не настала подія C,
   3) настала принаймні одна з цих подій,
   4) не настала жодна з цих подій,
   5) настали всі три події.

8. Вкажіть події, протилежні до подій:
   A-{випали два герба при підкиданні двох монет},
   B-{три попадання при трьох пострілах},
   C-{хоча б одне попадання при чотирьох пострілах},
   D-{не більше двох попадань при чотирьох пострілах},
   E-{виграш одного гравця при грі в шахи}.

1.3 Ймовірності подій

Для порівняння випадкових подій за ступенем їх можливості необхідно пов'язати кожну подію з певним числом, яке буде тим більшим, чим більш імовірною є подія. Таке число називають *ймовірністю події.*

Є декілька означень ймовірності події. Познайомимося із ними.

Означення 1.13 ***Ймовірністю випадкової події A*** *називається число, яке дорівнює відношенню числа спрятливих для події A наслідків випробування до загального числа всіх рівноможливих елементарних наслідків.*

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де m — число елементарних наслідків, що сприяють події A,
n — число усіх рівноможливих наслідків випробування.

Сформульоване означення ймовірності називається *класичним.* Його ввів П.Лаплас (1749–1827).

Властивості ймовірностей подій:

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$,
2. $P(\Omega) = 1$ — ймовірність вірогідної події рівна 1,
3. $P(\varnothing) = 0$ — ймовірність неможливої події рівна 0.

Приклад 1.7 *У корзині є 8 однакових за розміром куль: 3 білі, 4 сині і 1 червона. Навмання із корзини беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що вибрана куля біла.*

◊ Нехай подія A — {навмання взята біла куля} і потрібно знайти $P(A)$. Із корзини можна вибрати будь-яку кулю із 8, тому всіх наслідків 8 (n=8). Для події A сприятливими є тільки 3 білі кулі (m=3). Згідно класичного означення ймовірності одержуємо:

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

Отже, ймовірність того,що вибрана куля біла дорівнює $\frac{3}{8}$ ♦

Приклад 1.8 *На кожній із п'яти однакових карток записано одну літеру: В,Д,Е,І,Р. Яка ймовірнсть того, що*
а) три, навмання взяті картки, утворюють слово "РІД";
б) картки, навмання розкладені в рядок, утворюють слово "ДВЕРІ"?

◊ а) Нехай подія A — {вибравши картки, отримали слово "РІД"} і потрібно обчислити $P(A)$. Розкласти 3 картки у такій послідовності, щоб отримати слово "РІД" можна тільки одним способом (m=1). Вибрати 3 картки із 5 можна A_5^3 способами ($n = A_5^3$). Тоді згідно класичного означення ймовірності одержуємо:

$$P(A) = \frac{1}{A_5^3} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{60}.$$

б) Розглянемо подію В — {вибравши картки, отримали слово "ДВЕРІ"} і потрібно обчислити $P(B)$. Розкласти 5 карток у такій послідовності, щоб отримати слово "ДВЕРІ"можна тільки одним способом (m=1). Оскільки для слова потрібно вибрати всі 5 карток, то це можна зробити P_5 способами ($n = P_5$). Тоді за класичним означенням ймовірності одержуємо:

$$P(B) = \frac{1}{P_5} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}.$$

Отже, $P(B) = \frac{1}{120}$. ⧫

Приклад 1.9 *У коробці знаходиться 10 куль — 2 білі, 3 сині і 5 червоних. Навмання вибирають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що:*
а) всі кулі різнокольорові; б) всі кулі червоні.

◊ Введемо подію А — {три вибрані кулі різнокольорові}. Кількість всіх можливих результатів випробування дорівнює

$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Число сприятливих для події А результатів випробувань дорівнює:

$$m = C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_5^1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Тоді за класичним означенням ймовірності:

$$P(A) = \frac{30}{120} = 0,25.$$

Отже, ймовірність того, що всі три кулі виявляться різнокольоровими дорівнює 0,25.

б) Введемо подію В — {всі кулі червоні} і знайдемо її ймовірність. Загальне число всіх результатів випробування обчислено у попередньому випадку (n=120). Знаходимо число сприятливих для події В наслідків випробування:

$$m = C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Тоді, за класичним означенням ймовірності:

$$P(B) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}.$$

Отже, ймовірність того, що всі три кулі червоні, дорівнює $\frac{1}{12}$. ⧫

Зауваження 1.2 *Класичне означення ймовірності має місце тоді, коли елементарні наслідки випробування є рівноможливими і їх число є скінченим.*
Якщо множина елементарних наслідків нескінчена або наслідки не є рівноможливими, то користуватися цим означенням не можна.

Якщо множина всіх елементарних наслідків нескінчена і, як зазвичай, займає деяку область G, а події A сприяє лише частина $g \in G$, то обчислення ймовірності події A виконується згідно ***геометричного означення ймовірності****.*

Означення 1.14 *Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню міри g до міри G:*

$$P(A) = \frac{m(g)}{m(G)}.$$

Зауваження 1.3 *Якщо область G — проміжок, поверхня або просторове тіло, g — частина G, тоді мірою G та g буде довжина, площа та об'єм відповідно. Якщо G та g проміжки часу, то їх мірою буде час.*

Приклад 1.10 *У круг радіуса R навмання кинута точка. Знайти ймовірність того, що точка виявиться всередині вписаного в круг квадрата. Припускається, що ймовірність попадання точки в частину круга пропорційна площі цієї частини.*

$\Diamond$ Розглянемо подію А — {навмання кинута точка виявиться всередині вписаного в круг квадрата}.

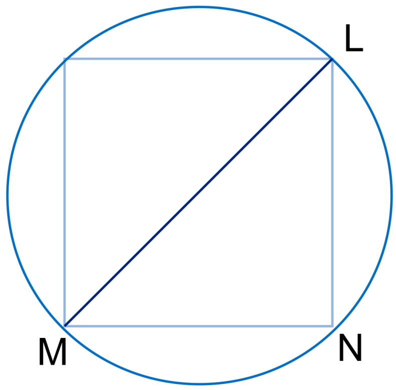

Рис. 1.4:

Для обчислення ймовірності події А скористаємося геометричним означенням ймовірності:

$$P(A) = \frac{\text{площа квадрата}}{\text{площа круга}}$$

Оскільки радіус круга відомий R, то $S_{\text{кр}} = \pi R^2$. Площа квадрата $S_{\text{кв}} = a^2$, де a — сторона квадрата, вписаного в круг.

Виразимо сторону квадрата a через R: із ΔMLN за теоремою Піфагора одержуємо: $2a^2 = 4R^2$, $a^2 = 2R^2$. Тоді $S_{\text{кв}} = 2R^2$ і

$$P(A) = \frac{S_{\text{кв}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} = 0,6.$$

Отже, ймовірність попадання точки всередину вписаного в круг квадрата дорівнює 0,6. $\blacklozenge$

Означення 1.15 ***Відносною частотою події A*** *називають відношення числа випробувань, у яких подія A з'явилася, до числа фактично виконаних випробувань:*

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

де m — кількість випробувань, у яких подія A з'явилася,
n — кількість усіх випробувань.

Зауваження 1.4 *Ймовірність події $P(A)$ обчислюється до випробування, а відносна частота $W(A)$ обчислюється після випробування.*

Відносна частота має властивість стійкості: при великій кількості випробувань відносна частота змінюється дуже мало, коливаючись в межах деякого числа — ймовірності появи цієї події, тобто

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} W(A).$$

Означення 1.16 ***Статистична ймовірність*** *— це відносна частота або число, близьке до неї.*

Питання для самоперевірки

1. Як формулюється класичне означення ймовірності?
2. Які властивості ймовірності можете вказати?
3. За яких умов використовується класичне означення ймовірності?
4. Як формулюється геометричне означення ймовірності?
5. Що називаємо відносною частотою події?
6. Як визначається статистична ймовірність?

Завдання для самостійного виконання

1. Серед 25 студентів групи, в якій є 10 дівчат, розігрують 5 квитків на концерт. Визначити ймовірність того, що білети виграють дві дівчини.
2. В ящику знаходиться 15 білих і 10 чорних куль однакового розміру. Навмання з ящика виймають 5 куль. Знайти ймовірність того, що 3 кулі виявляться білими.
3. Кинуто два ігрових кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях,які випали, дорівнює сім.
4. Куб, усі грані якого пофарбовані, розпиляли на 27 кубиків однакового розміру, які потім перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кубик матиме зафарбованих граней а) одну; б) дві; в) чотири; г)не матиме жодної.

5. Президент фірми хоче створити команду для розробки моделі товару у складі трьох інженерів і двох спеціалістів з дослідження ринку. Яка ймовірність того, що команда такого складу буде створена, якщо з групи 10 інженерів і 5 спеціалістів з проблем ринку вибирати навмання п‘ять осіб?

6. На складі зберігають 500 акумуляторів. Відомо, що після року зберігання 20 із них будуть непридатними. Знайти ймовірність того, що навмання взятий після року зберігання акумулятор виявиться справним, якщо відомо, що після 6 місяців зберігання було вилучено 5 несправних акумуляторів.

7. Студент забув останні три цифри потрібного номеру телефону, але він пам'ятав, що всі три цифри різні і набирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані цифри вірні.

8. Внаслідок буревію стався обрив проводу на ділянці між двома залізничиними станціями, відстань між якими 20 км. Знайти ймовірність того, що обрив стався між кілометровими стовпчиками з позначками 10-й та 15-й кілометр.

9. У круг радіуса R навмання кинута точка. Знайти ймовірність того, що точка виявиться всередині вписаного в круг правильного трикутника. Припускається, що ймовірність попадання точки в частину круга пропорційна площі цієї частини.

10. З 28 перевірених контрольних робіт сім оцінено на відмінно. Знайти відносну частоту робіт з невідмінними оцінками.

11. Проведено 20 пострілів і зареєстровано 18 влучень. Знайти відносну частоту влучень у мішень.

12. При стрільбі з гвинтівки по мішені відносна частота влучення дорівнює 0,95. Знайти число влучень, якщо було здійснено 20 пострілів.

1.4 Теореми додавання ймовірностей

У попередніх темах введено означення суми подій $A + B$. Тоді постає питання про знаходження ймовірності цієї складеної події, тобто $P(A + B)$. Але перш ніж дати відповідь на це питання, сформулюємо ряд означень.

Означення 1.17 *Події A та B називаються* ***несумісними*** *, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в одному і тому ж випробуванні.*

Наприклад 1.1 *Серед однорідних деталей у ящику є стандартні та нестандартні. Навмання із ящика беруть одну деталь.*
Розглянемо події A — { взята деталь стандартна} та B — { взята деталь нестандартна}, які є несумісними. Адже, якщо взята одна деталь, то вона не може одночасно бути стандартною і нестандартною.

Означення 1.18 *Події A та B називаються* ***сумісними*** *, якщо поява однієї з них не виключає появу іншої в одному і тому ж випробуванні.*

Наприклад 1.2 *Два стрільці стріляють у мішень. Події A — { перший стрілець влучить у мішень} та B — { другий стрілець влучить у мішень} є сумісними.*

Теорема 1.1 *Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Наслідок 1.1 *Ймовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Зокрема для трьох подій:

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Приклад 1.11 *У бібліотеці на полиці розміщено 20 книг, серед яких 5 підручників з макроекономіки. Бібліотекар навмання бере 3 книги. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б два підручники з макроекономіки.*

$\Diamond$ Введемо події:
A — {серед вибраних книг хоча б два підручники з макроекономіки},
B — {два підручники з макроекономіки},
C — {три підручники з макроекономіки}.

Подія A полягає в тому, що відбудеться або подія B, або подія C, які є несумісними, тобто $A = B + C$. Згідно теореми додавання ймовірностей несумісних подій:

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C).$$

Користуючись класичним означенням ймовірності, обчислимо ймовірність кожної з розглядуваних подій:

$$P(B) = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{15!}{14! \cdot 1!}}{\frac{20!}{17! \cdot 3!}} = \frac{\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 15}{\frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 15}{3 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{5}{19 \cdot 2} = \frac{5}{38} = 0,13,$$

$$P(C) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{\frac{5!}{2! \cdot 3!}}{\frac{20!}{17! \cdot 3!}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{18 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{1}{94} = 0,01.$$

Тоді $P(A) = 0,13 + 0,01 = 0,14$.

Отже, $P(A) = 0,14$ ⧫

Теорема 1.2 *Ймовірність появи однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Приклад 1.12 *Проводиться спостереження за 2000 споживачів для того, щоб визначити купівельну спроможність стосовно двох типів холодильників. Виявилося, що протягом попереднього літа 500 осіб придбало марку А, 350 – марку В і 125 – обидві марки А і В. Якщо людину вибирають навмання з цієї групи, то яка ймовірність того, що буде придбано холодильник хоча б однієї марки?*

◊ Розглянемо подію С — { навмання вибраний із групи споживач придбав холодильник хоча б однієї марки}. Тоді для обчислення ймовірності даної події скористаємося теоремою додавання ймовірностей сумісних подій та класичним означенням ймовірності:

$$P(C) = \frac{500}{2000} + \frac{350}{2000} - \frac{125}{2000} = \frac{725}{2000} = 0,36.$$

Отже, $P(C) = 0,36$. ⧫

Означення 1.19 *Події $B_1,\ B_2, ...B_n$ утворюють **повну групу подій**, якщо вони попарно несумісні і при випробуванні одна з них є достовірною подією.*

Наприклад 1.3 *При підкиданні кубика повну групу утворюють події: B_1 — {одно очко}, B_2 — {два очка}, B_3 — {три очка}, B_4 — {чотири очка}, B_5 — {п'ять очок}, B_6 — {шість очок}. Вони несумісні і обов'язково одна з них відбудеться в результаті випробування.*

Теорема 1.3 *Сума ймовірностей повної групи подій дорівнює одиниці*

$$P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_n) = 1.$$

Означення 1.20 *Дві події, що утворюють повну групу, називаються **протилежними**.*

Якщо A — подія, то $\overline{A}$ — протилежна подія.

Тоді із Теореми 1.3 випливає, що $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, а звідси $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Зауваження 1.5 *Для спрощення розрахунків, введемо позначення: $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = q$ і тоді $p + q = 1$.*

Зауваження 1.6 *При розв'язуванні задач на знаходження ймовірності події A, часто простіше обчислити ймовірність події $\overline{A}$, а потім знайти шукану ймовірність за формулою: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.*

Приклад 1.13 *Ймовірність одержати повідомлення від певної особи протягом доби дорівнює 0,35. Знайти ймовірність того, що повідомлення від цієї особи протягом доби не надійде.*

$\Diamond$ Позначемо подію A — {повідомлення від певної особи протягом доби надійде}. За умовою задачі $P(A) = 0,35$. Протилежна подія $\overline{A}$ — {повідомлення від певної особи протягом доби не поступить}. Тоді ймовірність протилежної події: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,35 = 0,65$. $\blacklozenge$

Питання для самоперевірки

1. Які події називаються несумісними, сумісними? Навести приклади.
2. Як формулюють і якими формулами записуються теореми додавання ймовірностей несумісних та сумісних подій?
3. Які події утворюють повну групу подій? Навести приклади.
4. Які події називаються протилежними? Навести приклади.

Завдання для самостійного виконання

1. У першій коробці 10 деталей, серед яких 6 пофарбовано в синій колір, 4 — в червоний; в другій коробці 20 деталей, серед них 17 пофарбовано в синій колір, а 3 — в червоний. Із кожної коробки виймають по одній деталі. Чому дорівнює ймовірність того, що деталі мають однаковий колір?
2. У першій коробці 11 деталей, серед яких 6 пофарбовано в синій колір, 5 — в червоний; в другій коробці 20 деталей, серед них 16 пофарбовано в синій колір, а 4 — в червоний. Із кожної коробки виймають по одній деталі. Чому дорівнює ймовірність того, що деталі різні за кольором?
3. Знайти ймовірність того, що навмання взяте двоцифрове число буде кратним або 3, або 5, або і одному і другому одночасно.
4. Кожен студент проходить практику на одному із чотирьох підприємств. Таким чином, на першому підприємстві проходять практику сім студентів, на другому, третьому та четвертому — дев'ять, п'ять та два студенти відповідно. Знайти ймовірність того, що перші три студенти, які з'явилися на захист практики, проходили практику на одному підприємстві.

5. У залежності від наявності сировини підприємство може виробити та відправити замовникам щодобово кількість певної продукції від 1 до 100. Яка ймовірність того, що одержану кількість продукції можна розділити без залишку трьом або чотирьом замовникам?

6. Ймовірність влучення стрілком у першу область мішені дорівнює 0,35, в другу — 0,45, у третю — 0,15. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілок влучить у першу або другу області мішені.

7. За статистичними показниками можна зробити висновок, що 68% чоловіків, які досягли 60-річчя, досягають також і 70-річчя. Яка ймовірність того, що 60-річний чоловік не досягне свого 70-річчя?

8. Серед 100 деталей є три несправні. Навмання взяли дві деталі. Знайти ймовірність того, що принаймні одна із них несправна.

9. Є 100 лотерейних квитків. Відомо, що на 8 квитків випадає виграш по 200 грн, на 12 — по 150 грн., на 14 — по 100 грн, на 24 — по 20 грн, на решту — нічого. Обчислити ймовірність того, що на куплений квиток буде отримано виграш не менше як 100 грн.

10. У коробці лежать 35 краваток, причому 11 із них сині, а інші — червоні. Визначити ймовірність того, що 6 навмання взятих краваток будуть одного кольору.

1.5 Теореми добутку ймовірностей

Розглянемо теореми, згідно яких будемо обчислювати ймовірності добутку подій, тобто $P(A \cdot B)$. Але спочатку сформулюємо ряд означень.

Означення 1.21 *Події A та B називаються* ***незалежними*** *, якщо йовірність появи однієї події не залежить від появи або непояви другої.*

Наприклад 1.4 *Гральний кубик і монету підкидують по одному разу.*
Розглянемо події A — { поява непарного числа на грані кубика} та B — { поява герба на монеті}, які є незалежними, оскільки підкидування кубика і монети відбуваються незалежно.

Означення 1.22 *Випадкові події A та B називаються* ***залежними*** *, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви другої події.*

Означення 1.23 *Ймовірність події B, обчислена при умові появи події A, називається* ***умовною ймовірністю події*** *B і позначається $P_A(B)$.*

Наприклад 1.5 *В урні 10 куль: 4 білих і 6 чорних. Навмання беруть дві кулі. Нехай подія А — {взята біла куля} та В — { взята чорна куля}.*

Якщо кулю, яку взяли першою повертають до урни, то ймовірність появи другої не залежить від того, яка взята перша куля.

Якщо перша куля не повертається до урни, то ймовірність другої події залежить від результату першого випробування.

Якщо першою взяли білу кулю, то в урні залишилося 3 білі і 6 чорних куль, тому

$$P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Якщо першою взяли чорну кулю, то в урні залишилося 4 білі і 5 чорних куль, тому

$$P_B(B) = \frac{5}{9}.$$

Отже, ймовірність події В залежить від появи чи непояви події А.

Теорема 1.4 *Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Наслідок 1.2 *Ймовірність сумісної появи декількох подій, незалежних в сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Зокрема для трьох подій:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Приклад 1.14 *Маємо два ящики, які містять по 10 деталей. У першому ящику 6 стандартних, у другому — 8. Із кожного ящика витягують по одній деталі. Знайти ймовірність того, що обидві витягнуті деталі стандартні.*

◊ Введемо події:
А — {із першого ящика витягнута стандартна деталь},
В — {із другого ящика витягнута стандартна деталь },
Згідно класичного означення ймовірності $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$.
Події А та В є незалежними, тому згідно Теореми 1.4:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48.$$

Отже, ймовірність витягнути із обох ящиків стандартні деталі дорівнює 0,48. ♦

Теорема 1.5 *Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з подій на умовну ймовірність другої події, яка обчислена у припущенні, що перша подія вже відбулася:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Наслідок 1.3 *Ймовірність сумісної появи декількох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності всіх інших, причому ймовірність кожної наступної події обчилюється за припущення, що всі попередні події вже відбулися:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n).$$

Зокрема для трьох подій:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3).$$

Приклад 1.15 *У коробці знаходиться п'ять білих, три сині та чотири жовті кульки. Навмання послідовно беруть три кульки. Яка ймовірність того, що перша кулька — біла, друга — синя і третя — жовта?*

$\Diamond$ Розглянемо події A — { перша витягнута кулька біла}, B — { друга витягнута кулька синя}, C — { третя витягнута кулька жовта}. Події A, B, C є залежними, тому за Теоремою 1.5 отримаємо:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{1}{22}.$$

Отже, шукана ймовірність рівна $\frac{1}{22}$. $\blacklozenge$

Теорема 1.6 *Ймовірність появи хоча б однієї із подій A_1, A_2,…,A_n, незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$,…,$\overline{A}_n$:*

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Якщо позначити $P(\overline{A}_1) = q_1$, $P(\overline{A}_2) = q_2$, ..., $P(\overline{A}_n) = q_n$, то формула запишеться наступним чином:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n.$$

Якщо $P(A_i) = p_i = p$, то $P(\overline{A}_i) = q_i = q$, тоді

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Приклад 1.16 *Ймовірність влучення в мішень першого стрільця дорівнює 0,7, другого — 0, 8, а третього — 0,9. Знайти ймовірність влучення хоча б одного стрільця.*

$\Diamond$ Позначимо події A_i — {у мішень влучив i-й стрілець}, i=1,2,3 та подію A — {у мішень влучить хоча б один стрілець}. За умовою задачі події A_1, A_2 та A_3 є незалежні, тому події $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ також незалежні.

Відомо, що $P(A_1) = 0,7,\ P(A_2) = 0,8,\ P(A_3) = 0,9.$

Для обчислення ймовірності $P(A)$ скористаємося Теоремою 1.6:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3).$$

Так як $P(\overline{A}_1) = 1 - 0,7 = 0,3,\ P(\overline{A}_2) = 1 - 0,8 = 0,2,\ P(\overline{A}_3) = 1 - 0,9 = 0,1$, то

$$P(A) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 1 - 0,006 = 0,994.$$

Отже, ймовірність влучення хоча б одного стрільця рівна 0,994. ♦

Питання для самоперевірки

1. Які події називаються незалежними, залежними? Навести приклади.

2. Як формулюється означення умовної ймовірності?

3. Як формулюють і якими формулами записуються теореми множення ймовірностей незалежних та залежних подій?

4. Як обчислюється ймовірність хоча б однієї із події, незалежних в сукупності?

Завдання для самостійного виконання

1. Робот обслуговує 4 станки. Ймовірність того, що протягом години 1-ий станок не потребує уваги робота дорівнює 0,5; 2-ий станок — 0,3; 3-ій — 0,4 і 4-ий — 0,6. Знайти ймовірність того, що протягом години уваги потребує лише один станок.

2. Ймовірність банкрутства для першої фабрики дорівнює 0,2, для другої — на 50% більша, ніж для першої, для третьої ймовірність банкрутсва є розв‘язком рівняння $10p^2 + 9p = 1$. Визначити ймовірність банкрутства тільки однієї фабрики.

3. Для справної роботи приладу достатньо, щоб були справними два із трьох вузлів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність справного функціонування вузлів дорівнює відповідно 0,7, 0,75, 0,8. Яка ймовірність того, що прилад буде працювати справно?

4. Ймовірність виконання договору для першого та другого підприємств задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} 3p_1 + 2p_2 = 2,7; \\ 4p_1 + 5p_2 = 5. \end{cases}$
   Знайти ймовірність того, що договір буде виконаний хоча б одним підприємством.

5. Екзаменаційний білет містить три питання. Ймовірність того, що студент зможе відповісти на перше питання дорівнює 0,5, на друге — 0,4 і на третє — 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього потрібно відповісти:
   а) на всі питання;
   б) хоча б на два питання.

6. Три дослідники, незалежно один від одного, проводять виміри деякої фізичної величини. Ймовірність того, що перший дослідник допустить помилку при считуванні показників приладу, дорівнює 0,2. Для другого і третього дослідника ця ймовірність відповідно дорівнює 0,4 і 0,15. Знайти ймовірність того, що при одноразовому вимірюванні хоча б один із дослідників допустить помилку.

7. Ймовірність ліквідації заборгованості для першого заводу дорівнює 6/7, для другого — 3/4, для третього — 0,8. Знайти ймовірність ліквідації заборгованості хоча б двома заводами.

8. Ймовірність повного розрахунку за енергоносії для першого заводу дорівнює 0,5, для другого — на 20% більша. Знайти ймовірність своєчасної сплати за енергоносії хоча б одним заводом.

9. Ймовірність виконання договору для першого підприємства 2/5, для другого — 0,8, для третього ця ймовірність становить 60% від суми ймовірностей першого та другого підприємств. Знайти ймовірність виконання договору хоча б двома підприємствами.

10. Ймовірність того, що справним є перший комп'ютер, дорівнює 2/3, другий — 3/4, третій — 5/6. Визначити ймовірність того, що справними виявляться хоча б два комп'ютери.

11. Студент шукає потрібну йому формулу у трьох книгах. Ймовірність того, що потрібна формула знаходиться у першій, другій, третій книзі, відповідно дорівнює 0,6, 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що потрібна формула знаходиться принаймні у двох книгах.

12. Студент прийшов на екзамен, підготувавши 18 із 25 питань програми. Екзаменатор задає йому послідовно три питання. Яка ймовірність того, що:
    а) студент відповість на всі три питання;
    б) студент відповість на перше питання, а на решту не знає відповіді.

13. Маємо п'ять ключів, із яких тільки один підходить до замка. Знайти ймовірність того, що доведеться спробувати три ключі, щоб відкрити замок.

14. Стрілець стріляє в ціль 6 разів. Ймовірність влучення в ціль дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що стрілець хоча б один раз влучить в ціль.

15. Ймовірність того, що подія з'явиться хоча б один раз у трьох незалежних в сукупності випробуваннях, дорівнює 0,973. Знайти ймовірність появи події в одному випробуванні (якщо в усіх випробуваннях ймовірність появи події однакова).

1.6 Формула повної ймовірності. Формула Байєса.

Одним із наслідків застосування теорем додавання і добутку є формула повної ймовірності та формула Байєса.

Теорема 1.7 ***(Формула повної ймовірності)*** *Якщо подія A може настати тільки при умові настання однієї з подій (гіпотез) B_1, B_2,..., B_n, які утворюють повну групу, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з подій B_1, B_2,..., B_n на відповідну умовну ймовірність події A, тобто:*

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A).$$

Приклад 1.17 *У спортивному магазині 20% спортивних костюмів виготовлено фірмою "Puma", 30% - "Adidas" і 50% - "Reebok". Ймовірність браку для кожної з цих фірм становить 0,05, 0,01 та 0,06 відповідно. Знайти ймовірність того, що куплений костюм виявиться бракованим.*

◊ Розглянемо подію A — {куплений костюм виявиться бракованим} та гіпотези:
B_1 — {костюм виготовлений фірмою "Puma" },
B_2 — {костюм виготовлений фірмою "Adidas" },
B_3 — {костюм виготовлений фірмою "Reebok" }.
За умовою задачі: $P(B_1) = 0,2$, $P(B_2) = 0,3$, $P(B_3) = 0,5$. Умовні ймовірності події A: $P_{B_1}(A) = 0,05$, $P_{B_2}(A) = 0,01$ та $P_{B_3}(A) = 0,06$.
Для обчислення ймовірності події A скористаємося Теоремою 1.7:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,01 + 0,5 \cdot 0,06 = 0,043.$$

Отже, ймовірність купити бракований спортивний костюм рівна 0,043. ⧫

Теорема 1.8 ***(Формула Байєса)*** *Нехай події B_1, B_2,..., B_n утворюють повну групу. Тоді умовна ймовірність події B_i $(i = 1, 2, ..., n)$ за умовою, що подія A відбулася, обчислюється за формулою Байєса:*

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}.$$

Зауваження 1.7 *Формула Байєса дозволяє переоцінити ймовірність гіпотез B_i $(i = 1, 2, ..., n)$ за результатами експерименту, тобто знайти апостеріорні ймовірності $P_A(B_i)$ та порівняти їх з апріорними (прийнятими до експерименту).*

Приклад 1.18 *Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність зробити помилку для 1-го економіста дорівнює 0,1, для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Навмання взятий із папки документ виявився з помилкою. Визначити ймовірність того, що його заповнив перший економіст.*

$\Diamond$ Розглянемо подію А — { взятий документ містить помилку} та гіпотези B_i –– { документ заповнив і-й економіст} $(i = 1, 2)$.

Використовуючи класичне означення ймовірності, знаходимо ймовірності гіпотез: $P(B_1) = \dfrac{40}{100} = 0,4$, $P(B_2) = \dfrac{60}{100} = 0,6$.
За умовою задачі умовні ймовірності: $P_{B_1}(A) = 0,1$, $P_{B_2}(A) = 0,2$. Тоді за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,16.$$

Для обчислення умовної ймовірності події B_1 при умові, що подія А відбулася $P_A(B_1)$ використаємо формулу Байєса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,1}{0,16} = 0,25.$$

Отже, ймовірність того, що взятий з помилкою документ заповнював перший економіст рівна 0,25. ♦

Питання для самоперевірки

1. Що таке гіпотези? Яку рівність задовольняє сума ймовірностей цих гіпотез?
2. Яким умовам повинна задовольняти подія, щоб її ймовірність можна було знаходити за формулою повної ймовірності?
3. Як записується формула повної ймовірності?
4. Коли застосовується формула Байєса?
5. Як записується формула Байєса?

Завдання для самостійного виконання

1. Прилад може працювати у трьох режимах: нормальному, форсованому і недовантаженому. Нормальний режим спостерігається у 60% випадків роботи приладу, форсований — у 30%, недовантажений — у 10%. Надійність приладу (ймовірність безвідмовної роботи приладу на протязі заданого відрізку часу t) для нормального режиму дорівнює 0,8, для форсованого — 0,5, для недовантаженого — 0,9. Знайти повну (з урахуванням випадковості умов) надійність приладу.

2. У двох ящиках знаходиться по 20 куль, причому в першому ящику білого кольору 9 куль, а другому — 12. З першого ящика навмання виймають кулю і кладуть у другий ящик. Ретельно перемішавши кулі в другому ящику, навмання вибирають з нього одну кулю, яка виявилась білою. Знайти ймовірність того, що куля, взята з першого ящика, була білого кольору.

3. У першому комплекті міститься 18 деталей, 7 з яких нестандартні, в другому — 12, 4 з яких нестандартні. З кожного комплекту навмання витягують по одній деталі, а потім з цих деталей навмання вибирають одну. Знайти ймовірність того, що ця вибрана деталь виявиться стандартною.

4. Ймовірність того, що телевізор фірми «SAMSUNG» не зіпсується протягом гарантійного терміну дорівнює 0,4, для телевізора фірми «SONI» ця ймовірність на 0,3 більша. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний телевізор із 4-ох фірми «SAMSUNG» і 8-ми фірми «SONI» не зіпсується протягом гарантійного терміну.

5. На складі телеательє знаходяться три комплекти однотипних деталей; у першому — 200 деталей, усі стандартні; у другому — 100, з яких три браковані; у третьому — 150, з них 5 бракованих. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь із довільно вибраного комплекту виявиться стандартною?

6. Продукція виготовляється на двох підприємствах і надходить на спільну базу. Ймовірність виготовлення бракованої продукції для 1-го підприємства 0,1, для 2-го — 0,2. Перше підприємство здало на склад 100 одиниць продукції, друге 400. Знайти ймовірність того, що навмання взята із складу одиниця продукції буде не бракованою.

7. Деталь, яка проходить обробку на одному із трьох інструментів, була визнана непридатною. Знайти ймовірність того, що деталь є непридатною, в результаті обробки 1-им, 2-им, 3-ім інструментом, якщо ймовірність несправності для них становить відповідно 0,2, 0,4 і 0,6.

8. У команді спортсменів 4 лижники, 6 бігунів і 10 велосипедистів. Ймовірність виконати норму майстра спорту для лижника дорівнює 0,2, для бігуна — 0,15 і для велосипедиста — 0,1. Вибраний навмання спортсмен не виконав норму. Визначити ймовірність того, що це був бігун.

9. На склад підприємства надходять деталі із трьох цехів. Перший цех відправив 100 деталей, другий і третій по 200. Перший і другий цехи дають по 4% браку, третій — 3%. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь є бракованою. Яка ймовірність того, що вона надійшла з третього цеху?

10. У першому комплекті міститься 15 деталей, 5 з яких нестандартні, в другому — 18, 4 з яких нестандартні. З кожного комплекту навмання витягують по одній деталі, а

потім з цих деталей навмання вибирають одну. Знайти ймовірність того, що вибрана деталь виявиться стандартною.

11. У першому ящику є 20 деталей, з яких 30% пофарбовано, у другому відповідно — 10 і 40%. Знайти ймовірність того, що деталь взята з навмання вибраного ящика є пофарбованою.

12. У магазин надійшло 30% телевізорів із першого заводу, серед яких 20% бракованих; 20% — із другого заводу, серед яких 10% бракованих; 50% із третього заводу, який має лише 5% браку. Яка ймовірність купити справний телевізор?

13. У рибалки є три улюблені місця, куди він приходить з однаковою ймовірністю. Ймовірність кльову на першому місці дорівнює $1/3$, на другому — $1/2$, на третьому — $1/4$. Рибалка закинув вудку у навмання вибраному місці і риба клюнула. Знайти ймовірність того, що рибалка закинув вудку у першому місці.

14. У крамницю для продажу надійшла продукція з трьох фабрик, відносна частка яких є: 1 — 50%, 2 — 30%, 3 — 20%. Брак продукції цих фабрик становить 2%, 3% та 5% відповідно. Знайти ймовірність того, що навмання куплений у магазині виріб цих фабрик буде якісним.

15. Пасажир для придбання квитка може звернутися до однієї із трьох кас на станції. Відповідні ймовірності рівні 0,2, 0,3 та 0,5. Ймовірність того, що на момент звернення пасажира в касу буде квиток, дорівнює відповідно 0,6, 0,7 та 0,9. Пасажир звернувся до однієї з кас і купив квиток. Яка ймовірність того, що квиток пасажир придбав у першій касі?

1.7 Повторні незалежні випробування.

У багатьох задачах теорії ймовірності потрібно досліджувати послідовність n випробувань.

Означення 1.24 *Якщо усі n випробувань проводити в однакових умовах і ймовірність появи події A в усіх цих випробуваннях однакова і не залежить від появи або непояви A в інших випробуваннях, то таку послідовність незалежних випробувань називають* ***схемою Бернуллі*** .

Нехай випадкова подія А може з'явитися у кожному випробуванні з ймовірністю $P(A) = p$ або не з'явитися із ймовірністю $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Поставимо задачу: знайти ймовірність того, що при проведенні n випробувань подія А з'явиться k разів і не з'явиться $n - k$ разів. Шукана ймовірність позначається $P_n(k)$.

Теорема 1.9 ***(Теорема Бернуллі)*** *Ймовірність того, що при проведенні n випробувань за схемою Бернуллі подія A з'явиться k раз, обчислюється за формулою Бернуллі:*

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$,
p *— ймовірність появи події A в кожному випробуванні,*
q *— ймовірність появи події $\overline{A}$ в кожному випробуванні.*

Зауваження 1.8 *Ймовірність появи події A в n випробуваннях схеми Бернуллі менше m разів знаходиться за формулою:*

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m-1).$$

Ймовірність появи події A не менше m разів знаходиться за формулою:

$$P_n(k \geqslant m) = P_n(m) + P_n(m+1) + ... + P_n(n).$$

Ймовірність появи події A в n випробуваннях схеми Бернуллі більше m разів знаходиться за формулою:

$$P_n(k > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + ... + P_n(n).$$

Ймовірність появи події A не більше m разів знаходиться за формулою:

$$P_n(k \leqslant m) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m).$$

Зауваження 1.9 *При розв'язуванні задач є необхідність знаходити найбільш ймовірне значення k_0 числа k появ події A. Це значення k_0 визначається співвідношенням:*

$$np - q \leqslant k_0 \leqslant np + p \ \text{ або } \ (n+1)p - 1 \leqslant k_0 \leqslant (n+1)p.$$

Число k_0 повинно бути цілим числом. Якщо $(n+1)p$ — ціле число, тоді найбільше значення ймовірність має при двох числах $k_1 = (n+1)p - 1$ та $k_2 = (n+1)p$.

Приклад 1.19 *Ймовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 5 вибраних деталей 3 будуть стандартними.*

◊ Розглянемо подію А — {виготовлена деталь стандартна}. За умовою задачі: $n = 5$, $m = 3$, $P(A) = p = 0,8$, тоді $q = 1 - 0,8 = 0,2$.
Для обчислення ймовірності $P_5(3)$ скористаємося формулою Бернуллі (Теоремою 1.9):

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^{5-3} = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,2048.$$

Отже, ймовірність того, що із 5 вибраних деталей 3 будуть стандартними рівна 0,2048. ♦

Приклад 1.20 *Бізнесмен, вивчивши попит ринку на нові спортивні автомобілі, вирішив продати пробну партію з 9 таких автомашин. Ймовірність отримати високий прибуток за рахунок кожної машини оцінена в 0,8 і вважається успіхом, якщо в день їх буде продано не менше семи. Яка ймовірність успіху, якщо продаж автомашин здійснюється незалежно?*

$\Diamond$ Продаж кожної автомашини є випробування. Розглянемо подію А — {за рахунок продажу автомобіля бізнесменом отримано високий прибуток}, тоді p=P(A)=0,8; q=0,2.

Успіхом для бізнесмена буде той випадок, коли число k проданих за день автомобілів буде задовольняти нерівність $7 \leqslant k \leqslant 9$. Тоді

$$P(7 \leqslant k \leqslant 9) = P_9(7) + P_9(8) + P_9(9),$$

де для кожного значення k ймовірність обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_9(7) = C_9^7 \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^2 = 0,302,$$
$$P_9(8) = C_9^8 \cdot (0,8)^8 \cdot 0,2 = 0,302,$$
$$P_9(9) = C_9^9 \cdot (0,8)^9 \cdot (0,2)^0 = 0,134$$

Тоді

$$P(7 \leqslant k \leqslant 9) = 0,302 + 0,302 + 0,314 = 0,738,$$

Отже, ймовірність успіху для бізнесмена складає 0,738. $\blacklozenge$

Формула Бернулі відіграє значну роль у теорії ймовірностей. Але при кількості випробувань $n > 10$ обчислення за цією формулою ускладнюються. Тому при великій кількості випробувань користуються іншими формулами: локальна формула Лапласа і Пуассона. Ці формули наближені й тим точніше підраховують ймовірність $P_n(k)$, чим більше n.

Теорема 1.10 ***(Локальна теорема Лапласа)*** *Нехай ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і $p \neq 0$, $p \neq 1$, тоді ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A в n незалежних випробуваннях з'явиться k раз, наближено дорівнює (тим точніше, чим більше n і чим ближче значення p до числа 0,5):*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x), \text{ де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ — це функція Гаусса, значення якої наведені у Таблиці 1. При розв'язуванні задач слід дотримуватися наступних правил:

1) функція $\phi(x)$ парна, тому $\phi(-x) = \phi(x)$;

2) для значень $|x| \geqslant 4$ вважають, що $\phi(x) = 0$.

Зауваження 1.10 *Локакальною формулою Лапласа доцільно користуватися при* $n > 100$ *та* $npq > 20$.

Приклад 1.21 *Ткаля обслуговує 100 верстатів. Ймовірність обриву нитки на кожному верстаті протягом однієї хвилини дорівнює 0,02. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив нитки буде на 3 верстатах.*

$\Diamond$ За умовою задачі: $n = 100$, $p = 0,02$, $k = 3$.
Для обчислення ймовірності $P_{100}(3)$ використаємо локальну теорему Лапласа (Теоремою 1.10). Для цього обчислимо

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3 - 100 \cdot 0,02}{\sqrt{100 \cdot 0,02 \cdot 0,98}} = 0,71.$$

За таблицею значень функції Гаусса $\phi(0,71) = 0,31$. Тоді

$$P_{100}(3) \approx \frac{0,31}{1,4} = 0,221.$$

Отже, $P_{100}(3) \approx 0,221$. $\blacklozenge$

Теорема 1.11 ***(Інтегральна теорема Лапласа)*** *Нехай ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і $p \neq 0$, $p \neq 1$, тоді ймовірність появи події A в n незалежних випробуваннях не менше k_1 і не більше k_2 разів дорівнює:*

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ де } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}dt}$ — це функція Лапласа, значення якої наведені у Таблиці 2.
При розв'язуванні задач слід дотримуватися наступних правил:
1) функція $\Phi(x)$ непарна, тому $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
2) для значень $|x| > 5$ вважають, що $\Phi(x) = 0,5$.

Зауваження 1.11 *Інтегральна формула Лапласа є тим точнішою, чим більше значення n. Якщо $npq \geqslant 9$, то вона використовується як точна формула.*

Приклад 1.22 *Ймовірність того, що телевізор не пройшов передпродажну перевірку дорівнює $p = 0,2$. Знайти ймовірність того, що серед 400 телевізорів, що є на складі, перевірку не пройдуть від 70 до 100.*

$\Diamond$ За умовою задачі: $n = 400$, $p = 0,2$, $k_1 = 70$, $k_2 = 100$.
Для обчислення ймовірності $P_{400}(70 \leqslant k \leqslant 100)$ використаємо інтегральну теорему Лапласа (Теоремою 1.11). Для цього обчислимо

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

За таблицею значень функції Лапласа $\Phi(-1,25) = -0,3944$, $\Phi(2,5) = 0,4938$. Тоді

$$P_{400}(70 \leqslant k \leqslant 100) \approx 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Отже, $P_{400}(70 \leqslant k \leqslant 100) \approx 0,8882$. ⧫

Теорема 1.12 ***(терема Пуассона)*** *Якщо $n \to +\infty$, $p \to 0$ так, що $np \to \lambda = const$, то для будь-якого $k = 0, 1, 2, ...$:*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \textit{де } \lambda = np.$$

Зауваження 1.12 *Формула Пуассона дає досить точне наближення за значень p близьких до нуля ($p < 0,1$), тобто для подій, що рідко трапляються і для достатньо великих n ($npq \geqslant 9$).*

Приклад 1.23 *Проводиться сортування деталей. Ймовірність появи бракованої деталі дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей виявиться рівно 5 бракованих.*

♢ За умовою задачі: $n = 1000$, $p = 0,004$, $k = 5$.
Для обчислення ймовірності $P_{1000}(5)$ використаємо формулу Пуассона:

$$\lambda = 1000 \cdot 0,004 = 4,$$

$$P_{1000}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} = 0,1563.$$

Отже, $P_{1000}(5) \approx 0,1563$. ⧫

Теорема 1.13 *Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищує $\epsilon > 0$, визначається за формулою:*

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 2\Phi\left(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Приклад 1.24 *Менеджер встановив, що ймовірність бути нереалізованою для кожної одиниці продукції, що швидко псується, дорівнює 0,1. Скільки потрібно реалізувати одиниць продукції, щоб з ймовірністю 0,9544 можна було стверджувати, що відносна частота одиниці нереалізованої продукції відхилиться від постійної ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на $\epsilon = 0,03$.*

♢ За умовою задачі: $p = 0,1$, $\epsilon = 0,03$, $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 0,9544$.
Так як, $2\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{n}{0,1 \cdot 0,9}}\right) = 2\Phi\left(0,1\sqrt{n}\right) = 0,9544$, то за таблицею значень функції Лапласа із рівності $\Phi(x) = 0,4772$ визначаємо $x = 2$. Тоді $0,1\sqrt{n} = 2$, $n = 400$.

Отже, за умовою задачі для заданого відхилення відносної частоти від теоретичної ймовірності p, необхідно реалізувати не менше, ніж 400 одиниць продукції, що швидко псується.

Даному результату можна дати ймовірнісне тлумачення: якщо буде реалізовано достатньо велику кількість партій продукції в кількостях, не менших за 400 одиниць, то в 95,44% цих партій відносна частота появи одиниці нереалізованої буде відхилятися від теоретичної ймовірності $p = 0,1$ за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,03 в межах від $0,1 - 0,03 = 0,07$ до $0,1 + 0,03 = 0,13$. Іншими словами, число одиниць нереалізованої продукції в 95,44% партій буде знаходитися між 28 (7% від 400) і 52 (13% від 400). Якщо взяти лише одну партію із 400 одиниць продукції, то з великою долею впевненості можна очікувати, що в ній число одиниць нереалізованої продукції буде не менше за 28 і не більше за 52. ⧫

Питання для самоперевірки

1. Яка послідовність випробувань утворює схему Бернуллі?
2. Як записується формула Бернуллі і яку ймовірність вона дозволяє обчислити?
3. За якими формулами знаходять ймовірність появи події A менше або більше, не менше або не більше разів у n випробуваннях схеми Бернуллі?
4. Як можна знайти найбільшймовірне значення числа появ події A у схемі Бернуллі?
5. Коли доцільно використовувати локальну формулу Лапласа? Запишіть відповідну формулу.
6. Які властивості функції Гаусса вам відомі. Як знайти її значення?
7. Яку ймовірність обчислюють за допомогою інтегральної теореми Лапласа? Запишіть відповідну формулу. За якої умови вона використовується як точна?
8. Які властивості функції Лапласа вам відомі. Як знайти її значення?
9. Що дозволяє обчислити формула Пуассона? Запишіть відповідну формулу. В якому випадку вона використовується?
10. Як оцінити відхилення відносної частоти події від її ймовірності?

Завдання для самостійного виконання

1. Служба податків визначила, що 40% всіх особистих декларацій про прибуток містять принаймні одну помилку. Якщо випадково відібрати 10 декларацій, то яка ймовірність того, що 6 із них будуть містити принаймні одну помилку?

2. У вузі 80% студентів отримують деякий вид стипендії. Якщо для перевірки відібрати 10 студентів, то яка ймовірність того, що більше ніж 8 студентів мають стипендію?

3. Підприємство має 5 постачальників. Ймовірність виконання договору для кожного з них дорівнює 0,7. Визначити ймовірність того, що менше 40% постачальників виконають договір.

4. Ймовірність того, що студент складе іспит з математики дорівнює 0,7. Нехай є група із 8 студентів. Знайти найімовірнішу кількість студентів, які складуть іспит з математики. Обчислити відповідну ймовірність.

5. Скільки разів треба підкинути гральний кубик, щоб найімовірніше число випадань трійки дорівнювало 10?

6. Відомо, що 60% пасажирів від загальної кількості пасажирів потягу даного напрямку складає пільгова категорія. Яка ймовірність того, що:а) з 10 пасажирів виявиться 6 пасажирів пільгової категорії; б) із 200 пасажирів виявиться 120 пасажирів пільгової категорії?

7. Ймовірність того, що покупець, який завітав до магазину взуття, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Яка ймовірність того, що із 900 покупців, що завітали до магазину, здійсніть покупку: а) 90 покупців; б) від 100 до 180 покупців?

8. Ймовірність своєчасної реалізації одиниці продукції дорівнює 0,8. Визначити ймовірність своєчасної реалізації не менше ніж 312 одиниць продукції із 400, що поступили на реалізацію.

9. На лінії працюють 300 робітників. Ймовірність того, що протягом доби працівник захворіє, дорівнює в середньому 0,02. Яка ймовірність того, що протягом доби на лінії захворіє: а) 5 осіб; б) не більше як 3 особи?

10. Ймовірність випуску свердла підвищеної крихкості (брак) дорівнює 0,02. Свердла складають у коробки по 100 штук. Знайти ймовірність того, що в коробці виявиться не більше, ніж 3 браковані свердла.

11. Пристрій складається із 1000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу довільного елемента за час T дорівнює 0,02. Знайти ймовірність того, що за час T вийдуть з ладу: а) рівно 3 елементи; б) від 7 до 15 елементів.

12. Підручник надруковано тиражем 10 000 примірників. Ймовірність того, що підручник зброшуровано неправильно, дорівнює 0,0001. Яка ймовірність того, що в тиражі 5 бракованих книг?

13. Завод відправляє на базу 1500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу в дорозі дорівнює 0,002. Яка ймовірність того, що в дорозі буде пошкоджено виробів: а) рівно 4; б) менше 4; в) більше 4?

14. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед випадково відібраних 300 деталей відносна частота натрапляння на нестандартні деталі відхиляється від ймовірності 0,2 за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,01.

15. Ймовірність появи випадкової події в кожному з 800 проведених незалежних випробувань є величина стала і дорівнює 0,7. Яким має бути значення $\epsilon > 0$, щоб $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 0,99$?

Розділ 2

Випадкові величини. Основні закони розподілу випадкових величин

2.1 Поняття випадкової величини. Закон розподілу дискретної випадкової величини

У теорії ймовірності поряд з поняттями випадкова подія, ймовірність, розглядається поняття випадкова величини.

Означення 2.1 ***Випадковою величиною*** *називається така величина, яка в наслідок випробування може приймати лише одне числове значення, заздалегіть невідоме і обумовлене випадковими причинами.*

Наприклад 2.1 *Випадковими величинами є: кількість студентів, які присутні на занятті; кількість пасажирів, які звернулися до каси, щоб придбати квитки; кількість очок, що випадає при підкиданні кубика; величина прибутку, який очікує підприємець.*

Випадкові величини позначаються великими літерами: $X,\ Y,\ Z, ...$, а їх значення — відповідними малими літерами з індексами

$$X : x_1,\ x_2, ..., x_n;\ \ Z : z_1,\ z_2, ..., z_n.$$

Випадкові величини бувають **дискретними** та **неперервними**.

Означення 2.2 ***Дискретною випадковою величиною (ДВВ)*** *називають таку величину, яка може приймати конкретні ізольовані числові значення, які можна пронумерувати, із відповідними ймовірностями.*

Множина значень дискретної випадкової величини або скінченна, або нескінченна, але зліченна (її елементи можна пронумерувати натуральними числами).

Наприклад 2.2 *Кількість влучень в мішень при трьох пострілах буде X: 0, 1, 2, 3. Отже, випадкова величина X приймає чотири ізольовані числові значення з різими ймовірностями. Тому X — це дискретна випадкова величина.*
Кількість викликів таксі Y на диспетчерському пункті також буде дискретною випадковою величиною, але при $t \to \infty$ значення Y будуть також зростати, тобто їх кількість прямує до нескінченості $Y: 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n, ...$

Означення 2.3 ***Неперервною випадковою величиною (НВВ)*** *називається величина, яка може приймати будь-яке числове значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу* $(a; b)$.

На відміну від ДВВ, значення НВВ перелічити неможливо.

Наприклад 2.3 *Неперервною випадковою величиною є: час безвідмовної роботи приладу; величина похибки при вимірюванні; розміри деталі, яку виготовляє станок.*

Означення 2.4 ***Законом розподілу випадкової величини*** *називають співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.*

Закон розподілу дискретної випадкової величини X може бути заданий:
- табличнo (ряд розподілу);
- графічно (многокутник розподілу);
- аналітично (формулою).

При табличному заданні закону розподілу ДВВ будуємо таблицю, де у першому рядку перелічені у порядку зростання всі можливі значення випадкової величини $x_1,\ x_2;\ ...,;\ x_n$, в другому — відповідні їм ймовірності $p_1,\ p_2;\ ...,;\ p_n$:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Зауваження 2.1 $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Закон розподілу ДВВ у вигляді таблиці називають **рядом розподілу**.

При графічному заданні ДВВ на прямокутній системі координат будують точки з координатами $(x_i; p_i)$ та послідовно (у порядку зростання номерів) з'єднують відрізками. Отриману ламану називають **многокутником розподілу** або **полігоном**:

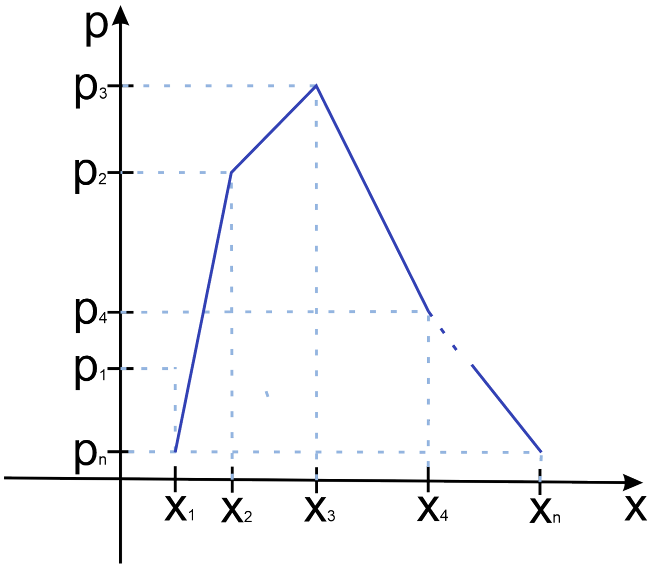

Рис. 2.1: многокутник розподілу

При аналітичному заданні ДВВ відповідність між значеннями x_i та їх ймовірностями p_i задається формулою:

$$p_i = P(X = x_i) = \phi(x_i), \ \text{ де } \phi(x_i) \text{ — деяка функція.}$$

Зауваження 2.2 *Зазвичай аналітично задаються спеціальні (стандартні) розподіли, що будуть розглядатися далі.*

Приклад 2.1 *У грошовій лотереї розігрується один виграш в 100 грн, десять виграшів по 50 грн і 30 виграшів по 10 грн при загальному числі білетів 100. Знайти закон розподілу випадкової величини X — вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білету у вигляді таблиці та многокутника розподілу.*

◊ Випадкова величина X є дискретною і може приймати значення: 0, 10, 50, 100. Обчислюємо відповідні ймовірності:

$$P(X = 0) = \frac{59}{100} = 0,59; \ \ P(X = 10) = \frac{30}{100} = 0,3;$$

$$P(X = 50) = \frac{10}{100} = 0,1; \ \ P(X = 100) = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Тоді

X	0	10	50	100
P	$0,59$	$0,3$	0,1	0,01

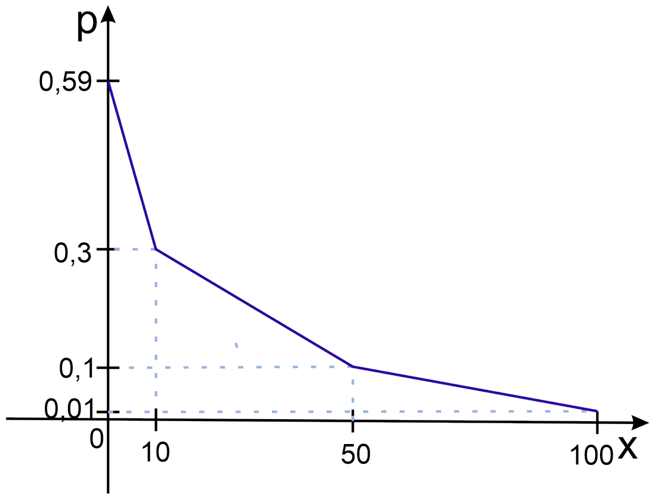

Рис. 2.2: многокутник розподілу випадкової величини X — вартості виграшу

♦

Приклад 2.2 *У ящику знаходяться 4 білі і 6 чорних куль однакового розміру. Навмання беруть дві кулі. Побудувати закон розподілу випадкової величини X — числа білих куль серед відібраних.*

◊ Випадкова величина X може приймати значення: 0, 1, 2. Для обчислення відповідних ймовірностей скористаємося класичним означенням ймовірності:

$$P(x_1 = 0) = \frac{C_4^0 \cdot C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{10 \cdot 9} = \frac{1}{3},$$

$$P(x_2 = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} = 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{10 \cdot 9} = \frac{8}{15},$$

$$P(x_3 = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^0}{C_{10}^2} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15}.$$

Тоді

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

Перевірка: $\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = 1.$ ♦

Приклад 2.3 *Ймовірність влучення в мішень 1-им стрільцем при одному пострілу дорівнює 0,6, другим — 0,8. Стрільці зробили по одному пострілу. Випадкова величина X — кількість влучень в мішень. Знайти закон розподілу величини X.*

◊ Згідно умови задачі введемо позначення: $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,8$. Тоді $q_1 = 0,4$, $q_2 = 0,2$.

Випадкова величина X може приймати значення: 0, 1, 2. Обчислюємо відповідні ймовірності:

$$P(x_1 = 0) = q_1 \cdot q_2 = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08,$$

$$P(x_1 = 1) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,12 + 0,32 = 0,44,$$

$$P(x_1 = 2) = p_1 \cdot p_2 = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48.$$

Записуємо закон розподілу:

X	0	1	2
P	0,08	0,44	0,48

Перевірка: $0,08 + 0,44 + 0,48 = 1$. ♦

Приклад 2.4 *Статистика безробіття свідчить, що 20% працездатних людей є безробітними. Навмання вибрано трьох осіб. Випадкова величина X — число осіб, які не мають роботи серед відібраних. Знайти закон розподілу даної випадкової величини.*

◊ Випадкова величина X може приймати значення: 0, 1, 2, 3. Оскільки ймовірність вибору безробітної особи є одинаковою, тобто виконуються умови схеми Бернуллі, то для обчислення відповідних ймовірностей випадкової величини X скористаємося формулою Бернуллі:

$$P(x_1 = 0) = C_3^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^3 = 0,512,$$

$$P(x_1 = 1) = C_3^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^2 = 0,384,$$

$$P(x_1 = 2) = C_3^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^1 = 0,096,$$

$$P(x_1 = 3) = C_3^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^0 = 0,008.$$

Записуємо закон розподілу:

X	0	1	2	3
P	0,512	0,384	0,096	0,008

Перевірка: $0,512 + 0,384 + 0,096 + 0,008 = 1$. ♦

Питання для самоперевірки

1. Яка величина називається випадковою? Наведіть приклади.
2. Які вирадкові величини називаються дискретними? Наведіть приклади.
3. Які вирадкові величини називаються неперервними? Наведіть приклади.
4. Сформулюйте означення закону розподілу ДВВ.
5. Які форми задання закону розподілу ДВВ знаєте? Охарактеризуйте кожен із них.

Завдання для самостійного виконання

1. У коробці знаходиться 7 однакових за розміром куль, з яких 5 — червоного кольору. Навмання відібрано три кулі. Випадкова величина X — число куль червоного кольору серед відібраних. Знайти закон розподілу даної випадкової величини.

2. Ймовірність того, що в абонементі бібліотеки потрібна студенту книга вільна, дорівнює 0,3. У місті є чотири бібліотеки. Випадкова величина X — число бібліотек, які відвідає студент. Знайти закон розподілу випадкової величини і побудувати многокутник даного розподілу.

3. Два баскетболісти виконують по черзі по одному штрафному кидку. Ймовірність влучення першого дорівнює 0,4, другого — 0,3. Випадкова величина X — число закинутих м'ячів. Знайти закон розподілу даної випадкової величини і побудувати многокутник розподілу.

4. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом години уваги не вимагає перший верстат дорівнює 0,4, другий — 0,5 і третій — 0,7. Випадкова величини X — число верстатів, які вимагають уваги робітника протягом години. Знайти закон розподілу даної випадкової величини.

5. Екзаменаційний білет складається з трьох питань. Ймовірність того, що студент знає відповідь на перше питання дорівнює 0,9, на друге — 0,8, на третє — 0,7. Випадкова величина X — кількість питань у екзаменаційному білеті, на які відповість студент. Знайти закон розподілу даної випадкової величини та побудувати многокутник розподілу.

6. Прилад складається із трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента при одному досліді дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу числа елементів, які відмовили при одному досліді.

7. Ймовірність здачі екзамену на «відмінно» для кожного з 6 студентів дорівнює 0,4. Скласти закон розподілу числа студентів, які отримали «відмінно» на екзамені.

8. Для виконання вправи спортсмену надають можливість зробити до 5 спроб. Ймовірність виконати вправу у кожній спробі вважається сталою і дорівнює 0,4. Випадкова величина X — кількість спроб, використаних спортсменом для виконання вправи.

9. Мисливець, який має три патрони, стріляє в ціль до першого попадання (або поки не закінчаться патрони). Випадкова величина X — кількість використаних патронів. Знайти ймовірнісний розподіл даної величини при умові, що ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,8. Побудувати многокутник розподілу.

10. З 10 пристроїв 2 мають приховані дефекти. Знайти закон розподілу випадкової величини X — числа справних пристроїв серед трьох навмання вибраних.

2.2 Числові характеристики дискретної випадкової величини

Закони розподілу ДВВ повністю характеризують випадкові величини і дозволяють розв'язувати пов'язані з ними задачі.

Але практично не завжди вдяється одержати закон розподілу або закон є досить складним для практичної реалізації. Тому з'являється потреба характеризувати ДВВ за допомогою числових характеристик, які у достатній мірі описують особливості випадкових величин.

Найчастіше використовуються наступні числові характеристики : **математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення**.

Означення 2.5 ***Математичним сподіванням M(X)*** *дискретної випадкової величини X називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм ймовірності:*

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k.$$

Математичне сподівання ДВВ X характеризує середнє значення випадкової величини із врахуванням ймовірностей його можливих значень.

Властивості математичного сподівання

1. $M(C) = C$;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$;
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Приклад 2.5 *На основі статистичних досліджень встановлено, що ймовірність повернення банківського кредиту залежить від його величини:*

X (ум од.)	3	5	2
P	0, 5	0,2	0,3

Обчислити середнє значення повернутих кредитів.

◊ Запропонована таблиця є законом розподілу дискретної випадкової величини X — суми повернутих кредитів (ум.од). Тоді середнє значення повернутих кредитів — це математичне сподівання M(X):

$$M(X) = 3 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 = 3,1(\text{ум.од})$$

Отже, середнє значення повернутих кредитів складає 3,1 ум.од. ♦

Математичне сподівання характеризує цент розподілу дискретної випадкової величини. Для характеристики розсіювання можливих значень X відносно центру розподілу введено нову числову характеристику.

Означення 2.6 ***Дисперсією D(X)*** *дискретної випадкової величини X називається число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення ДВВ X від її математичного сподівання:*

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right).$$

Властивості дисперсії

1. $D(C) = 0$;
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$;
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Для обчислення дисперсії ДВВ X зручніше користуватися формулою:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \text{ де } M(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + ... + x_n^2p_n.$$

Приклад 2.6 *Знайти дисперсію дискретної випадкової величини, яка задана законом розподілу:*

X	2	4	5
P	0, 5	0,3	0,2

◊ Для обчислення дисперсії скористаємося формулою: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Обчислимо $M(X)$, $M(X^2)$:

$$M(X) = 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 = 3,2;$$

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0,5 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,2 = 4 \cdot 0,5 + 16 \cdot 0,3 + 25 \cdot 0,2 = 11,8.$$

Тоді

$$D(X) = 11,8 - (3,2)^2 = 1,56.$$

Отже, дисперсія рівна 1,56. ♦

У більшості випадків випадкова величина X має розмірність, наприклад, метр, міліметр, грам, гривня, тому її дисперсія буде вимірюватися в квадратних одиницях цієї розмірності.

У практичній діяльності доцільно використовувати величину розсіювання випадкової величини в розмірності цієї величини.

Означення 2.7 ***Середнім квадратичним відхиленням*** *$\sigma(X)$ випадкової величини X називається корінь квадратний із дисперсії*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Середнє квадратичне відхилення має таку ж розмірність, що і випадкова величина.

Приклад 2.7 *Заробітна плата за день за даними трьох підрозділів фірми задана таблицею:*

Заробітна плата (гр.од.)	10	20	25
Кількість працівників	30	50	20

Знайти середнє квадратичне відхилення заробітної плати на фірмі.

◊ Нехай випадкова величина X — розмір заробітної плати і запишемо її закон розподілу: Проведемо необхідні обчислення:

X(гр.од.)	10	20	25
P	0,3	0,5	0,2

$$M(X) = 10 \cdot 0,3 + 20 \cdot 0,5 + 25 \cdot 0,2 = 18;$$

$$M(X^2) = 100 \cdot 0,5 + 400 \cdot 0,3 + 625 \cdot 0,2 = 355;$$

$$D(X) = 355 - 18^2 = 31.$$

Тоді

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{31} = 5,57.$$

Отже, середнє квадратичне відхилення заробітної плати на фірмі від середньої, яка становить 18 гр.од., буде дорівнювати 5,57 гр.од. ♦

В економічних задачах дисперсію часто беруть як міру ризику, оскільки вона характеризує мінливість, розсіювання випадкової величини прибутку, зумовленої, наприклад, випадковими коливаннями цін на енергоносії.

Середнє квадратичне відхиленння застосовують для характеристики відхилень та ймовірної поведінки випадкової величини.

Приклад 2.8 *Екзаменаційний білет має чотири питання. Ймовірність того, що студент відповість на перше питання, дорівнює 0,65; на друге — 0,4; на третє — 0,5, на четверте — 0,6. Випадкова величина X — число питань у екзаменаційному білеті, на які відповість студент. Скласти закон розподілу випадкової величини X та обчислити її числові характеристики.*

◊ Випадкова величина X — це число питань, на які відповість студент.Це дискретна випакова величина, яка приймає значення: 0,1,2,3,4.

За умовою задачі $p_1 = 0,65$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,5$, $p_4 = 0,6$. Тоді $q_1 = 0,35$, $q_2 = 0,6$, $q_3 = 0,5$, $q_4 = 0,4$. Знаходимо відповідні ймовірності:

$$P(X = 0) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 = 0,35 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,042;$$

$$P(X = 1) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 \cdot q_4 + q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot p_4 =$$
$$= 0,65 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4+$$
$$+0,35 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 = 0,211;$$

$$P(X = 2) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 \cdot q_4 + p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot p_4 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot q_4 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 \cdot p_4+$$
$$+q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 0,65 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,65 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,65 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6+$$
$$+0,35 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 + 0,35 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 = 0,38;$$

$$P(X = 3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot q_4 + p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 \cdot p_4 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 \cdot p_4 =$$
$$= 0,65 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + +0,65 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 + 0,35 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6+$$
$$0,65 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 = 0,289;$$

$$P(X = 4) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 0,65 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 = 0,078.$$

X	0	1	2	3	4
P	$0,042$	$0,211$	0,38	0,289	0,078

Перевірка: $0,042 + 0,211 + 0,38 + 0,289 + 0,078 = 1$.

Обчислюємо числові характеристики випадкової величини X:
- математичне сподівання:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4;$$

$$M(X) = 0 \cdot 0,042 + 1 \cdot 0,211 + 2 \cdot 0,38 + 3 \cdot 0,289 + 4 \cdot 0,078 = 2,15;$$

- дисперсія:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \quad M(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + x_4^2p_4;$$

$$M(X^2) = 1 \cdot 0,211 + 4 \cdot 0,38 + 9 \cdot 0,289 + 16 \cdot 0,078 = 5,58;$$

$$D(X) = 5,58 - (2,15)^2 = 5,58 - 4,6225 = 0,9575;$$

- середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(X) = \sqrt{0,9575} = 0,98.$$

♦

Приклад 2.9 *Дискретна випадкова величина* X *може приймати два значення* x_1, x_2, *причому* $x_1 < x_2$. *Відомо, що* $p_1 = 0,2$, $M(X) = 2,8$, $D(X) = 0,16$. *Знайти закон розподілу випадкової величини* X.

$\Diamond$ Для запису закону розподілу випадкової величини X потрібно знайти значення p_2, x_1, x_2.

Оскільки $p_1 + p_2 = 1$, то $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,2 = 0,8$.

Для знаходження значень випадкової величини скористаємося формулами:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - (M(X))^2.$$

Підставивши відомі значення, одержуємо систему рівнянь: $\begin{cases} 0,2x_1 + 0,8x_2 = 2,8; \\ 0,2x_1^2 + 0,8x_2^2 - (2,8)^2 = 0,16. \end{cases}$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо значення випадкової величини X:

$$x_1' = 2,\ x_2' = 3,\ \ x_1'' = 3,6,\ x_2'' = 2,6.$$

За умовою задачі $x_1 < x_2$, то беремо $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

Тоді закон розподілу випадкової величини X:

X	2	3
P	0,2	0,8

$\blacklozenge$

Питання для самоперевірки

1. Які числові характеристики має дискретна випадкова величина?
2. Який ймовірнісний зміст математичного сподівання? Наведіть формулу для обчислення математичного сподівання ДВВ.
3. Сформулюйте властивості математичного сподівання випадкової величини.
4. Який ймовірнісний зміст дисперсії та середнього квадратичного відхилення?
5. Дайте означення дисперсії та сформулюйте її властивості.
6. Які є формули для обчислення дисперсії? Яка, на вашу думку, є зручніша при обчисленні?
7. Чи може дисперсія бути від'ємною? Середньо квадратичне відхилення?
8. Запишіть формулу для обчислення середнього квадратичного відхилення.

Завдання для самостійного виконання

1. Математичне сподівання дтскретної випадкової величини X дорівнює $M(X) = 2$. Знайти $M(3X + 1)$.

2. Дисперсії незалежних випадкових величин X та Y дорівнюють $D(X) = 4$ і $D(Y) = 5$. Знайти $D(X - Y)$.

3. У коробці знаходиться 9 однакових за розміром куль, з яких 4 — червоного кольору. Навмання відібрано три кулі. Випадкова величина X — число куль червоного кольору серед відібраних. Знайти закон розподілу даної випадкової величини та обчислити її числові характеристики.

4. Два баскетболісти виконують по черзі по одному штрафному кидку. Ймовірність влучення першого дорівнює 0,7, другого — 0,6. Випадкова величина X — число закинутих м'ячів. Знайти закон розподілу даної випадкової величини і обчислити її числові характеристики.

5. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом години уваги не вимагає перший верстат — 0,2, другий — 0,4 і третій — 0,7. Випадкова величина X — число верстатів, які вимагають уваги робітника протягом години. Знайти закон розподілу даної випадкової величини та обчислити її числові характеристики.

6. Ймовірність появи події A в одному випробуванні на 40% більша від числа 0,4. Випадкова величина X — число появ події A при проведенні трьох випробувань. Знайти закон розподілу даної випадкової величини та обчислити її числові характеристики.

7. Екзаменаційний білет складається з трьох питань. Ймовірність того, що студент знає відповідь на перше питання, дорівнює 0,9; на друге — 0,8; на третє — 0,7. Випадкова величина X — число питань у екзаменаційному білеті, на які відповість студент. Знайти закон розподілу даної випадкової величини та обчислити її числові характеристики.

8. По мішені проведено три постріли. Ймовірність влучення в мішень при першому пострілі дорівнює 0,1, при другому — 0,2, при третьому — 0,3. Знайти закон розподілу випадкової величини X — кількості влучень при трьох пострілах та обчислити її числові характеристики.

9. Знайти математичне сподівання випадкової величини X, що задана законом розподілу:

X	-1	0	2	5
P	$0,1$	$0,3$	?	0,2

10. Стрілець двічі стріляє в мішень. Ймовірність влучення при кожному пострілі однакова. Знайти цю ймовірність, якщо випадкова величина X — кількість влучень в мішень, а $M(X) = 1,6$.

11. Дискретна випадкова величина X може приймати два значення x_1, x_2, причому $x_1 < x_2$. Відомо, що $p_1 = 0,1$, $M(X) = 3,9$, $D(X) = 0,09$. Знайти закон розподілу випадкової величини X.

12. Ймовірність того, що студент складе іспит на "5"дорівнює 0,2, на "4" — 0,4. Знайти $D(X)$, якщо $M(X) = 3,7$, а випадкова величина X — оцінка, одержана студентом на екзамені.

2.3 Функції розподілу випадкових величин

Поряд із законом розподілу для опису розподілу ймовірностей випадкової величини використовується **функція розподілу**.

Означення 2.8 ***Функцією розподілу ймовірностей*** *випадкової величини X або* ***інтегральною функцією*** *називається ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуває значення, меншого за аргумент x, тобто*

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in R.$$

Зауваження 2.3 *Дане означення функції розподілу є спільним як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.*

Властивості інтегральної функції розподілу $F(x)$

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;
2. функція розподілу є неспадна: якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) < F(x_2)$;
3. ймовірність попадання випадкової величини X у півінтервал $[\alpha; \beta)$ дорівнює різниці значень функції розподілу в цих точках:

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

4. якщо можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $(a; b)$, то

$$F(x) = 0, \text{ при } x \leqslant a \text{ і } F(x) = 1, \text{ при } x \geqslant b.$$

Для ДВВ X інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i, \quad x \in R,$$

тобто $F(x)$ дорівнює сумі ймовірностей значень X, що менші за x (лежать зліва від x). Таким чином, функція розподілу ймовірностей ДВВ є кусково-сталою, а тому графік має ступінчастий вигляд.

Приклад 2.10 *Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:*

X	0	1	2	3	4
P	$0,05$	0,1	0,2	0,3	0,35

Знайти інтегральну функцію розподілу та побудувати її графік. Обчислити ймовірність того, що X не менше 1 і менше 3.

◊ За означення інтегральної функції розподілу $F(x) = P(X < x)$ одержимо:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0; \\ 0,05, & \text{при } 0 < x \leqslant 1; \\ 0,15, & \text{при } 1 < x \leqslant 2; \\ 0,35, & \text{при } 2 < x \leqslant 3; \\ 0,65, & \text{при } 3 < x \leqslant 4; \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Тоді графік інтегральної функції $F(x)$:

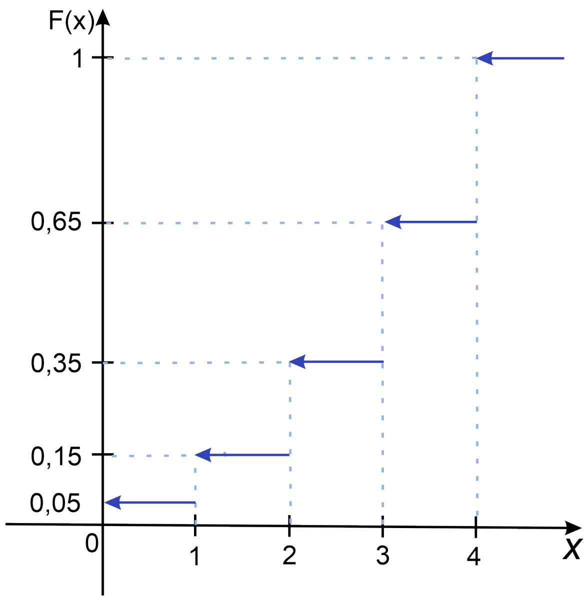

Рис. 2.3: графік інтегральної функції розподілу

Обчилюємо $P(1 \leqslant X < 3)$:

$$P(1 \leqslant X < 3) = F(3) - F(1) = 0,35 - 0,05 = 0,3$$

♦

У випадку неперервної випадкової величини для її повної характеристики вводять інтегральну та диференціальну функції розподілу.

Зауваження 2.4 *Неперервна випадкова величина X, що набуває значення з інтервалу $(a; b)$, має незліченну кількість можливих значень, тому набуття X певних значень, наприклад, $X = a$ або $X = b$ — це події з нульовою ймовірністю. Це означає, $P(X = a) = 0$ та $P(X = b) = 0$. З огляду на це справедливі нерівності*

$$P(a < x < b) = P(a \leqslant x < b) = P(a < x \leqslant b) = P(a \leqslant x \leqslant b).$$

Використовуючи інтегральну функцію розподілу, можна сформулювати ще одне означення неперервної випадкової величини.

Означення 2.9 ***Неперервною*** *називається випадкова величина, яка задається неперервною інтегральною функцією розподілу.*

Означення 2.10 ***Диференціальною функцією розподілу*** *або* ***щільністю розподілу*** *називається перша похідна від інтегральної функції розподілу, тобто функція*

$$f(x) = F'(x), \quad x \in R.$$

Властивості диференціальної функції розподілу

1. диференціальна функція є невід'ємною, тобто $f(x) \geqslant 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$;
3. якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини належать інтервалу $(a; b)$, то $\int_a^b f(x)\, dx = 1$;
4. $P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx$;

Графік диференціальної функції розподілу називають **кривою розподілу**.

За відомою диференціальною функцією розподілу можна знайти інтегральну:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Приклад 2.11 *Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0,5; \\ x^2 - x + 0,25, & \text{при } 0,5 < x \leqslant 1,5; \\ 1, & \text{при } x > 1,5. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу, побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу. Використовуючи функції $F(x)$ та $f(x)$, обчислити ймовірність попадання значень випадкової величини в інтервал $(1; 2)$.

$\Diamond$ За означенням $f(x) = F'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0,5; \\ 2x-1, & \text{при } 0,5 < x \leqslant 1,5; \\ 0, & \text{при } x > 1,5. \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій розподілу:

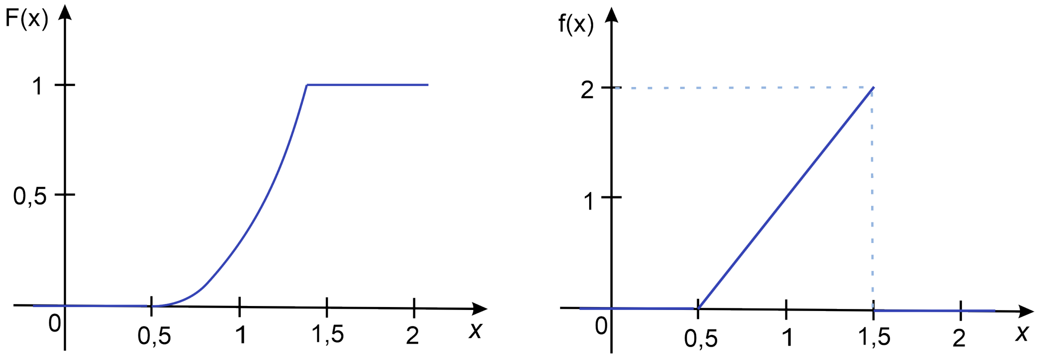

Рис. 2.4: графіки інтегральної $F(x)$ та диференціальної $f(x)$ функцій розподілу

Для обчислення ймовірності $P(1 < X < 2)$ скористаємося формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Значення $x = 1$ належить півінтервалу $(0,5; 1,5]$, на якому $F(x) = x^2 - x + 0,25$, тому $F(1) = 0,25$. Значення $x = 2$ належить інтервалу $(1,5; +\infty)$, на якому $F(x) = 1$, тому $F(2) = 1$.

Тоді $P(1 < X < 2) = 1 - 0,25 = 0,75$.

Знайдемо $P(1 < X < 2)$, використовуючи диференціальну функцію розподілу, а саме за формулою:

$$P(\alpha \leqslant x \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx,$$

$$P(1 \leqslant x \leqslant 2) = \int_{1}^{1,5} (2x-1)\,dx + \int_{1,5}^{2} 0\,dx = x^2 - x|_1^{1,5} = 2,25 - 1,5 - 1 + 1 = 0,75.$$

$\blacklozenge$

Приклад 2.12 *Неперервна випадкова величина X задана своєю щільністю розподілу*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(1-x^2), & \textit{при } x \in (-1;1]; \\ 0, & \textit{при } x \notin (-1;1]. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

$\Diamond$ Щоб знайти інтегральну функцію розподілу потрібно провести інтегрування щільності розподілу. Для зручності диференціальну функцію $f(x)$ запишемо у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant -1; \\ \dfrac{3}{4}(1-x^2), & \text{при } -1 < x \leqslant 1; \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Згідно формули $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ отримаємо:

при $x \leqslant -1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0;$

при $-1 < x \leqslant -1$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-t^2)\,dt = \frac{3}{4}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\,x - \frac{1}{4}\,x^3 + \frac{1}{2};$$

при $x > 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \dfrac{3}{4}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = \dfrac{3}{4}\left(t - \dfrac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 1.$

Остаточно інтегральна функція розподілу НВВ Х має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant -1; \\ \dfrac{1}{4}(3x - x^3 + 2), & \text{при } -1 < x \leqslant 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що перший і третій рядки функції можна було заповнити, не проводячи обчислень, а використовуючи властивості функції. ♦

Приклад 2.13 *Неперервна випадкова величина X задана своєю щільністю розподілу*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \textit{при } x \in (0;2]; \\ 0, & \textit{при } x \notin (0;2]. \end{cases}$$

Визначити параметр a та ймовірність попадання X в сегмент $[0;1]$*, інтервал* $(1;3)$ *та півінтервал* $(-1;1,5]$.

◊ Для знаходження параметра скористаємося властивістю щільності розподілу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} ax^2\,dx = a \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{2} = \frac{8a}{3},$$

$$\frac{8a}{3} = 1, \quad a = \frac{3}{8}.$$

Тоді щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2, & \text{при } x \in (0;2]; \\ 0, & \text{при } x \notin (0;2]. \end{cases}$$

Для обчислення ймовірностей попадання випадкової величини в заданий інтервал використаємо формулу:

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$P(0 \leqslant x \leqslant 1) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{8};$$

$$P(1 < x < 3) = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{3}{8}x^2\,dx + \int_2^3 0\,dx = \frac{x^3}{8}\bigg|_1^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8};$$

$$P(-1 < x \leqslant 1,5) = \int_{-1}^{1,5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_0^{1,5} \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{1,5} = \frac{27}{64}.$$

♦

Питання для самоперевірки

1. Яка функція розподілу описує ДВВ?
2. Сформулюйте означення інтегральної функції роподілу.
3. Які основні властивості інтегральної функції розподілу?
4. Який графік інтегральної функції розподілу ДВВ?
5. Які функції розподілу описують НВВ?
6. Як можна сформулювати означення НВВ, використовуючи інтегральну функцію розподілу?
7. Дайте означення щільності розподілу та сформулюйте її властивості.
8. Як знайти інтегральну функцію розподілу, якщо відома щільність розподілу?

Завдання для самостійного виконання

1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	2	5	7	10
P	$0,3$	$0,2$	0,4	0,1

   Знайти інтегральну функцію розподілу та побудувати її графік.

2. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 1; \\ 0,5(x^2 - x), & \text{при } 1 < x \leqslant 2; \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу, побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу.

3. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{при } x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ 0, & \text{при } x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу НВВ X.

4. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу $f(x) = ax$ в інтервалі $(0; 2)$, поза інтервалом $f(x) = 0$. Знайти параметр a та побудувати графік функції $f(x)$.

5. Інтегральна функція розподілу НВВ X має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 1; \\ a(x-1), & \text{при } 1 < x \leqslant 4; \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Знайти параметр a, визначити щільність розподілу та побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$. Знайти ймовірності попадання НВВ X у проміжки $[3; 7]$, $(2; 3)$, $(0; 2]$.

6. Дана функція

$$f(x) = \begin{cases} a\sin 3x, & \text{при } x \in \left(0; \dfrac{\pi}{3}\right]; \\ 0, & \text{при } x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

При якому значенні параметр a функція може бути щільністю розподілу? Знайти інтегральну функцію розподілу. Обчислити ймовірності попадання НВВ X у проміжки $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\left(0; \dfrac{\pi}{6}\right)$.

7. НВВ X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0; \\ 2^x, & \text{при } 0 < x \leqslant 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

   Знайти диференціальну функцію розподілу. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$. Обчислити ймовірності $P(-0,5 < X < 0,5)$, $P(0,5 \leqslant X \leqslant 1)$.

8. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 5; \\ \dfrac{x-5}{3}, & \text{при } 5 < x \leqslant 8; \\ 1, & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

   Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення з інтервалу $(4;7)$.

9. Баскетболіст закидує м'яч у кошик з ймовірністю 0,7. Знайти функцію розподілу випадкової величини X — кількості влучень у кошик, якщо баскетболіст виконує три кидки. Побудувати графік функції розподілу.

10. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x) = x^2 - 4x + 4$. Визначити область значень випадкової величини X та ймовірність того, що $X \geqslant 2,3$.

2.4 Числові характеристики неперервних випадкових величин

Поняття математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення неперервної випадкової величини визначаються і мають такий же зміст, як і для дискретної випадкової величини. Але у зв'язку із нескінченою множиною можливих значень НВВ, формули обчислення числових характеристик є інтегральними.

Означення 2.11 ***Математичним сподіванням M(X)*** *НВВ X, яка задана щільністю розподілу $f(x)$, називається*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx,$$

якщо цей інтеграл є абсолютно збіжним. Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X належать проміжку $[a;b]$, то

$$M(X) = \int_a^b x\, f(x)\, dx.$$

Зауваження 2.5 *Якщо можливі значення випадкової величини X належать відрізку $[a; b]$, то центр розподілу M(X) величини X знаходиться на цьому проміжку, тобто $a < M(X) < b$.*

Якщо щільність ймовірностей $f(x)$ — парна функція, то центр розподілу X співпадає з початком $M(X) = 0$. Якщо графік функції $f(x)$ симетричний відносно прямої $x = a$, то $M(X) = a$.

Означення 2.12 ***Дисперсією D(X)*** *НВВ X, яка задана щільністю розподілу $f(x)$, називається*

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \; f(x)\, dx,$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X належать проміжку $[a; b]$, то

$$D(X) = \int_{a}^{b} (x - M(X))^2 \; f(x)\, dx.$$

Для обчислення дисперсії зручніше користуватися формулами:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - (M(X))^2,$$

Якщо $X \in [a; b]$, то

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)\, dx - (M(X))^2.$$

Незмінною залишається формула для обчислення середнього квадратичного відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Приклад 2.14 *Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка задана інтегральною функцією розподілу:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{при } \; x \leqslant 0; \\ \dfrac{x^2}{25}, & \textit{при } \; 0 < x \leqslant 5; \\ 1, & \textit{при } \; x > 5. \end{cases}$$

$\Diamond$ За означенням $f(x) = F'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } \; x \leqslant 0; \\ \dfrac{2x}{25}, & \text{при } \; 0 < x \leqslant 5; \\ 0, & \text{при } \; x > 5. \end{cases}$$

Оскільки $f(x) \neq 0$ при $X \in (0; 5]$, то для обчислення математичного сподівання скористаємося формулою $M(X)=\int_a^b x\,f(x)\,dx$:

$$M(X)=\int_0^5 x\cdot\frac{2x}{25}\,dx=\frac{2}{25}\int_0^5 x^2\,dx=\frac{2}{25}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^5=\frac{10}{3}.$$

Для обчислення дисперсії використаємо формулу $D(X)=\int_a^b x^2\,f(x)\,dx-(M(X))^2$:

$$D(X)=\int_0^5 x^2\cdot\frac{2x}{25}\,dx-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{2}{25}\int_0^5 x^3\,dx-\frac{100}{9}=\frac{2}{25}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^5-\frac{100}{9}=\frac{125}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{125}{18}}=\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}\approx 2,64.$$

♦

Приклад 2.15 *Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу*

$$f(x)=\begin{cases}0, & \textit{при}\;\; x\leqslant -1;\\ \dfrac{a}{1+x^2}, & \textit{при}\;\; -1<x\leqslant 1;\\ 0, & \textit{при}\;\; x>1.\end{cases}$$

Знайти числові характеристики випадкової величини X.

◊ Спочатку знаходимо значення параметра a. Для цього скористаємося властивістю диференціальної функції розподілу: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$. Тоді

$$\int_{-1}^{1}\frac{a}{1+x^2}\,dx=1;\;\; a\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=1$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg}x|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$a\cdot\frac{\pi}{2}=1,\;\; a=\frac{2}{\pi}.$$

Таким чином, щільність розподілу випадкової величини X задається функцією:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при}\;\; x\leqslant -1;\\ \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}, & \text{при}\;\; -1<x\leqslant 1;\\ 0, & \text{при}\;\; x>1.\end{cases}$$

Обчислюємо числові характеристики:

$$M(X) = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{\pi} \ln|1+x^2| \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}(\ln 2 - \ln 2) = 0.$$

Цей інтеграл можна було і не обчислювати. Оскільки підінтегральна функція непарна, а межі інтегрування є симетричні, то такий визначений інтеграл рівний нулю.

$$D(X) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{1} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{4}{\pi}\left(x - \operatorname{arctg} x\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0,27.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,27} \approx 0,52.$$

♦

Питання для самоперевірки

1. Що таке математичне сподівання випадкової величини? За якими формулами обчислюється математичне сподівання НВВ?
2. Що таке дисперсія випадкової величини? Які формули використовуються для обчислення дисперсії НВВ?
3. Як характеризує випадкову величину середнє квадратичне відхилення? За якою формулою обчислюється?

Завдання для самостійного виконання

1. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0; \\ \sqrt[3]{x}, & \text{при } 0 < x \leqslant 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

   Знайти числові характеристики випадкової величини X.

2. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(1 - x^2)\,, & \text{при } x \in (-1; 1]; \\ 0, & \text{при } x \notin (-1; 1]. \end{cases}$$

   Знайти числові характеристики випадкової величини X.

3. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу $f(x) = ax$ в інтервалі $(1; 4)$, поза інтервалом $f(x) = 0$. Знайти параметр a та обчислити числові характеристики випадкової величини X.

4. НВВ X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} x + ax^2, & \text{при } x \in (1;2]; \\ 0, & \text{при } x \notin (1;2]. \end{cases}$$

Знайти невідомий параметр a та обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$.

5. Знайти числові характеристики неперервної випадкової величини X, заданої диференціальною функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(6x - 2x^2), & \text{при } x \in (0;3]; \\ 0, & \text{при } x \notin (0;3]. \end{cases}$$

6. Знайти числові характеристики неперервної випадкової величини X, заданої диференціальною функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & \text{при } x \in (1;2]; \\ 0, & \text{при } x \notin (1;2]. \end{cases}$$

7. Час очікування (хв) між пасажирами, що стають у чергу за квитками, є неперервна випадкова величина X, розподіл якої задано інтегральною функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0; \\ \dfrac{x}{10}, & \text{при } 0 < x \leqslant 10; \\ 1, & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

Знайти середній час очікування $M(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

8. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу $f(x) = a(x^2 + 2x)$ в інтервалі $(0;2)$, поза інтервалом $f(x) = 0$. Знайти параметр a та обчислити числові характеристики випадкової величини X.

2.5 Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

Деякі розподіли ймовірностей є дуже важливими, оскільки відповідні випадкові величини використовуються для моделювання різних процесів, розв'язання широкого кола практичних задач.

До основних законів розподілу дискретних випадкових величин відносять: біноміальний, розподіл Пуассона та геометричний.

Біноміальний розподіл. Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A може відбутися із ймовірністю p. Нехай дискретна випадкова величина X — це число появ події A у цій серії випробувань. ДВВ X може набувати значень: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$,..., $x_{n+1} = n$, ймовірності яких обчислюються за формулою Бернуллі.

Означення 2.13 ***Біноміальним*** *називається розподіл ймовірностей, що описує кількість появ події A у схемі незалежних випробувань Бернуллі і розраховується за формулою:*

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \;\; k = 0, 1, 2, ..., n,$$

де n — кількість незалежних випробувань, у кожному з яких певна подія A може з'явитися із ймовірністю p і не відбутися із ймовірністю $q = 1 - p$; k— кількість появ події A.

Числа $n \in Z_+$ — кількість випробувань і $0 \leqslant p \leqslant 1$ — ймовірність появи події A називаються *параметрами біноміального розподілу.*

Наприклад 2.4 *1) випадкова величиниа X — кількість влучень стрільцем при здійсненні $n = 5$ пострілів, якщо ймовірність влучення $p = 0,9$, розподілена за біноміальним законом*

$$P(X = k) = P_5(k) = C_5^k \, (0,9)^k \, (0,1)^{5-k}, \;\; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$$

2) X — кількість X "гербів", що випадуть при киданні трьох монет ($n = 3$, $p = 0,5$), розподілена за законом

$$P(X = k) = P_3(k) = C_3^k \, (0,5)^k \, (0,5)^{3-k}, \;\; k = 0, 1, 2, 3.$$

Для біноміального розподілу числові характеристики обчислюються за формулами:

- математичне сподівання $M(X) = np$;

- дисперсія $D(X) = npq = np(1 - p)$;

- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1 - p)}$.

Приклад 2.16 *У партії 10% нестандартних виробів. Навмання вибрали 4 вироби. Записати закон розподілу випадкової величини X — кількості нестандартних виробів серед чотирьох вибраних та обчислити $M(X)$, $D(X)$,$\sigma(X)$.*

$\Diamond$ Випадкова величина X може набувати значень: 0; 1; 2; 3; 4. За умовою задачі $n = 4$, $p = 0,1$, тоді $q = 1 - 0,1 = 0,9$.

За формулою Бернуллі обчислюємо відповідні ймовірності значень випадкової величини X:

$$P(X=0)=P_4(0)=q^4=(0,9)^4=0,6561;$$
$$P(X=1)=P_4(1)=C_4^1\,p\cdot q^3=4\cdot 0,1\cdot(0,9)^3=0,2916;$$
$$P(X=2)=P_4(2)=C_4^2\,p^2\cdot q^2=6\cdot(0,1)^2\cdot(0,9)^2=6\cdot 0,01\cdot 0,81=0,0486;$$
$$P(X=3)=P_4(3)=C_4^3\,p^3\cdot q=4\cdot(0,1)^3\cdot 0,9=4\cdot 0,001\cdot 0,9=0,0036;$$
$$P(X=4)=P_4(4)=p^4=(0,1)^4=0,0001.$$

Тоді ряд розподілу для випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	3	4
P	$0,6561$	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Перевірка: $0,6561+0,2916+0,0486+0,0036+0,0001=1$.

Обчислюємо числові характеристики:

$$M(X)=np=4\cdot 0,1=0,4;$$

$$D(X)=npq=4\cdot 0,1\cdot 0,9=0,36;$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,36}=0,6.$$

♦

Розподіл Пуассона. Якщо в схемі незалежних випробувань n досить велике число, а p або $1-p$ прямує до нуля, то біноміальний закон розподілу апроксимує розподіл Пуассона.

Означення 2.14 ***Пуассонівським*** *або* ***розподілом Пуассона*** *називається розподіл ймовірностей, що описує число малоймовірних подій у великій кількості випробувань і задається формулою:*

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,...,n.$$

Число $\lambda>0$ називається *параметром розподілу Пуассона.*

Числові характеристики випадкової величини X, що розподілена за законом Пуассона обчислюються за формулами:
- математичне сподівання $M(X)=\lambda$;
- дисперсія $D(X)=\lambda$;
- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$.

Розподіл Пуассона має широке застосування у задачах статистичного контролю якості, в теорії надійності, теорії масового обслуговування, для прогнозування кількості вимог на виплату страхових компенсацій за рік, кількості дефектів в однакових виробах.

Приклад 2.17 *Перевіряється партія із 10 000 виробів. Ймовірність того, що виріб буде* *бракованим, дорівнює 0,003. Знайти середню кількість (математичне сподівання) та дисперсію кількості бракованих виробів у цій партії.*

$\Diamond$ Кількість виробів ($n = 10000$) велика, а ймовірність ($p = 0,003$) достатньо мала. Тому можна вважати, що випадкова величина X — кількість бракованих виробів розподілена за законом Пуассона.

Тоді математичне сподівання дорівнює:

$$M(X) = 10000 \cdot 0,003 = 30.$$

Тобто середня кількість бракованих виробів дорівнює 30. Дисперсія кількості бракованих виробів буде такою самою $D(X) = \lambda = 30$. $\blacklozenge$

Геометричний розподіл. Нехай проводиться серія випробувань, у кожному з яких подія A може з‘явитися із ймовірністю p і не з'явитися із ймовірністю $q = 1 - p$. Випробування зупиняється при першій появі події A. Нехай дискретна випадкова величина X — це кількість випробувань, необхідних для появи події A. Множина можливих значень X: 1; 2; 3;... — необмежена, а ймовірність дорівнює $p_1 = p$, $p_2 = qp$, $p_2 = q^2p$, ...

Означення 2.15 ***Геометричним*** *називається розподіл ймовірностей, що описує кількість спроб, які необхідні для першої появи події A в схемі незалежних випробувань Бернуллі. Геометричний закон розподілу дискретної випадкової величини X визначається формулою:*

$$P(X = k) = p\,q^{k-1} = p\,(1-p)^{k-1}, \;\; k = 1, 2, ...,$$

де p — ймовірність появи події A, $q = 1 - p$.

Число $0 < p < 1$ — ймовірність появи події A є єдиним *параметром геометричного розподілу.*

Наприклад 2.5 *1) випадкова величина X — кількість пострілів, що потрібно зробити стрільцю до першого ураження мішені, якщо ймовірність влучення $p = 0,6$, розподілена за законом*

$$P(X = k) = 0,6\,(0,4)^{k-1}, \;\; k = 1, 2, 3, 4, ...;$$

2) X — кількість підкидань кубика, що необхідно зробити до першого випадання трьох очок ($p = \frac{1}{6}$), має розподіл:

$$P(X = k) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}, \;\; k = 1, 2, 3, ...$$

Числові характеристики випадкової величини X, що має геометричний розподіл, обчислюються за формулами:

- математичне сподівання $M(X) = \dfrac{1}{p}$;

- дисперсія $D(X) = \dfrac{q}{p^2}$;

- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{q}}{p}$.

Приклад 2.18 *Виконується стрільба по цілі до першого влучення. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,3. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X — кількості виконаних пострілів, якщо кількість патронів необмежена.*

$\lozenge$ Випадкової величини X — кількості виконаних пострілів до першого влучення має геометричний розподіл, причому $p = 0,3$, $q = 0,7$.

Математичне сподівання дорівнює:

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3} \approx 3.$$

Тобто середня кількість використаних патронів до першого влучення дорівнює 3.

Дисперсія кількості використаних патронів

$$D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,7}{0,09} = \frac{70}{9} \approx 8.$$

. Отже, $M(X) = 3$, $D(X) = 8$. $\blacklozenge$

Питання для самоперевірки

1. Який розподіл ДВВ називається біноміальним? За якою формулою обчислюються ймовірності значень випадкової величини?
2. Якими параметрами задається біноміальний розподіл?
3. За якими формулами розраховуються значення математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення?
4. Що описує розподіл Пуассона і за якою формулою обчислюються ймовірності?
5. Вкажіть параметр, що визначає пуассонівський розподіл.
6. Які формули для обчислення числових характеристик випадквої величини X, розподіленої за законом Пуассона?
7. Який розподіл ДВВ називається геометричним? За якою формулою обчислюються ймовірності значень випадкової величини?
8. Яким параметром визначається геометричний розподіл?

9. За якими формулами розраховуються числові характеристики геометричного розподілу?

Завдання для самостійного виконання

1. Випадкова величина X — число хлопчиків у сім'ї з трьома дітьми. Скласти закон розподілу випадкової величини X та обчислити числові характеристики.

2. На контроль надійшла партія деталей із цеху. Відомо, що 10% деталей не відповідають стандарту. Випадково взяли чотири деталі. Написати закон розподілу випадкової величини X — кількості нестандартних деталей з чотирьох вибраних. Знайти числові характеристики випадкової величини X.

3. Акції підприємств планують придбати чотири інвестори. Ймовірність відмови від покупки акцій кожного з інвесторів дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу кількості інвесторів, які можуть відмовитися від купівлі акцій. Знайти ймовірність, що від покупки акцій відмовиться принаймні один інвестор.

4. Гральний кубик підкидують 12 разів. Знайти: середню кількість випадань "6"; дисперсію кількості випадань "6"; середнє квадратичне відхилення кількості випадань "6".

5. Випадкова величина X — кількість влучень у мішень при п'яти пострілах. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,4. Знайти середню кількість влучень при проведених п'яти пострілах.

6. Обчислити математичне сподівання та дисперсію числа виграшних лотерейних білетів, якщо придбали 20 білетів, а ймовірність виграшу на один білет дорівнює 0,4.

7. ДВВ X розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = 0,324$. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Завод відправив на базу 5 000 доброякісних виробів. Ймовірність того, що при перевезенні виріб зазнає пошкодження дорівнює 0, 0002. Знайти середнє число пошкоджених виробів, що прибудуть на базу.

9. У коробці є 4 чорні і 1 біла куля. Скласти закон розподілу числа виймань куль до появи білої кулі у двох випадках: а) після виймання кулю не повертають у коробку; б) повертають до коробки. Обчислити числові характеристики випадкових величин.

10. Відділ технічного контролю заводу перевіряє продукцію на стандартність до першого браку. Ймовірність появи браку дорівнює 0,2. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості перевірених виробів до першої появи браку. Обчислити числові характеристики випадкової величини X.

2.6 Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

До основних законів розподілу неперервних випадкових величин відносять: рівномірний, показниковий та нормальний.

Рівномірний розподіл. Рівномірний розподіл описує ситуації, коли ймовірність появи будь-якого значення в заданому інтервалі однакова.У цьому випадку випадкова величина може приймати будь-які значення з інтервалу, причому всі точки цього інтервалу рівноймовірні.

Означення 2.16 *Неперервна випадкова величина X розподілена* ***рівномірно*** *на проміжку $[a;b]$, якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і щільність розподілу її ймовірностей має вигляд:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a;b]; \\ 0, & \text{при } x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Числа a та b називаються *параметрами рівномірного розподілу.*

Інтегральна функція рівномірного розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a < x \leqslant b; \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Для рівномірного розподілу числові характеристики обчислюються за формулами:
- математичне сподівання $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$;
- дисперсія $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$;
- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{3}(b-a)}{6}$.

Ймовірність попадання рівномірно розподіленої випадкової величини в інтервал $(\alpha;\beta)$ дорівнює:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Приклад 2.19 *Випадкова величина X має рівномірний розподіл, який задається щільністю ймовірностей:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{при } x \in [2;6]; \\ 0, & \text{при } x \notin [2;6]. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

◊ Випадкова величина X має рівномірний розподіл. Тому

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{2+6}{2} = 4;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(6-2)^2}{12} = \frac{4}{3}.$$

Отже, $M(X) = 4$, $D(X) = \frac{4}{3}$. ♦

Показниковий розподіл. Показниковий розподіл має широке застосування в теорії надійності та теорії масового обслуговування. Даний розподіл описує час між послідовними подіями у процесах, що відбуваються з потійною середньою інтенсивністю.

Означення 2.17 *Неперервна випадкова величина X має* ***показниковий*** *або* ***експоненціальний*** *розподіл, якщо її щільність розподілу задається функцією:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geqslant 0; \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Число λ називається *параметром показникового розподілу.*

Інтегральна функція розподілу задається формулою:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Для показникового розподілу числові характеристики обчислюються за формулами:
- математичне сподівання $M(X) = \frac{1}{\lambda}$;
- дисперсія $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$;
- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Ймовірність попадання випадкової величини, розподіленої за показниковим розподілом, в інтервал $(\alpha; \beta)$ обчислюємо за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\,\alpha} - e^{-\lambda\,\beta}.$$

Приклад 2.20 *Час безвідмовної роботи деякого приладу — показниково розподілена випадкова величина T з параметром $\lambda = 0,02$. Знайти ймовірність того, що прилад працюватиме безвідмовно не менше 100 годин.*

◊ Оскільки випадкова величина X має показниковий розподіл, то для обчислення ймовірності $P(T \geqslant 100)$ використаємо формулу:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\, a} \;-\; e^{-\lambda\, b}.$$

$P(T \geqslant 100) = 1 - P(T < 100) = 1 - P(0 < T < 100) = 1 - (e^{-0{,}02 \cdot 0} - e^{-0{,}02 \cdot 100}) = 1 - 1 + e^{-2} = 0{,}1353.$

Отже, $P(T \geqslant 100) = 0{,}1353$. ♦

Приклад 2.21 *Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом*

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & при \;\; x \geqslant 0; \\ 0, & при \;\; x < 0. \end{cases}$$

◊ Для показникового розподілу випадкової величини з параметром $\lambda = 4$ маємо:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0{,}25;$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$

Отже, $M(X) = 0{,}25$, $D(X) = 0{,}0625$. ♦

Нормальний розподіл. Нормальний закон розподілу ще називають законом Гаусса і він відіграє важливу роль в теорії ймовірностей та серед інших законів займає особливе місце. Головна його особливість полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу. Універсальність нормального закону пояснюється тим, що будь-яка випадкова величина, яка є сумою великої кількості окремих числових значень, кожне з яких підпорядковується різним законам розподілу і несуттєво впливає на суму, розподілена майже за нормальним законом.

Означення 2.18 *Неперервна випадкова величина X називається* ***розподіленою нормально****, якщо її диференціальна функція розподілу ймовірностей має вигляд:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

де a — математичне сподівання , σ — середнє квадратичне відхилення нормального розподілу.

Числа a, σ називаються *параметрами нормального розподілу.*

Графік функції $f(x)$ називають *нормальною кривою* або *кривою Гаусса.*

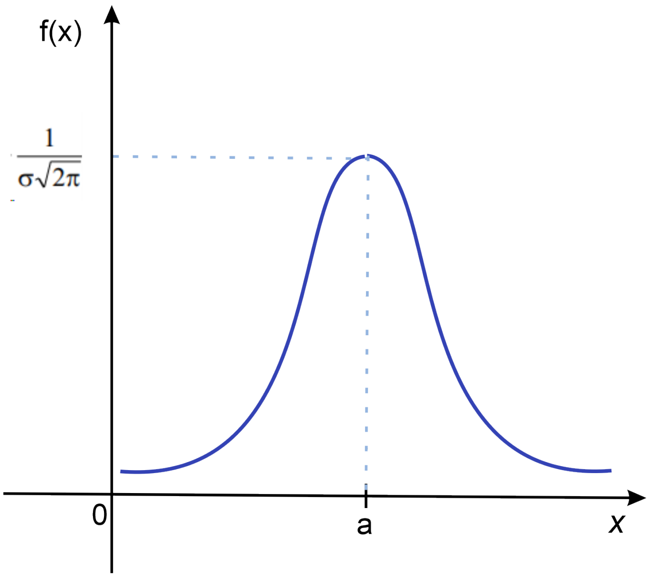

Рис. 2.5: нормальна крива

Нормальна крива при $x = a$ досягає максимуму $f(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ і є симетрична відносно прямої $x = a$.

Інтегральна функція розподілу задається формулою:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Нормальний закон розподілу повністю визначається математичним сподіванням та дисперсією (середнім квадратичним відхиленням): $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$.

Для нормального розподілу ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(\alpha; \beta)$ обчислюється за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

де $\Phi(x)$ — функція Лапласа, значення якої визначаємо по Таблиці 2.

Для випадкової величина, яка розподілена за нормальним закон, важливим є "правило трьох сигм": *майже достовірно, що нормально розподілена випадкова величина може відхилятися від свого математичного сподівання не більше, ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення*

$$P\left(|X - a| \leqslant 3\sigma\right) = 0,997.$$

На практиці це правило використовують так: *якщо закон розподілу випадкової величини X невідомий, але $|X - a| \leqslant 3\,\sigma$, тоді можна припустити, що X розподілена нормально.*

Приклад 2.22 *Зріст студентів групи розподілено за нормальним законом, причому $a = 175$см, $\sigma = 6$см. Визначити ймовірність того, що навмання вибраний із групи* *студент матиме зріст від 170 до 180 см.*

$\Diamond$ Випадкової величини X — зріст студентів. Тоді для обчислення $P(170 < X < 180)$ використаємо формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$$P(170 < X < 180) = \Phi\left(\frac{180-175}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-175}{6}\right) = \Phi\left(\frac{5}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{6}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{6}\right) = 0,5934.$$

Отже, шукана ймовірність рівна 0,5934. $\blacklozenge$

Питання для самоперевірки

1. Який розподіл НВВ називається рівномірним?
2. Як записується інтегральна та диференціальні функції рівномірного розподілу?
3. Якими параметрами задається рівномірний розподіл?
4. За якими формулами розраховуються значення математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення для рівномірного розподілу?
5. Як обчислюється ймовірність попадання рівномірно розподіленої випадкової величини в заданий інтервал?
6. Сформулюйте означення показникового розподілу і запишіть формули, якими задається диференціальна та інтегральна функції розподілу.
7. Який параметр визначає показниковий розподіл?
8. Які формули для обчислення числових характеристик показниково розподіленої випадкової величини X?
9. Як обчислюється ймовірність попадання показникової випадкової величини в заданий інтервал?
10. Як визначається нормальний розподіл? Якою формулою задається щільність розподілу та функція розподілу?
11. Які параметри визначають нормальний розподіл?
12. Як обчислюється ймовірність попадання нормальної випадкової величини в заданий інтервал?

Завдання для самостійного виконання

1. Неперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл і задана інтегральною функцією розподілу:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0; \\ \dfrac{x}{3}, & \text{при } 0 < x \leqslant 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$
Записати диференціальну функцію розподілу та обчислити числові характеристики.

2. Випадкова величина X має рівномірний розподіл і задана інтегральною функцією розподілу:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 4; \\ \dfrac{Ax-8}{6}, & \text{при } 4 < x \leqslant 7; \\ 1, & \text{при } x > 7. \end{cases}$$
Знайти а) параметр А; б) дисперсію; в) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(5;6)$.

3. Неперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл і задана щільністю розподілу:
$$f(x) = \begin{cases} C, & \text{при } x \in (2;7]; \\ 0, & \text{при } x \notin (2;7]. \end{cases}$$
Знайти а) параметр С; б) функцію розподілу; в)$M(X)$; г) побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X має показниковий розподіл і задана функцією розподілу:
$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-5x}, & \text{при } x \geqslant 0; \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$
Знайти диференціальну функцію розподілу та обчислити числові характеристики.

5. Випадкова величина X, розподілена за показниковим розподілом
$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{при } x \geqslant 0; \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$
Знайти ймовірність того, що X потрапить в інтервал $(0,4;1)$.

6. Дисперсія випадкової величини X, яка має показниковий розподіл, дорівнює $\dfrac{1}{16}$. Записати інтегральну та диференціальну функції розподілу.

7. Час роботи приладу має показниковий розподіл. Знайти ймовірність його безвідмовної роботи протягом 600 годин, якщо середній час роботи приладу — 400 годин.

8. Випадкова величина X — тривалість роботи елемента має щільність розподілу $f(x) = 0,003e^{-0,003t}$, $t > 0$. Знайти а) середній час роботи елемента; б) ймовірність того, що елемент буде працювати не менше 400 годин.

9. Задана щільність ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$$

   Знайти математичне сподівання та дисперсію.

10. Кількість балів, одержаних студентами при тестуванні для визначення їх здібностей, описується нормальним розподілом із середнім значенням 155 балів і середнім квадратичним відхиленням 15 балів. Яка ймовірність того, що вибраний навмання студент буде мати від 160 до 176 балів?

11. Інститут сейсмології зібрав дані, які стосувалися частоти землетрусів у світі величиною в 5,0 балів і більше за шкалою Ріхтера. Було встановлено, що кількість землетрусів описується нормальним розподілом з середнім значенням 24 і середнім квадратичним відхиленням — 5. Яка ймовірність того, що за 1 рік може бути більше, ніж 32 землетруси?

12. Кількість дзвінків до поліції у великому місті за 24-годинний період точно не визначена і розподіляється за нормальним законом розподілу. Середнє значення 420 і середнє квадратичне відхилення – 50 дзвінків. Яка ймовірність того, що певного дня кількість дзвінків буде меншою за 300?

13. Середнє значення розподілу доходів працівників фірми складає 1400 гр.од. і середнє квадратичне відхилення 180 гр.од. Якщо працівника вибрано навмання, то яка ймовірність того, що він заробляє більше 1600 гр.од.?

14. Зріст чоловіків — випадкова величина, яка розподілена за нормальним законом із дисперсією 64см^2. Середній зріст чоловіків 176 см. Знайти ймовірність того, що зріст навмання вибраного чоловіка: а) знаходиться в межах від 170 до 185 см; б) відхиляється від середнього зросту в той чи інший бік не більше, ніж на 5 см. Знайти інтервал, у якому із ймовірністю 0,9973 знаходиться зріст чоловіків.

Список рекомендованої літератури

1. Барковський В.В. Теорія ймовірності та математична статистика: Навчальний посібник / В.В.Барковський, Н.В.Барковська, О.К Лопатіна — К: Центр учбової літератури — 2021 —- 424с.

2. Бобик О.І. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник / О.І.Бобик, Г.І.Берегова, Б.І.Копитко — К.:ВД"Професіонал 2007. — 560с.

3. Васильків І.М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики: Навч.посіб. / І.М. Васильків. — Львів:ЛНУ імені Івана Франка, 2020. — 184ст.

4. Дорош А.К. Теорія ймовірностей та математична статистика/А.К.Дорош, О.П.Коханівський. — К.:НТУУ"КПІ 2006. — 268с.

5. Дорош А.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач та індивідуальних завдань / А.К.Дорош, О.П.Коханівський. — К.:"Київський політехнік 2000. — 125с.

6. Каніовська І.Ю.. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах / І.Ю.Каніовська. — К.:ІВЦ "Видавництво "Політехніка ТОВ "Фірма "Періодика 2004. — 156с.

7. Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей та математична статистика: посібник з розв'язування задач: Навч.посібник. — К.:ЦУЛ, 2007. — 576с.

8. Медведєв М.Г. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник / М.Г.Медведєв, І.О. Пащенко – К: Ліра-К – 2021 – 536с.

9. Сеньо, П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : Затверджено МОНУ як підручник для студ. ВНЗ / П. С. Сеньо. — К : ЦУЛ, 2004. – 448 с.

10. Турчин, В. М. Теорія ймовірностей. Основні поняття, приклади, задачі : Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний посібник / В. М. Турчин. — Київ : А.С.К., 2004. — 208 с. — (Університетська бібліотека).

Додаток

Таблиця 1. Значення функції Гаусса $\phi(x)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi(x)$

X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767

Продовження

X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)
2,00	0,4772	2,30	0,4893	2,60	0,4953	2,90	0,4981
2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,62	0,4956	2,92	0,4982
2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,64	0,4959	2,94	0,4984
2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,66	0,4961	2,96	0,4985
2,08	0,4812	2,28	0,4913	2,68	0,4963	2,98	0,4986
2,10	0,4821	2,40	0,4918	2,70	0,4965	3,00	0,4986
2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,72	0,4967	3,20	0,49931
2,14	0,4838	2,44	0,4927	2,74	0,4969	3,40	0,49966
2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,76	0,4971	3,60	0,499841
2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,78	0,4973	3,80	0,499928
2,20	0,4861	2,50	0,4938	2,80	0,4974	4,00	0,499968
2,22	0,4868	2,52	0,4941	2,82	0,4976	4,50	0,499997
2,24	0,4875	2,54	0,4945	2,84	0,4977	5,00	0,499997
2,26	0,4881	2,56	0,4948	2,86	0,4979		
2,28	0,4887	2,58	0,4951	2,88	0,4980		

Предметний покажчик

Зміст

МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26
тел./факс +380-3131-21109
Веб-сайт університету: www.msu.edu.ua
E-mail: info@msu.edu.ua, pr@mail.msu.edu.ua
Веб-сайт Інституційного репозитарію Наукової бібліотеки МДУ: http://dspace.msu.edu.ua:8080
Веб-сайт Наукової бібліотеки МДУ: http://msu.edu.ua/library/